

УДК 681.518

О. Г. КАНТОР, Т. А. СУЛТАНОВ

КОМПЛЕКСНАЯ ОЦЕНКА МНОГОУРОВНЕВЫХ СТРУКТУР УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ АППАРАТА СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

В статье рассматриваются подходы к оценке многоуровневых структур управления, проводится анализ существующих методов оценки влияния факторов риска на реализацию проектов по совершенствованию систем управления. В работе предложены методические рекомендации по оценке целесообразности внедрения процессного подхода в управление предприятием на основе аппарата систем массового обслуживания. *Многоуровневые структуры управления; система массового обслуживания; марковские процессы*

ВВЕДЕНИЕ

Для сложных иерархических систем, какими являются современные предприятия, их управляющими органами будут многоуровневые структуры управления (МСУ).

Для комплексной оценки функционирования МСУ с учетом влияния факторов риска необходимо совместное рассмотрение процессов нормального функционирования организации и функционирования организации в условиях проявления факторов риска. Для этого в наборе характеристик, описывающих работу системы, должны присутствовать параметры как штатного функционирования, так и функционирования МСУ в процессе парирования последствий проявления факторов риска.

Обзор существующих подходов к анализу многоуровневых структур управления показал, что их оценка должна проводиться с позиций системного подхода. Она может выполняться при помощи как количественных, так и качественных показателей, которые различны по своей сути и природе. Это затрудняет разработку методов комплексного анализа МСУ.

При оценке функционирования МСУ необходимо анализировать структурные свойства организации с целью выявления дублирующихся функций управления, полноты контроля исполнения проекта, чрезмерной связности работ, выполняемых исполнителями различных структурных подразделений по сравнению со связностью внутри подразделений, и т. д. Для этого удобно пользоваться представлением проектов с помощью методологии IDEF0.

К сожалению, подобный подход не дает информации о загрузке исполнителей, то есть

не может быть использован для оценки директивных сроков выполнения проекта. В то же время он может использоваться для предварительной оценки возможности выполнения проекта организацией и результаты его применения должны учитываться при формировании комплексной оценки МСУ.

Анализ способов представления разнохарактерных, слабо формализуемых данных [1, 2] показывает, что для решения задачи формирования частных и интегральных показателей функционирования МСУ и ее элементов можно воспользоваться основными положениями теории систем массового обслуживания (СМО) и теории марковских процессов, которые позволяют эффективно описывать стохастические явления и процессы.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Процесс работы СМО представляет собой случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем; состояние СМО меняется скачком в моменты появления каких-то событий (прихода новой заявки, окончания обслуживания, момента, когда заявка, которой «надоело ждать», покидает очередь).

Математический анализ работы СМО очень упрощается, если процесс этой работы – марковский. Для этого достаточно, чтобы все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние (потоки заявок, «потоки обслуживания»), были простейшими. Случайный процесс, протекающий в системе, называется *марковским*, если для любого момента времени t_0 вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент t_0 и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние.

Пусть в момент t_0 система находится в определенном состоянии S_0 . Мы наблюдаем процесс со стороны и в момент t_0 знаем состояние системы S_0 и всю предысторию процесса, все, что было при $t < t_0$. Нас интересует будущее ($t > t_0$). В точности невозможно его предугадать, так как процесс – случайный, а значит – непредсказуемый. Но вероятностные характеристики процесса в будущем мы найти можем. Например, вероятность того, что через некоторое время t система S окажется в состоянии S_1 или сохранит состояние S_0 , и т. п.

На практике марковские процессы в чистом виде обычно не встречаются, но нередко приходится иметь дело с процессами, для которых влиянием «предыстории» можно пренебречь. При изучении таких процессов можно с успехом применять марковские модели.

Важной характеристикой потока событий является его *интенсивность* – среднее число событий, приходящихся на единицу времени. Интенсивность потока может быть как постоянной, так и переменной, зависящей от времени t .

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ СТРУКТУРА УПРАВЛЕНИЯ

Для простейшего потока с интенсивностью λ интервал между соседними событиями имеет так называемое экспоненциальное распределение с плотностью

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (t > 0). \quad (1)$$

Величина λ в формуле (1) называется параметром показательного закона. Для случайной величины T , имеющей экспоненциальное распределение, математическое ожидание m_T есть величина, обратная параметру, а среднее квадратическое отклонение σ_T равно математическому ожиданию:

$$m_T = \sigma_T = 1/\lambda. \quad (2)$$

В теории вероятностей в качестве «меры случайности» неотрицательной случайной величины нередко рассматривают так называемый коэффициент вариации:

$$v_T = \sigma_T / m_T. \quad (3)$$

Из формул (2), (3) следует, что для показательного распределения коэффициент вариации равен 1, то есть для простейшего потока событий коэффициент вариации интервалов между событиями равен единице.

Очевидно, что для регулярного потока событий, у которого интервал между событиями

не случайный, коэффициент вариации равен нулю.

Пусть рассматривается система S , имеющая n возможных состояний S_1, S_2, \dots, S_n . Назовем вероятностью i -го состояния вероятность $p_i(t)$ того, что в момент t система будет находиться в состоянии S_i . Очевидно, что для любого момента сумма всех вероятностей состояний равна единице.

Имея в своем распоряжении размеченный граф состояний, можно найти все вероятности состояний $p_i(t)$ как функции времени. Для этого составляются и решаются так называемые уравнения Колмогорова – дифференциальные уравнения особого вида, в которых неизвестными функциями являются вероятности состояний. Каждый член равен произведению плотности вероятности перехода соответствующей стрелки, умноженной на вероятность того состояния, из которого исходит стрелка.

Реализация проекта, например, принятия решений по освоению новой продукции в структуре управления предприятием, схематично может быть представлена как последовательное соединение многоканальных СМО с неограниченной длиной очереди и неограниченным ожиданием каждая (рис. 1).

Определим основные характеристики изображенной системы последовательных СМО. Рассмотрим n -канальную СМО, на которую поступает поток заявок с интенсивностью λ (т. е. среднее число заявок, поступающих в единицу времени, равно λ); интенсивность обслуживания для одного канала μ (μ – величина, обратная среднему времени обслуживания $t_{\text{обсл}}$); число мест в очереди неограниченно. Заявка, нашедшая все каналы занятыми, становится в очередь, на которую не наложено ограничений ни по длине очереди, ни по времени ожидания.

Состояния системы нумеруются по числу заявок, связанных системой:

- нет очереди;
- S_0 – все каналы свободны;
- S_1 – занят один канал, все остальные свободны;
- ...
- S_n – все каналы заняты, есть очередь;
- S_{n+1} – все каналы заняты, одна заявка стоит в очереди;
- ...
- S_{n+m} – все каналы заняты, m заявок стоит в очереди.

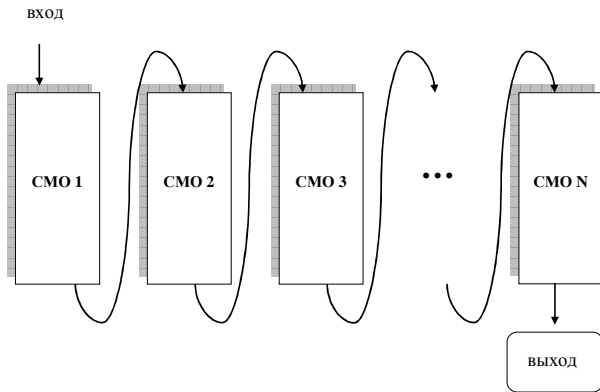


Рис. 1. Общая схема рассмотрения проекта в функциональной структуре управления

Графическое представление такой СМО представлено на рис. 2. По стрелкам слева направо систему переводит всегда один и тот же поток заявок с интенсивностью λ , по стрелкам справа налево систему переводит поток обслуживания, интенсивность которого равна μ , умноженному на число занятых каналов.

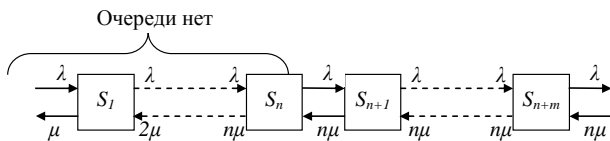


Рис. 2. n-канальная система массового обслуживания с неограниченной длиной очереди и неограниченным ожиданием

В качестве основных характеристик СМО будем рассматривать:

$P_{отк}$ – вероятность того, что заявке будет отказано в обслуживании;

$P_{обсл}$ – вероятность того, что заявка будет обслужена (или относительная пропускная способность), $P_{обсл} = 1 - P_{отк}$;

A – абсолютная пропускная способность, т. е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени, $A = \lambda \cdot P_{обсл}$;

\bar{z} – среднее число занятых каналов, $\bar{z} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot P_{обсл}$;

q – доля каналов, занятых обслуживанием, $q = \frac{\bar{z}}{n}$;

\bar{r} – среднее число заявок в очереди;

\bar{k} – среднее число заявок в системе, $\bar{k} = \bar{r} + \bar{z}$;

$\bar{t}_{ож}$ – среднее время ожидания заявки в очереди, $\bar{t}_{ож} = \frac{\bar{r}}{\lambda}$;

$\bar{t}_{обсл}$ – среднее время обслуживания заявки, $\bar{t}_{обсл} = \frac{P_{обсл}}{\mu}$;

$\bar{t}_{СМО}$ – среднее время пребывания заявки в СМО, $\bar{t}_{СМО} = \bar{t}_{ож} + \bar{t}_{обсл}$.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Из рис. 3 видно, что процесс, протекающий в СМО, представляет собой частный случай процесса гибели и размножения. Для получения его характеристик рассмотрим сначала n-канальную СМО с ограниченной длиной очереди (рис. 3).

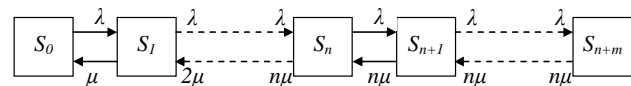


Рис. 3. n-канальная СМО с ограниченной длиной очереди

Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний рассматриваемой СМО примут вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dp_0(t)}{dt} &= \mu p_1(t) - \lambda p_0(t), \\ \dots \dots \dots \\ \frac{dp_k(t)}{dt} &= \lambda p_{k-1}(t) + (k+1) \times \\ &\times \mu p_{k+1}(t) - (\lambda + k\mu)p_k(t), \\ \dots \dots \dots \\ \frac{dp_n(t)}{dt} &= \lambda p_{n-1}(t) - n\mu p_n(t), \\ \frac{dp_{n+1}(t)}{dt} &= \lambda p_n(t) - n\mu p_{n+1}(t), \\ \dots \dots \dots \\ \frac{dp_{n+m}(t)}{dt} &= \lambda p_{n+m-1}(t) - n\mu p_{n+m}(t). \end{aligned} \right. \quad (4)$$

Уравнения (4) называются уравнениями Эрланга. Естественными начальными условиями для их решения являются:

$$p_0(0) = 1, p_1(0) = p_2(0) = \dots = p_n(0) = p_{n+1}(0) = \dots = p_{n+m}(0) = 0,$$

которые соответствуют тому, что в начальный момент система свободна.

Интегрирование системы уравнений (4) в аналитическом виде довольно сложно, поэтому на практике такие системы дифференциальных уравнений обычно решаются численно. Наибольший интерес для практики имеют пре-

дельные вероятности состояний, характеризующие установившийся режим работы СМО. Для нахождения предельных вероятностей воспользуемся уже готовым решением задачи, полученным для схемы гибели и размножения [3–7]:

$$\begin{aligned}
 p_k &= \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad k = \overline{1, n} \\
 p_{n+i} &= \frac{\rho^{n+i}}{n^i n!} p_0, \quad i = \overline{1, m}; \\
 p_0 &= \\
 &= 1 / \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \right. \\
 &+ \left. \frac{\rho^{n+1}}{n n!} + \frac{\rho^{n+2}}{n^2 n!} + \dots + \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} \right) = \\
 &= 1 / \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \right. \\
 &+ \left. \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{\rho}{n} \cdot \left(\frac{\rho}{n} \right)^{m-1} \right).
 \end{aligned} \quad (5)$$

В этих формулах интенсивность потока заявок λ и интенсивность потока обслуживаний (для одного канала) μ не фигурируют по отдельности, а входят только своим отношением λ / μ . Обозначим это отношение: $\rho = \lambda / \mu$ и будем называть величину ρ «приведенной интенсивностью» потока заявок. Физический смысл ее таков: величина ρ представляет собой среднее число заявок, приходящих в СМО за среднее время обслуживания одной заявки.

РАСЧЕТ ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Определим характеристики эффективности системы.

Вероятность отказа. Поступившая заявка получает отказ, если заняты все n каналов и все m мест в очереди:

$$P_{\text{отк}} = p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0.$$

Относительная пропускная способность дополняет вероятность отказа до единицы:

$$P_{\text{обсл}} = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0.$$

Абсолютная пропускная способность СМО:

$$A = \lambda P_{\text{обсл}} = \lambda \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0 \right).$$

Среднее число занятых каналов:

$$\bar{z} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0 \right) = \rho \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0 \right).$$

Среднее число заявок в очереди можно вычислить непосредственно как математическое ожидание дискретной случайной величины:

$$\begin{aligned}
 \bar{r} &= 1 p_{n+1} + 2 p_{n+2} + \dots + m p_{n+m} = \sum_{i=1}^m i \cdot \frac{\rho^{n+i}}{n^i \cdot n!} p_0 = \\
 &= \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0 \sum_{i=1}^m i \cdot \left(\frac{\rho}{n} \right)^{i-1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0 \sum_{i=1}^m i \cdot \chi^{i-1},
 \end{aligned}$$

где $\chi = \rho / n$.

Для определения суммы $\sum_{i=1}^m i \cdot \chi^{i-1}$ воспользуемся производной суммы геометрической прогрессии:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^m i \cdot \chi^{i-1} &= \left(\sum_{i=1}^m \chi^i \right)' = \left(\frac{\chi(1-\chi^m)}{(1-\chi)} \right)' = \\
 &= \frac{1-\chi^m(m+1-m\chi)}{(1-\chi)^2}.
 \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n n!} \frac{1-\chi^m(m+1-m\chi)}{(1-\chi)^2}.$$

Среднее число заявок в системе: $\bar{k} = \bar{r} + \bar{z}$.

Определим среднее время ожидания заявки в очереди. Рассмотрим ряд ситуаций, различающихся тем, в каком состоянии застанет систему вновь пришедшая заявка и сколько времени ей придется ждать обслуживания.

Если заявка застанет не все каналы занятыми, ей не придется ждать (соответствующие члены в математическом ожидании равны нулю). Если заявка придет в момент, когда заняты все n каналов, а очереди нет, ей придется ждать в среднем время, равное $1 / n\mu$ (потому что «поток освобождений» n каналов имеет интенсивность $n\mu$). Если заявка застанет все каналы занятыми и одну заявку перед собой в очереди, ей придется в среднем ждать в течение времени $2 / n\mu$ (по $1 / n\mu$ на каждую впереди стоящую заявку) и т. д. Если заявка застанет в очереди k заявок, ей придется ждать в среднем в течение времени $k / n\mu$. Если вновь пришедшая заявка застанет в очереди уже m заявок, то она вообще не будет ждать (но и не будет обслужена). Среднее время ожидания найдем, умножая каждое из этих значений на соответствующие вероятности:

$$\begin{aligned} \bar{t}_{ож} &= \frac{1}{n\mu} p_n + \frac{2}{n\mu} p_{n+1} + \dots + \frac{m}{n\mu} p_{n+m-1} = \\ &= \frac{1}{n\mu} \left(\frac{\rho^n}{n!} p_0 + 2 \frac{\rho^{n+1}}{n!} p_0 + \dots + m \frac{\rho^{n+m-1}}{n^{m-1} n!} p_0 \right) = \\ &= \frac{\rho^n p_0}{n\mu n!} \sum_{i=1}^m i \cdot \left(\frac{\rho}{n} \right)^{i-1} = \frac{\rho^n p_0}{n\mu n!} \sum_{i=1}^m i \cdot \chi^{i-1} = \\ &= \frac{\rho^n p_0}{n\mu n!} \frac{1 - \chi^m (m+1 - m\chi)}{(1-\chi)^2}. \end{aligned}$$

Среднее время пребывания заявки в системе: $\bar{t}_{СМО} = \bar{t}_{ож} + \bar{t}_{обсл}$.

Для расчета характеристик СМО с неограниченной длиной очереди и неограниченным ожиданием будем использовать полученные ранее соотношения при $m \rightarrow \infty$.

Вероятности состояний получим из формул (5) предельным переходом (при $m \rightarrow \infty$). При этом заметим, что сумма соответствующей геометрической прогрессии сходится при $\chi < 1$ и расходится при $\chi > 1$. Поэтому требование $\chi = \rho / n < 1$ является обязательным для получения конечных значений вероятностей состояний. Таким образом, выражения для предельных вероятностей состояний примут вид:

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad k = \overline{1, n}; \\ p_{n+i} &= \frac{\rho^{n+i}}{n^i n!} p_0, \quad i = 1, 2, \dots; \\ p_0 &= \frac{1}{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}}. \end{aligned}$$

В СМО с неограниченной длиной очереди и неограниченным временем ожидания каждая заявка рано или поздно будет обслужена, поэтому $P_{обсл} = 1$, а $P_{отк} = 0$, $A = \lambda \cdot P_{обсл} = \lambda$, в среднем непрерывно занятый канал будет выдавать $\lambda / \mu = \rho$ обслуженных заявок в единицу времени.

Среднее число заявок в очереди можно вычислить непосредственно как математическое ожидание дискретной случайной величины:

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot p_{n+i} = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \frac{\rho^{n+i}}{n^i n!} \cdot p_0 = \\ &= \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot p_0 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{\rho}{n} \right)^{i-1} = \\ &= \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot p_0 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \chi^{i-1}. \end{aligned}$$

Выражение $\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \chi^{i-1}$ представляет собой

производную суммы бесконечной геометрической прогрессии. Учитывая требование $\chi = \rho / n < 1$, сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $\sum_{i=1}^{\infty} \chi^i = \frac{\chi}{1-\chi}$, а ее производная имеет вид $\frac{1}{(1-\chi)^2}$. Таким образом,

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot p_0 \cdot \frac{1}{(1-\chi)^2}.$$

Используя аналогичные рассуждения, получим среднее время ожидания:

$$\bar{t}_{ож} = \frac{\rho^n p_0}{n\mu n!} \frac{1}{(1-\chi)^2}.$$

Среднее число занятых каналов: $\bar{z} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$. Среднее число заявок,

связанных с СМО: $\bar{k} = \bar{r} + \bar{z}$.

На основании приведенных выше формул для расчета основных характеристик СМО с неограниченной очередью и неограниченным временем ожидания могут быть рассчитаны все характеристики процесса, представленного на рис. 3. Каждая частная СМО обладает своими параметрами и характеристиками. Однако учитывая, что в среднем непрерывно занятый в каждой СМО канал будет выдавать $\lambda / \mu = \rho$ обслуженных заявок в единицу времени, вся СМО будет выдавать $\rho \cdot n$ заявок в единицу времени, которые и будут поступать в следующую СМО. Таким образом, интенсивность поступления заявок в каждую последующую СМО будет зависеть от двух величин: интенсивности поступления заявок в первую СМО и от количества выдаваемых заявок в единицу времени предыдущей СМО, а именно, интенсивность поступления заявок в каждую последующую СМО определяется как минимум из указанных двух величин. Действительно, если предыдущая СМО обрабатывает заявки быстрее, чем они поступают, то среднее количество заявок в единицу времени, поступающее в последующую СМО, не может быть больше, чем количество заявок, поступающих в единицу времени в систему. Пример расчета характеристик процесса представлен в таблице.

Пример расчета характеристик процесса

Параметры СМО	СМО 1	СМО 2	СМО 3	СМО 4	СМО 5	СМО 6	СМО 7
n	4	4	5	4	5	5	5
λ	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
μ	0,09	0,11	0,11	0,13	0,25	0,20	0,20
P	1,10	0,90	0,90	0,80	0,40	0,50	0,50
χ	0,28	0,23	0,18	0,20	0,08	0,10	0,10
$P_{отк}$	0	0	0	0	0	0	0
$P_{обсл}$	1	1	1	1	1	1	1
A	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
\bar{z}	1,1	0,9	0,9	0,8	0,4	0,5	0,5
\bar{q}	0,275	0,225	0,18	0,2	0,08	0,1	0,1
\bar{r}	0,0106	0,0042	0,0005	0,0024	0,0000	0,0000	0,0000
\bar{k}	1,1106	0,9042	0,9005	0,8024	0,4000	0,5000	0,5000
$\bar{t}_{ож}$	0,1060	0,0416	0,0054	0,0240	0,0001	0,0002	0,0002
$\bar{t}_{обсл}$	11	9	9	8	4	5	5
$\bar{t}_{СМО}$	11,106	9,042	9,005	8,024	4,000	5,000	5,000

Просуммировав все элементы строк « $\bar{t}_{ож}$ », « $\bar{t}_{обсл}$ » и « $\bar{t}_{СМО}$ », можно рассчитать время ожидания, обслуживания и пребывания заявки во всех СМО. Для рассмотренного примера перечисленные величины составили 0,177, 51 и 51,177 единиц времени соответственно. Помимо этого, рассчитанные характеристики всех СМО дают информацию, являющуюся основой для принятия управленческих решений.

ВЫВОДЫ

Таким образом, можно утверждать, что применение методов теории марковских процессов и систем массового обслуживания позволяет эффективно решать задачи совершенствования организационной структуры управления предприятием с учетом риска.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Робсон М., Уллах Ф. Практическое руководство по реинжинирингу бизнес-процессов. М.: Аудит, «Юнити», 1997. 224 с.
2. Аллен П. Х. Реинжиниринг банка: программа выживания и успеха. М.: Альпина Паблишер, 2002. 264 с.
3. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. М.: ЛКИ, 2007. 400 с.
4. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.
5. Бочаров П. П., Печинкин А. В. Теория массового обслуживания. М.: РУДН, 1995. 530 с.

6. Матвеев В. Ф., Ушаков В. Г. Системы массового обслуживания. М.: Издательство МГУ, 1984. 240 с.

7. Кофман А. Методы и модели исследования операций. М.: Мир, 1966. 524 с.

ОБ АВТОРАХ



Кантор Ольга Геннадиевна, доц. каф. финансов, денежного обращения и экон. безопасности. Дипл. спец. по прикл. матем. (МГУ). Канд. физ.-мат. наук (БГУ, 1999). Иссл. в обл. матем. моделирования, эконометрики.



Султанов Тимур Альбертович, асп. каф. техн. киб. Дипл. инженер по автоматизир. системам обр. инф. Иссл. в обл. упр-я в соц.-экон. системах.