УДК 517.938

А. З. АСАНОВ, Д. Н. ДЕМЬЯНОВ

ЗАДАНИЕ СОВОКУПНОСТИ ПЕРЕДАТОЧНЫХ НУЛЕЙ МНОГОСВЯЗНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ОПЕРАЦИИ КВАДРИРОВАНИЯ

Предлагается алгоритм выбора матрицы квадрирования, обеспечивающей заданную совокупность передаточных нулей многосвязного динамического объекта. Приводятся условия разрешимости задачи и способы построения множества решений, если оно существует. *Динамический объект*; *квадрирование*; *системный нуль*; *одностороннее матричное уравнение*

ВВЕДЕНИЕ

Синтез систем управления многосвязными динамическими объектами является достаточно сложной задачей. Так как и входной, и выходной сигналы в таком случае являются векторными величинами, приходится использовать достаточно сложный математический аппарат, осуществлять весьма громоздкие вычисления.

В настоящее время имеются различные подходы к построению систем управления многосвязными динамическими объектами [1]. Необходимо отметить, что большая часть результатов получена для объектов с равным числом входов и выходов (так называемые квадратные системы). Чтобы использовать такие методики и алгоритмы применительно к объектам с числом входов, не равным числу выходов, достаточно часто используют процедуру квадрирования. Суть процедуры квадрирования заключается в том, чтобы путем комбинации выходных сигналов получить новый вектор выхода, размерность которого совпадала бы с размерностью вектора входа. После этого система управления строится так же, как и для квадратного объекта.

Выбор матрицы квадрирования (способа формирования нового выходного вектора) в общем случае ограничивается лишь требованием обеспечить полный ранг формируемой матрицы выхода. Очевидно, что, накладывая некоторые дополнительные условия, можно обеспечить для нового объекта необходимые нам структурные свойства. Одной из структурных характеристик многосвязного объекта является спектр его передаточных нулей [2]. Предлагается в качестве дополнительного условия рассмотреть присутствие в квадрированной системе желаемого набора передаточных нулей, обеспечивающих требуемые структурные свойства синтезируемой системы.

Вопросы анализа многосвязных объектов с использованием понятия системного нуля подробно рассмотрены в работе [3]. Показано, что наличие у объекта управления неминимально-фазовых системных нулей (нулей с положительной вещественной частью) не позволяет решать целый ряд задач управления, адаптации и идентификации. Поэтому в процессе построения качественной системы управления одним из очевидных требований при проведении процедуры квадрирования является обеспечение заданной совокупности системных нулей.

Необходимо отметить, что для полностью управляемого и наблюдаемого объекта множества системных нулей определяется множеством передаточных нулей – таких значений комплексной переменной, при которых теряет нормальный ранг передаточная матрица объекта.

В настоящее время известно несколько подходов к построению матрицы квадрирования, обеспечивающей заданную совокупность передаточных нулей [4, 5]. Однако указанные методы имеют ряд существенных недостатков, основной из которых – необходимость вычисления миноров символьных матриц, что является достаточно трудоемкой, неустойчивой и сложной для автоматизации процедурой. Применение эвристических процедур, основанных на случайном изменении коэффициентов выходной матрицы, также представляется ма-

---

Контактная информация: public.mail@ksu.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-08-00536).

лоэффективным из-за малой скорости сходимости итерационного алгоритма.

В данной работе предлагается новый подход к построению матрицы квадрирования, обеспечивающей заданную совокупность передаточных нулей квадрированного объекта. Предложенные алгоритмы решения задачи базируются на применении технологии канонизации матриц и методах решения односторонних линейных матричных уравнений [6, 7].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим динамический объект, описываемый в пространстве состояний уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $u \in R^s$, $y \in R^m$ – векторы состояния, управления и выхода, A, B, C – числовые матрицы соответствующих размеров.

Предполагается, что объект (1) полностью управляем и наблюдаем, $n > m > s$, матрицы входа и выхода имеют полный ранг.

Скомбинируем компоненты выходного сигнала так, чтобы получился новый s-мерный вектор f:

$$f = Ly,$$

где L – матрица размерности $s \times m$, имеющая ранг s.

Такую операцию будем называть квадрированием выходов объекта.

Требуется построить матрицу квадрирования L размерности $s \times m$ такую, чтобы $\mu = n - s$ различных наперед заданных чисел p_i^z являлись передаточными нулями квадрированного объекта. Числа p_i^z должны быть действительные, не кратные, ни одно из этих чисел не должно совпадать с собственными числами матрицы A – в этом случае выполняется условие наблюдаемости квадрированного объекта.

2. ФОРМИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ КВАДРИРОВАНИЯ

Проанализируем условия разрешимости поставленной задачи. Так как множество передаточных нулей исходного объекта является подмножеством множества передаточных нулей квадрированного объекта, то произвольно задавать все передаточные нули квадрированного объекта можно лишь в том случае, когда исходный объект не имеет передаточных нулей.

В работе [3] показано, что квадрированный объект будет иметь ровно $\mu = n - s$ конечных передаточных нулей только при условии $\operatorname{rank}(LCB) = s$. Так как ранг произведения матриц не превышает минимального из рангов матриц-сомножителей, то указанное условие будет выполняться лишь когда $\operatorname{rank}(CB) = s$.

Будем искать матрицу квадрирования L следующего вида:

$$L = \begin{bmatrix} k \\ q \end{bmatrix}, \tag{2}$$

где k – некоторая матрица размерности $(s - 1) \times m$, q – некоторый вектор-строка размерности $1 \times m$.

Матрица выхода квадрированного объекта запишется следующим образом:

$$C^* = \begin{bmatrix} kC \\ h \end{bmatrix},$$

где $h = qC$.

Запишем выражение для передаточной матрицы при $p = p_i^z$:

$$W\left(p_i^z\right) = C^*\left(p_i^z I - A\right)^{-1} B = \\ = \begin{bmatrix} kC \\ h \end{bmatrix}\left(p_i^z I - A\right)^{-1} B = \begin{bmatrix} kC\left(p_i^z I - A\right)^{-1} B \\ h\left(p_i^z I - A\right)^{-1} B \end{bmatrix}.$$

Так как p_i^z является передаточным нулем, то матрица $W\left(p_i^z\right)$ будет уменьшать свой ранг, что формально соответствует наличию не равного тождественно нулю вектора η^* такого, что:

$$\eta^* \begin{bmatrix} kC\left(p_i^z I - A\right)^{-1} B \\ h\left(p_i^z I - A\right)^{-1} B \end{bmatrix} = 0. \tag{3}$$

Если матрица k выбрана такой, что матрица $kC\left(p_i^z I - A\right)^{-1} B$ не уменьшает своего нормального ранга ни при каких p, то уравнение (3) может быть записано в виде:

$$h\left(p_i^z I - A\right)^{-1} B = \eta\, kC\left(p_i^z I - A\right)^{-1} B,$$

где η – тождественно не равный нулю вектор-строка.

Используя методы решения линейных матричных уравнений, получим:

$$h = \eta\, kC + \lambda \overline{\left(p_i^z I - A\right)^{-1} B}^{L}, \tag{4}$$

где λ – произвольная матрица соответствующей размерности, если выполняется условие разрешимости:

$$\eta\, kC\left(p_i^z I - A\right)^{-1} B \overline{\left(p_i^z I - A\right)^{-1} B}^{R} = 0. \tag{5}$$

Очевидно, что условие разрешимости (5) будет выполняться всегда.

С учетом свойств делителей нуля, уравнение (4) можно записать следующим образом:

$$h = \eta kC + \lambda \overline{B}^L \left(p_i^z I - A\right). \quad (6)$$

Для каждого из μ передаточных нулей запишем уравнение вида (6) и дополним полученную систему выражением для вектора h. Получим:

$$\begin{cases} h = qC, \\ h = \eta_1 kC + \lambda_1 \overline{B}^L \left(p_1^z I - A\right), \\ h = \eta_2 kC + \lambda_2 \overline{B}^L \left(p_2^z I - A\right), \\ \ldots \\ h = \eta_\mu kC + \lambda_\mu \overline{B}^L \left(p_\mu^z I - A\right). \end{cases} \quad (7)$$

Теперь последовательно приравняем правую часть первого уравнения полученной системы к правым частям оставшихся уравнений, а затем приведем подобные.

$$\begin{cases} \lambda_1 \overline{B}^L \left(p_1^z I - A\right) + (\eta_1 k - q)C = 0, \\ \lambda_2 \overline{B}^L \left(p_2^z I - A\right) + (\eta_2 k - q)C = 0, \\ \ldots \\ \lambda_\mu \overline{B}^L \left(p_\mu^z I - A\right) + (\eta_\mu k - q)C = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Введем в рассмотрение блочные матрицы:

$$E_i = \begin{bmatrix} \overline{B}^L \left(p_i^z I - A\right) \\ C \end{bmatrix}, \; i = \overline{1, \mu}.$$

Тогда система (8) может быть записана в виде:

$$\begin{cases} [\lambda_1 \quad \eta_1 k - q] E_1 = 0, \\ [\lambda_2 \quad \eta_2 k - q] E_2 = 0, \\ \ldots \\ [\lambda_\mu \quad \eta_\mu k - q] E_\mu = 0. \end{cases}$$

Используя методы решения линейных матричных уравнений, получим:

$$\begin{cases} [\lambda_1 \quad \eta_1 k - q] = \rho_1 \overline{E_1}^L, \\ [\lambda_2 \quad \eta_2 k - q] = \rho_2 \overline{E_2}^L, \\ \ldots \\ [\lambda_\mu \quad \eta_\mu k - q] = \rho_\mu \overline{E_\mu}^L, \end{cases} \quad (9)$$

где ρ_i – некоторый вектор-строка (если нас интересует нетривиальное решение уравнения, то ρ_i следует выбирать тождественно не равным нулю).

С учетом принятых ранее допущений, размерность матрицы E_i составляет $(n - s + m) \times n$. Следовательно, число строк превышает число столбцов, и матрица E_i всегда будет иметь левый делитель нуля.

Каждая из матриц $\overline{E_i}^L$ может быть разбита на два блока: $\overline{E_i}^L = \left[e_i^* \quad e_i\right]$.

Тогда система (9) может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \rho_1 e_1^*, \\ \lambda_2 = \rho_2 e_2^*, \\ \ldots \\ \lambda_\mu = \rho_\mu e_\mu^*, \\ \eta_1 k - q = \rho_1 e_1, \\ \eta_2 k - q = \rho_2 e_2, \\ \ldots \\ \eta_\mu k - q = \rho_\mu e_\mu. \end{cases} \quad (10)$$

Рассмотрим вторую часть системы (10) – уравнения с μ+1-го по 2μ-е включительно. Последовательно вычтем из первого уравнения оставшиеся уравнения системы и приведем подобные.

$$\begin{cases} (\eta_1 - \eta_2)k = \rho_1 e_1 - \rho_2 e_2, \\ (\eta_1 - \eta_3)k = \rho_1 e_1 - \rho_3 e_3, \\ \\ (\eta_1 - \eta_\mu)k = \rho_1 e_1 - \rho_\mu e_\mu. \end{cases} \quad (11)$$

Введем в рассмотрение блочные матрицы:

$$\Delta_\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 - \eta_2 \\ \ldots \\ \eta_1 - \eta_\mu \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\Delta_e = \begin{bmatrix} \rho_1 e_1 - \rho_2 e_2 \\ \ldots \\ \rho_1 e_1 - \rho_\mu e_\mu \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Тогда система (11) может быть записана в виде одного матричного уравнения:

$$\Delta_\eta k = \Delta_e. \quad (14)$$

Полученное левосторонее матричное уравнение имеет решение:

$$k = \tilde{\Delta}_\eta \Delta_e + \overline{\Delta_\eta}^R \gamma, \quad (15)$$

если выполняется условие разрешимости:

$$\overline{\Delta_\eta}^L \Delta_e = 0. \quad (16)$$

В выражении (15) матрицу γ следует выбирать из условия rank $k = s - 1$, вектора ρ_i следует выбирать из условия $\rho_i e_i^* \neq 0$, матрицу Δ_η можно выбирать произвольную полного ранга (это объясняется инвариантностью передаточных нулей к невырожденному преобразованию входа).

Определив при заданных значениях γ, ρ_i, Δ_η матрицу k из выражения (15), можно определить вектор q из любого уравнения второй части системы (10). Матрица квадрирования L определяется выражением (2). Проанализируем условие разрешимости (16).

Матрица Δ_η имеет $n - s - 1$ строк и $s - 1$ столбцов.

Если $s - 1 \geq n - s - 1$ и матрица Δ_η имеет полный ранг, то ее левый делитель нуля не будет существовать. Значит, если $n \leq 2s$ при матрице Δ_η полного ранга, то условие разрешимости будет выполняться всегда. В противном случает существование решения не гарантировано.

Используя полученные аналитические соотношения, можно сформулировать алгоритм построения матрицы квадрирования, обеспечивающей заданную совокупность передаточных нулей, следующим образом:

1) Проверка входных данных: исходный объект управляем, наблюдаем, не имеет передаточных нулей, rank(CB) = s. Если условие выполняется, то переход к пункту 2, иначе поставленная задача неразрешима – конец алгоритма.

2) Вычисляем μ матриц E_i.

3) Вычисляем μ матриц $\overline{E_i}^L$.

4) Выбираем произвольно вектора ρ_i такие, что $\rho_i e_i^* \neq 0$.

5) Выбираем произвольную матрицу Δ_η полного ранга.

6) Проверяем условие разрешимости (16). Если условие выполняется, то переход к пункту 7, иначе данный алгоритм для решения задачи неприменим – конец алгоритма.

7) Задаем вектор γ такой, чтобы матрица k, определяемая выражением (15), имела полный ранг.

8) Задаем произвольный вектор η_1 и определяем вектор q из выражения $q = \eta_1 k - \rho_1 e_1$.

9) Формируем матрицу квадрирования L по формуле (2).

Конец алгоритма.

Необходимо отметить, что известные задачи управления спектром передаточных нулей путем выбора матрицы выхода можно рассматривать как частные случаи процедуры квадрирования, когда матрица выхода исходного объекта является квадратной матрицей полного ранга (объект обладает полной непосредственной наблюдаемостью).

3. ПРИМЕР

Пример. Рассмотрим динамический объект вида (1), представленный в пространстве состояний матрицами:

$$A = \begin{bmatrix} -12 & 4 & -11 & 4 & -7 \\ -15 & 6 & -19 & 6 & -10 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 35 & -22 & 47 & -17 & 25 \\ 17 & -10 & 23 & -8 & 10 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 11 \\ 2 & 1 & 12 \\ -1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Требуется построить матрицу квадрирования размерности 3 × 4 такую, чтобы квадрированный объект имел 2 передаточных нуля: $p_1^z = -7$; $p_2^z = -9$.

Решение: Предварительный анализ показывает, что исходный объект управляем, наблюдаем и не имеет передаточных нулей, rank(CB) = 3. Так как n = 5 и s = 3, то условие $n \leq 2s$ выполняется. Следовательно, задача будет иметь решение всегда. Найдем матрицы E_i:

$$E_1 = \begin{bmatrix} -419 & 323 & -819 & 248 & -456 \\ 204 & -163 & 424 & -130 & 233 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} -327 & 341 & -857 & 246 & -456 \\ 150 & -173 & 446 & -130 & 231 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найдем левые делители нуля матриц E_i:

$$\overline{E_1}^L = [0{,}0905 \quad 0{,}1801 \quad -0{,}2256 \quad 0{,}2554 \quad -0{,}9066 \quad 1{,}0000],$$

$$\overline{E_2}^L = [0{,}0567 \quad 0{,}1146 \quad -0{,}2546 \quad 0{,}3496 \quad -0{,}8923 \quad 1{,}0000].$$

Выберем ρ_i из условия $\rho_i e_i^* \neq 0$, например $\rho_1 = \rho_2 = 1$.

Тогда по формуле (13):

$$\Delta_e = [0{,}0291 \quad -0{,}0943 \quad -0{,}0144 \quad 0].$$

Выберем произвольную матрицу Δ_η полного ранга:

$$\Delta_\eta = [1 \quad -1].$$

Так как $\overline{\Delta_\eta}^{L} = 0$, то условие (16) выполняется. Следовательно, общее решение (15) уравнения (14) существует и имеет следующий вид:

$$k = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_e + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \gamma =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}0291 & -0{,}0943 & -0{,}0144 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \gamma.$$

Выберем матрицу γ такой, чтобы матрица k имела полный ранг, например $\gamma = [1\ 2\ 3\ 4]$. Получим:

$$k = \begin{bmatrix} 1{,}0291 & 1{,}9057 & 2{,}9856 & 4{,}0000 \\ 1{,}0000 & 2{,}0000 & 3{,}0000 & 4{,}0000 \end{bmatrix}.$$

Зададим произвольный вектор $\eta_1 = [0\ 1]$ и определим из третьего уравнения системы (10) вектор q:

$$q = \eta_1 k - \rho_1 e_1,$$

$$q = [1{,}2256 \quad 1{,}7446 \quad 3{,}9066 \quad 3{,}0000].$$

Тогда матрица квадрирования L будет иметь вид:

$$L = \begin{bmatrix} k \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}0291 & 1{,}9057 & 2{,}9856 & 4{,}0000 \\ 1{,}0000 & 2{,}0000 & 3{,}0000 & 4{,}0000 \\ 1{,}2256 & 1{,}7446 & 3{,}9066 & 3{,}0000 \end{bmatrix}.$$

После проведения процедуры квадрирования матрица выхода будет иметь вид:

$$C^* = LC =$$

$$= \begin{bmatrix} 1{,}8549 & 10{,}6086 & -7{,}6591 & 19{,}0003 & 1{,}9565 \\ 2{,}0000 & 11{,}0000 & -8{,}0000 & 19{,}0000 & 2{,}0000 \\ 0{,}8082 & 10{,}8852 & -5{,}7828 & 18{,}0388 & 2{,}6811 \end{bmatrix}.$$

Проверка любым из известных методов показывает, что квадрированный объект управления будет иметь требуемую совокупность передаточных нулей. Поставленная задача решена.

ВЫВОДЫ

В работе предложен новый подход к построению матрицы квадрирования, обеспечивающий заданный спектр передаточных нулей динамического объекта. Сформулированы условия разрешимости задачи и показаны способы их обеспечения. Предложенный алгоритм основан на свойствах передаточных нулей и методах решения односторонних линейных матричных уравнений. Алгоритм может быть достаточно легко реализован на ЭВМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Справочник по теории автоматического управления / под ред. А. А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.

2. **Rosenbrock H. H.** State-space and multivariable theory. N.Y.: Wiley, 1970. 286 p.

3. **Смагина Е. М.** Нули линейных многомерных систем. Определения, классификация, применение (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1985. № 12. С. 5–33.

4. **MacFarlane A. G., Kouvaritakis B.** Geometric approach to analysis and synthesis of system zeros. Pt 1. Square systems. Pt 2. Non-square systems // Int. J. Control. 1976. V. 23. № 2. P. 149–181.

5. **Сорокин А. В.** К проблеме задания нулей при квадрировании системы // Сибирск. физ.-техн. ин-т. при ТГУ. 1998. 13 с. Деп. в ВИНИТИ 30.03.98, № 950-В98.

6. **Буков В. Н.** Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во научной лит. Н. Ф. Бочкаревой, 2006. 720 с.

7. **Асанов А. З.** Технология вложения систем и ее приложения: учеб. пособие. Уфа: УГАТУ, 2007. 227 с.

ОБ АВТОРАХ

Асанов Асхат Замилович, проф. каф. ПМиИ КГУ. Дипл. инж. по радиофизике и электронике (КГУ, 1972). Д-р техн наук по системн. анализу, управлению и обработке информации (УГАТУ, 2004). Иссл. в обл. системн. анализа и теории управления.

Демьянов Дмитрий Николаевич, асс. той же каф. Дипл. инж. по автоматизации технол. процессов и производств (КамПИ, 2004). Иссл. в обл. теории автоматическ. управления.