Уфа : УГАТУ, 2010 Вестник УГАТУ Т. 14, № 1 (36). С. 117–122

УПРАВЛЕНИЕ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И ИНФОРМАТИКА • МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ...

УДК 519.7

А. И. ЗАИКО

МНОГОМЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА ЗАИКО С РАВНОМЕРНЫМ ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Приведены вероятностные характеристики оригинального случайного процесса с равномерным законом распределения. Показано, что многомерные характеристики этого процесса выражаются через моментные характеристики не выше второго порядка. *Случайный процесс*; *равномерное распределение*; *вероятностные характеристики*

Стационарный случайный процесс с равномерным законом распределения прост, обладает эргодическим свойством и характеризуется всего тремя параметрами: нижней $X_н$ и верхней $X_в$ границами изменения, а также нормированной ковариационной функцией ρ_{ij}, где $i, j = 1, 2, \ldots$. В статье приведены одномерные и многомерные безусловные вероятностные характеристики этого процесса и исследованы их свойства [1, 2].

1. ОДНОМЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ [3, 4]

Одномерная плотность распределения вероятности такого процесса

$$w_1[X_1] = \begin{cases} \dfrac{1}{X_в - X_н}, X_н \le X_1 \le X_в; \\ 0, \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Начальный момент первого порядка (математическое ожидание) такого процесса

$$m_1 = \int_{X_н}^{X_в} X_1 w_1[X_1] dX = \frac{X_в + X_н}{2} = m$$

и центральный момент второго порядка (дисперсия)

$$D_1 = \int_{X_н}^{X_в} (X_1 - m_1)^2 w_1[X_1] dX = \frac{(X_в - X_н)^2}{12} = D.$$

2. ДВУМЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ [3, 4]

Двумерная плотность распределения вероятности $w_2[X_1; X_2]$ также распределена равномерно. Она определяется как произведение одномерной плотности $w_1[X_1]$ и двумерной условной плотности вероятности $w_2[X_2|X_1]$ изменения реализации процесса $x(t_2)$ между нижней $X_н(X_1)$ и верхней $X_в(X_1)$ границами динамического диапазона при условии, что $x(t_1) = X_1$, равными:

$$X_н(X_1) = X_н + (X_1 - X_н)\rho_{12};$$
$$X_в(X_1) = X_в - (X_в - X_1)\rho_{12}.$$

Тогда

$$w_2[X_1; X_2] = w_1[X_1] w_2[X_2 | X_1] =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{(X_в - X_н)[X_в(X_1) - X_н(X_1)]}, & X_н \le X_1 \le X_в, \; X_н(X_1) \le X_2 \le X_в(X_1); \\ 0, \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Моменты случайной величины $x(t_1)$ находятся по выражениям п. 1 и использование для этого двумерных распределений нецелесообразно. Начальный момент первого порядка случайной величины $x(t_2)$ (ее математическое ожидание) равен

$$m_2 = \int_{X_н}^{X_в} \int_{X_н(X_1)}^{X_в(X_1)} X_2 w_2[X_1; X_2] dX_1 dX_2 = m,$$

а второй смешанный начальный момент (ковариационная функция) имеет вид

$$m_{12} = \int_{X_н}^{X_в} \int_{X_н(X_1)}^{X_в(X_1)} X_1 X_2 w_2[X_1; X_2] dX_1 dX_2 =$$
$$= m^2 + \rho_{12} D.$$

Центральный момент второго порядка случайной величины $x(t_2)$ (ее дисперсия) равен

$$M_2 = D_2 =$$
$$= \int_{X_н}^{X_в} \int_{X_н(X_1)}^{X_в(X_1)} (X_2 - m_2)^2 w_2[X_1; X_2] dX_1 dX_2 =$$
$$= \left[\rho_{12}^2 + (1 - \rho_{12})^2\right] D.$$

Второй смешанный центральный момент случайных величин $x(t_1)$ и $x(t_2)$ (корреляционная функция) имеет вид

Контактная информация: (347) 272-11-62

$$M_{12} = R_{12} = \int\limits_{X_н}^{X_в} \int\limits_{X_н(X_1)}^{X_в(X_1)} (X_1 - m_1)(X_2 - m_2) \times \\ \times w_2[X_1; X_2] dX_1 dX_2 = \rho_{12} D.$$

3. ТРЕХМЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ [2, 4]

Трехмерную плотность распределения вероятности $w_3[X_1; X_2; X_3]$ можно определить как произведение двумерной плотности вероятности $w_2[X_1; X_2]$ и трехмерной условной плотности вероятности $w_3[X_3|X_1; X_2]$. Последняя также распределена равномерно между нижней $X_н(X_1; X_2)$ и верхней $X_в(X_1; X_2)$ границами динамического диапазона изменения $x(t_3)$ при условии, что $x(t_1) = X_1$ и $x(t_2) = X_2$, равными:

$$X_н(X_1; X_2) = X_н + (X_1 - X_н)\frac{\rho_{13} - \rho_{23}\rho_{12}}{1 - \rho_{12}^2} + \\ + (X_2 - X_н)\frac{\rho_{23} - \rho_{13}\rho_{12}}{1 - \rho_{12}^2};$$

$$X_в(X_1; X_2) = X_в - (X_в - X_1)\frac{\rho_{13} - \rho_{23}\rho_{12}}{1 - \rho_{12}^2} - \\ - (X_в - X_2)\frac{\rho_{23} - \rho_{13}\rho_{12}}{1 - \rho_{12}^2}.$$

Тогда

$$w_3[X_1; X_2; X_3] = w_2[X_1; X_2] w_3[X_3|X_1; X_2] = \\ = w_1[X_1] w_2[X_2|X_1] w_3[X_3|X_1; X_2] = \\ = \begin{cases} 1 \Big/ \begin{Bmatrix} (X_в - X_н)[X_в(X_1) - X_н(X_1)] \times \\ \times [X_в(X_1; X_2) - X_н(X_1; X_2)] \end{Bmatrix}, \\ X_н \le X_1 \le X_в; \\ X_н(X_1) \le X_2 \le X_в(X_1); \\ X_н(X_1; X_2) \le X_3 \le X_в(X_1; X_2); \\ 0, \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Моменты случайных величин $x(t_1)$ и $x(t_2)$ находятся по выражениям пп. 1 и 2. Начальный момент первого порядка случайной величины $x(t_3)$ (ее математическое ожидание) равно:

$$m_3 = \int\limits_{X_н}^{X_в} \int\limits_{X_н(X_1)}^{X_в(X_1)} \int\limits_{X_н(X_1;X_2)}^{X_в(X_1;X_2)} X_3 \times \\ \times w_3[X_1; X_2; X_3] dX_1 dX_2 dX_3 = m,$$

а вторые смешанные начальные моменты имеют вид:

$$m_{13} = \int\limits_{X_н}^{X_в} \int\limits_{X_н(X_1)}^{X_в(X_1)} \int\limits_{X_н(X_1;X_2)}^{X_в(X_1;X_2)} X_1 X_3 \times \\ \times w_3[X_1; X_2; X_3] dX_1 dX_2 dX_3 = m^2 + \rho_{13} D;$$

$$m_{23} = \int\limits_{X_н}^{X_в} \int\limits_{X_н(X_1)}^{X_в(X_1)} \int\limits_{X_н(X_1;X_2)}^{X_в(X_1;X_2)} X_2 X_3 \times \\ \times w_3[X_1; X_2; X_3] dX_1 dX_2 dX_3 = \\ = m^2 + \left[\rho_{12}\rho_{13} + \frac{\rho_{23} - \rho_{13}\rho_{12}}{1 - \rho_{12}^2}(1 - \rho_{12})^2\right] D.$$

Третий смешанный начальный момент

$$m_{123} = \int\limits_{X_н}^{X_в} \int\limits_{X_н(X_1)}^{X_в(X_1)} \int\limits_{X_н(X_1;X_2)}^{X_в(X_1;X_2)} X_1 X_2 X_3 \times \\ \times w_3[X_1; X_2; X_3] dX_1 dX_2 dX_3 = \\ = \Big\{ m^2 + \Big[\rho_{12} + \rho_{13} + \rho_{12}\rho_{13} + \\ + \frac{\rho_{23} - \rho_{13}\rho_{12}}{1 - \rho_{12}^2}(1 - \rho_{12})^2 \Big] D \Big\} m.$$

Центральный момент второго порядка случайной величины $x(t_3)$ (ее дисперсия) равна

$$M_3 = D_3 = \int\limits_{X_н}^{X_в} \int\limits_{X_н(X_1)}^{X_в(X_1)} \int\limits_{X_н(X_1;X_2)}^{X_в(X_1;X_2)} (X_3 - m_3)^2 \times \\ \times w_3[X_1; X_2; X_3] dX_1 dX_2 dX_3 = \\ = \left[\rho_{13}^2 + \left(\frac{\rho_{23} - \rho_{13}\rho_{12}}{1 - \rho_{12}^2}\right)^2 (1 - \rho_{12})^2 + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{\rho_{13} + \rho_{23}}{1 + \rho_{12}}\right)^2 \right] D.$$

Вторые смешанные центральные моменты случайных величин $x(t_1)$, $x(t_2)$ и $x(t_3)$ (корреляционные функции) имеют вид:

$$M_{13} = R_{13} = \int\limits_{X_н}^{X_в} \int\limits_{X_н(X_1)}^{X_в(X_1)} \int\limits_{X_н(X_1;X_2)}^{X_в(X_1;X_2)} (X_1 - m_1) \times \\ \times (X_3 - m_3) w_3[X_1; X_2; X_3] dX_1 dX_2 dX_3 = \\ = \rho_{13} D;$$

$$M_{23} = R_{23} = \int\limits_{X_н}^{X_в} \int\limits_{X_н(X_1)}^{X_в(X_1)} \int\limits_{X_н(X_1;X_2)}^{X_в(X_1;X_2)} (X_2 - m_2) \times \\ \times (X_3 - m_3) w_3[X_1; X_2; X_3] dX_1 dX_2 dX_3 = \\ = \left[\rho_{12}\rho_{13} + \frac{\rho_{23} - \rho_{13}\rho_{12}}{1 - \rho_{12}^2}(1 - \rho_{12})^2\right] D.$$

Третий смешанный центральный момент

$$M_{123} = \int\limits_{X_н}^{X_в} \int\limits_{X_н(X_1)}^{X_в(X_1)} \int\limits_{X_н(X_1;X_2)}^{X_в(X_1;X_2)} (X_1 - m_1)(X_2 - m_2) \times \\ \times (X_3 - m_3) w_3[X_1; X_2; X_3] dX_1 dX_2 dX_3 = 0,$$

что подтверждает симметрию распределения случайных величин $x(t_1)$, $x(t_2)$ и $x(t_3)$.

4. ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Условная четырехмерная плотность вероятности $w_4[X_4|X_1;\ X_2;\ X_3]$ распределена равномерно между нижней $X_н(X_1;\ X_2;\ X_3)$ и верхней $X_в(X_1;\ X_2;\ X_3)$ границами динамического диапазона изменения $x(t_4)$ при условии $x(t_1) = X_1$, $x(t_2) = X_2$ и $x(t_3) = X_3$, которые равны:

$$X_н(X_1;X_2;X_3) = X_н + (X_1 - X_н)a + (X_2 - X_н)b + (X_3 - X_н)c;$$

$$X_в(X_1;X_2;X_3) = X_в - (X_в - X_1)a - (X_в - X_2)b - (X_в - X_3)c,$$

где

$$a = \left[-\rho_{34}(\rho_{13} - \rho_{23}\rho_{12}) - \rho_{24}(\rho_{12} - \rho_{13}\rho_{23}) + \rho_{14}\left(1 - \rho_{23}^2\right)\right]\frac{1}{1 + 2\rho_{12}\rho_{23}\rho_{13} - \rho_{12}^2 - \rho_{23}^2 - \rho_{13}^2};$$

$$b = \left[-\rho_{34}(\rho_{23} - \rho_{13}\rho_{12}) + \rho_{24}\left(1 - \rho_{13}^2\right) - \rho_{14}(\rho_{12} - \rho_{13}\rho_{23})\right] \times \frac{1}{1 + 2\rho_{12}\rho_{23}\rho_{13} - \rho_{12}^2 - \rho_{23}^2 - \rho_{13}^2};$$

$$c = \left[\rho_{34}\left(1 - \rho_{12}^2\right) - \rho_{24}(\rho_{23} - \rho_{13}\rho_{12}) - \rho_{14}(\rho_{13} - \rho_{23}\rho_{12})\right] \times \frac{1}{1 + 2\rho_{12}\rho_{23}\rho_{13} - \rho_{12}^2 - \rho_{23}^2 - \rho_{13}^2}.$$

Тогда *четырехмерная безусловная плотность распределения вероятностей*

$$w_4[X_1;X_2;X_3;X_4] = w_3[X_1;X_2;X_3]\,w_4[X_4|X_1;X_2;X_3] = w_1[X_1]\,w_2[X_2|X_1]\,w_3[X_3|X_1;X_2] \times w_4[X_4|X_1;X_2;X_3] =$$

$$= \begin{cases} 1 \Big/ \{(X_в - X_н)[X_в(X_1) - X_н(X_1)] \times [X_в(X_1;X_2) - X_н(X_1;X_2)] \times [X_в(X_1;X_2;X_3) - X_н(X_1;X_2;X_3)]\}, \\ X_н \le X_1 \le X_в,\ X_н(X_1) \le X_2 \le X_в(X_1), \\ X_н(X_1;X_2) \le X_3 \le\le X_в(X_1;X_2), \\ X_н(X_1;X_2;X_3) \le X_4 \le X_в(X_1;X_2;X_3); \\ 0,\ \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Моменты случайных величин $x(t_1)$, $x(t_2)$ и $x(t_3)$ находятся по выражениям пп. 1, 2 и 3. Математическое ожидание случайной величины $x(t_4)$ (ее начальный момент первого порядка) равно:

$$m_4 = \int_{X_н}^{X_в}\int_{X_н(X_1)}^{X_в(X_1)}\int_{X_н(X_1;X_2)}^{X_в(X_1;X_2)}\int_{X_н(X_1;X_2;X_3)}^{X_в(X_1;X_2;X_3)} X_4 \times w_4[X_1;X_2;X_3;X_4]\,dX_1dX_2dX_3dX_4 = m,$$

а ковариационные функции (вторые смешанные начальные моменты):

$$m_{14} = \int_{X_н}^{X_в}\int_{X_н(X_1)}^{X_в(X_1)}\int_{X_н(X_1;X_2)}^{X_в(X_1;X_2)}\int_{X_н(X_1;X_2;X_3)}^{X_в(X_1;X_2;X_3)} X_1X_4 \times w_4[X_1;X_2;X_3;X_4]\,dX_1dX_2dX_3dX_4 = m_x^2 + \rho_{14}D;$$

$$m_{24} = \int_{X_н}^{X_в}\int_{X_н(X_1)}^{X_в(X_1)}\int_{X_н(X_1;X_2)}^{X_в(X_1;X_2)}\int_{X_н(X_1;X_2;X_3)}^{X_в(X_1;X_2;X_3)} X_2X_4 \times w_4[X_1;X_2;X_3;X_4]\,dX_1dX_2dX_3dX_4 = m^2 + \left[\rho_{12}\rho_{14} + \frac{\rho_{24} - \rho_{14}\rho_{12}}{1 - \rho_{12}^2}(1 - \rho_{12})^2\right]D;$$

$$m_{34} = \int_{X_н}^{X_в}\int_{X_н(X_1)}^{X_в(X_1)}\int_{X_н(X_1;X_2)}^{X_в(X_1;X_2)}\int_{X_н(X_1;X_2;X_3)}^{X_в(X_1;X_2;X_3)} X_3X_4 \times w_4[X_1;X_2;X_3;X_4]\,dX_1dX_2dX_3dX_4 =$$

$$= m^2 + \left\{\rho_{13}\rho_{14} + \frac{\rho_{23} - \rho_{13}\rho_{12}}{1 - \rho_{12}^2}\,\frac{\rho_{24} - \rho_{14}\rho_{12}}{1 - \rho_{12}^2} \times (1 - \rho_{12})^2 + c\left(1 - \frac{\rho_{13} + \rho_{23}}{1 + \rho_{12}}\right)^2\right\}D.$$

Третьи смешанные начальные моменты равны

$$m_{123} = \int_{X_н}^{X_в}\int_{X_н(X_1)}^{X_в(X_1)}\int_{X_н(X_1;X_2)}^{X_в(X_1;X_2)}\int_{X_н(X_1;X_2;X_3)}^{X_в(X_1;X_2;X_3)} X_1X_2X_3 \times w_4[X_1;X_2;X_3;X_4]\,dX_1dX_2dX_3dX_4 = \left\{m^2 + \left[\rho_{12} + \rho_{13} + \rho_{12}\rho_{13} + \frac{\rho_{23} - \rho_{13}\rho_{12}}{1 - \rho_{12}^2}(1 - \rho_{12})^2\right]D\right\}m;$$

$$m_{124} = \int_{X_н}^{X_в}\int_{X_н(X_1)}^{X_в(X_1)}\int_{X_н(X_1;X_2)}^{X_в(X_1;X_2)}\int_{X_н(X_1;X_2;X_3)}^{X_в(X_1;X_2;X_3)} X_1X_2X_4 \times w_4[X_1;X_2;X_3;X_4]\,dX_1dX_2dX_3dX_4 = \left\{m^2 + \left[\rho_{12} + \rho_{14} + \rho_{12}\rho_{14} + \frac{\rho_{24} - \rho_{14}\rho_{12}}{1 - \rho_{12}^2}(1 - \rho_{12})^2\right]D\right\}m;$$

$$m_{134} = \int_{X_н}^{X_в}\int_{X_н(X_1)}^{X_в(X_1)}\int_{X_н(X_1;X_2)}^{X_в(X_1;X_2)}\int_{X_н(X_1;X_2;X_3)}^{X_в(X_1;X_2;X_3)} X_1X_3X_4 \times w_4[X_1;X_2;X_3;X_4]\,dX_1dX_2dX_3dX_4 =$$

$$=\left\{m^2+\left[\rho_{13}+\rho_{14}+\rho_{13}\rho_{14}+\frac{\rho_{23}-\rho_{13}\rho_{12}}{1-\rho_{12}^2}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{\rho_{24}-\rho_{14}\rho_{12}}{1-\rho_{12}^2}(1-\rho_{12})^2+c\left(1-\frac{\rho_{13}+\rho_{23}}{1+\rho_{12}}\right)^2\right]D\right\}m;$$

$$m_{234}=\int\limits_{X_н}^{X_в}\int\limits_{X_н(X_1)}^{X_в(X_1)}\int\limits_{X_н(X_1;X_2)}^{X_в(X_1;X_2)}\int\limits_{X_н(X_1;X_2;X_3)}^{X_в(X_1;X_2;X_3)}X_2X_3X_4\times$$

$$\times w_4[X_1;X_2;X_3;X_4]dX_1dX_2dX_3dX_4=$$

$$=\{m^2+[\rho_{12}\rho_{13}+\rho_{12}\rho_{14}+\rho_{13}\rho_{14}+$$

$$+\frac{\rho_{23}-\rho_{13}\rho_{12}}{1-\rho_{12}^2}(1-\rho_{12})^2+\left(1+\frac{\rho_{23}-\rho_{13}\rho_{12}}{1-\rho_{12}^2}\right)\times$$

$$\left.\left.\times\frac{\rho_{24}-\rho_{14}\rho_{12}}{1-\rho_{12}^2}(1-\rho_{12})^2+c\left(1-\frac{\rho_{13}+\rho_{23}}{1+\rho_{12}}\right)^2\right]D\right\}m.$$

Четвертый смешанный начальный момент

$$m_{1234}=\int\limits_{X_н}^{X_в}\int\limits_{X_н(X_1)}^{X_в(X_1)}\int\limits_{X_н(X_1;X_2)}^{X_в(X_1;X_2)}\int\limits_{X_н(X_1;X_2;X_3)}^{X_в(X_1;X_2;X_3)}X_1X_2X_3X_4\times$$

$$\times w_4[X_1;X_2;X_3;X_4]dX_1dX_2dX_3dX_4=$$

$$=(1+4\rho_{12}\rho_{13}\rho_{14})m^4+\{\rho_{12}+\rho_{13}+\rho_{14}+$$

$$+\rho_{12}\rho_{13}+\rho_{12}\rho_{14}+\rho_{13}\rho_{14}+24\rho_{12}\rho_{13}\rho_{14}+$$

$$+\left[\frac{\rho_{23}-\rho_{13}\rho_{12}}{1-\rho_{12}^2}+\left(1+\frac{\rho_{23}-\rho_{13}\rho_{12}}{1-\rho_{12}^2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\rho_{24}-\rho_{14}\rho_{12}}{1-\rho_{12}^2}\right](1-\rho_{12})^2+c\left(1-\frac{\rho_{13}+\rho_{23}}{1+\rho_{12}}\right)^2\Bigg\}m^2D+$$

$$+\left\{9\rho_{12}\rho_{13}\rho_{14}+\left[\rho_{14}\frac{\rho_{23}-\rho_{13}\rho_{12}}{1-\rho_{12}^2}+\right.\right.$$

$$\left.+\left(\rho_{13}+\rho_{12}\frac{\rho_{23}-\rho_{13}\rho_{12}}{1-\rho_{12}^2}\right)\frac{\rho_{24}-\rho_{14}\rho_{12}}{1-\rho_{12}^2}\right]\times$$

$$\left.\times(1-\rho_{12})^2+\rho_{12}c\left(1-\frac{\rho_{13}+\rho_{23}}{1+\rho_{12}}\right)^2\right\}D^2.$$

Дисперсия случайной величины $x(t_4)$ (ее центральный момент второго порядка) равна

$$D_4=\int\limits_{X_н}^{X_в}\int\limits_{X_н(X_1)}^{X_в(X_1)}\int\limits_{X_н(X_1;X_2)}^{X_в(X_1;X_2)}\int\limits_{X_н(X_1;X_2;X_3)}^{X_в(X_1;X_2;X_3)}(X_4-m_4)^2\times$$

$$\times w_4[X_1;X_2;X_3;X_4]dX_1dX_2dX_3dX_4=$$

$$=\left\{\rho_{14}^2+\left(\frac{\rho_{24}-\rho_{14}\rho_{12}}{1-\rho_{12}^2}\right)^2(1-\rho_{12})^2+\right.$$

$$+c^2\left(1-\frac{\rho_{13}+\rho_{23}}{1+\rho_{12}}\right)^2+$$

$$\left.+\left[1-\frac{\rho_{14}+\rho_{24}}{1+\rho_{12}}-c\left(1-\frac{\rho_{13}+\rho_{23}}{1+\rho_{12}}\right)\right]^2\right\}D.$$

Корреляционные функции (вторые смешанные центральные моменты) имеют вид:

$$M_{14}=$$

$$=\int\limits_{X_н}^{X_в}\int\limits_{X_н(X_1)}^{X_в(X_1)}\int\limits_{X_н(X_1;X_2)}^{X_в(X_1;X_2)}\int\limits_{X_н(X_1;X_2;X_3)}^{X_в(X_1;X_2;X_3)}(X_1-m_1)(X_4-m_4)\times$$

$$\times w_4[X_1;X_2;X_3;X_4]dX_1dX_2dX_3dX_4=$$

$$=\rho_{14}D=R_{14};$$

$$M_{24}=$$

$$=\int\limits_{X_н}^{X_в}\int\limits_{X_н(X_1)}^{X_в(X_1)}\int\limits_{X_н(X_1;X_2)}^{X_в(X_1;X_2)}\int\limits_{X_н(X_1;X_2;X_3)}^{X_в(X_1;X_2;X_3)}(X_2-m_2)(X_4-m_4)\times$$

$$\times w_4[X_1;X_2;X_3;X_4]dX_1dX_2dX_3dX_4=$$

$$=\left[\rho_{12}\rho_{14}+\frac{\rho_{24}-\rho_{14}\rho_{12}}{1-\rho_{12}^2}(1-\rho_{12})^2\right]D=R_{24};$$

$$M_{34}=$$

$$=\int\limits_{X_н}^{X_в}\int\limits_{X_н(X_1)}^{X_в(X_1)}\int\limits_{X_н(X_1;X_2)}^{X_в(X_1;X_2)}\int\limits_{X_н(X_1;X_2;X_3)}^{X_в(X_1;X_2;X_3)}(X_3-m_3)(X_4-m_4)\times$$

$$\times w_4[X_1;X_2;X_3;X_4]dX_1dX_2dX_3dX_4=$$

$$=\left[\rho_{13}\rho_{14}+\frac{\rho_{23}-\rho_{13}\rho_{12}}{1-\rho_{12}^2}\frac{\rho_{24}-\rho_{14}\rho_{12}}{1-\rho_{12}^2}\times\right.$$

$$\left.\times(1-\rho_{12})^2+c\left(1-\frac{\rho_{13}+\rho_{23}}{1+\rho_{12}}\right)^2\right]D=R_{34}.$$

Третьи смешанные центральные моменты, как и полагается для симметричных распределений,

$$M_{124}=M_{134}=M_{234}=0.$$

Четвертый центральный момент

$$M_{1234}=$$

$$=\int\limits_{X_н}^{X_в}\int\limits_{X_н(X_1)}^{X_в(X_1)}\int\limits_{X_н(X_1;X_2)}^{X_в(X_1;X_2)}\int\limits_{X_н(X_1;X_2;X_3)}^{X_в(X_1;X_2;X_3)}(X_1-m_1)\times$$

$$\times(X_2-m_2)(X_3-m_3)(X_4-m_4)\times$$

$$\times w_4[X_1;X_2;X_3;X_4]dX_1dX_2dX_3dX=$$

$$=\left\{9\rho_{12}\rho_{13}\rho_{14}+\left[\rho_{14}\frac{\rho_{23}-\rho_{13}\rho_{12}}{1-\rho_{12}^2}+\right.\right.$$

$$\left.+\left(\rho_{13}+\rho_{12}\frac{\rho_{23}-\rho_{13}\rho_{12}}{1-\rho_{12}^2}\right)\frac{\rho_{24}-\rho_{14}\rho_{12}}{1-\rho_{12}^2}\right]\times$$

$$\times\left(1-\rho_{12}\right)^2+\rho_{12}c\left(1-\frac{\rho_{13}+\rho_{23}}{1+\rho_{12}}\right)^2\Bigg\}D^2.$$

5. МАРКОВСКОЕ СВОЙСТВО [2]

Это свойство ограниченного последействия описывается уравнениями:

$$w_3\left[X_3|X_1;X_2\right]=w_2\left[X_3|X_2\right],$$
$$w_4\left[X_4|X_1;X_2;X_3\right]=w_2\left[X_4|X_3\right].$$

Тогда:

$$w_3\left[X_1;X_2;X_3\right]=w_2\left[X_1;X_2\right]w_2\left[X_3|X_2\right]=$$
$$=w_1\left[X_1\right]w_2\left[X_2|X_1\right]w_2\left[X_3|X_2\right]=$$
$$=\begin{cases}1\Big/\{(X_\text{в}-X_\text{н})\left[X_\text{в}(X_1)-X_\text{н}(X_1)\right]\times\\ \qquad\times\left[X_\text{в}(X_2)-X_\text{н}(X_2)\right]\},\\ X_\text{н}\le X_1\le X_\text{в};\ X_\text{н}(X_1)\le X_2\le X_\text{в}(X_1);\\ \qquad X_\text{н}(X_2)\le X_3\le X_\text{в}(X_2);\\ 0,\text{ в остальных случаях;}\end{cases}$$

$$w_4\left[X_1;X_2;X_3;X_4\right]=$$
$$=w_3\left[X_1;X_2;X_3\right]w_2\left[X_4|X_3\right]=$$
$$=w_1\left[X_1\right]w_2\left[X_2|X_1\right]w_2\left[X_3|X_2\right]w_2\left[X_4|X_3\right]=$$
$$=\begin{cases}1\Big/\{(X_\text{в}-X_\text{н})\left[X_\text{в}(X_1)-X_\text{н}(X_1)\right]\times\\ \quad\times\left[X_\text{в}(X_2)-X_н(X_2)\right]\left[X_\text{в}(X_3)-X_\text{н}(X_3)\right]\},\\ X_\text{н}\le X_1\le X_\text{в},\ X_\text{н}(X_1)\le X_2\le X_\text{в}(X_1),\\ \qquad X_\text{н}(X_2)\le X_3\le X_\text{в}(X_2),\\ \qquad X_\text{н}(X_3)\le X_4\le X_\text{в}(X_3);\\ 0,\text{ в остальных случаях,}\end{cases}$$

где $X_\text{н}(X_2)=X_\text{н}+(X_2-X_\text{н})\rho_{23}$;

$X_\text{в}(X_2)=X_\text{в}-(X_\text{в}-X_2)\rho_{23}$;

$X_\text{н}(X_3)=X_\text{н}+(X_3-X_н)\rho_{34}$,

$X_\text{в}(X_3)=X_\text{в}-(X_\text{в}-X_3)\rho_{34}$.

Согласно пп.1–4, математическое ожидание

$$m_1=m_2=m_3=m_4=m$$

и ковариационные функции:

$$m_{12}=m^2+\rho_{12}D;$$
$$m_{13}=m^2+\rho_{12}\rho_{23}D;$$
$$m_{14}=m_x^2+\rho_{12}\rho_{23}\rho_{34}D;$$
$$m_{23}=m^2+\rho_{23}\left[\rho_{12}^2+(1-\rho_{12})^2\right]D;$$
$$m_{24}=m^2+\rho_{23}\rho_{34}\left[\rho_{12}^2+(1-\rho_{12})^2\right]D;$$
$$m_{34}=m^2+$$
$$+\rho_{34}\left[\rho_{12}^2\rho_{23}^2+\rho_{23}^2(1-\rho_{12})^2+(1-\rho_{23})^2\right]D.$$

Третьи и четвертые смешанные начальные моменты:

$$m_{123}=\left\{m^2+\left[\rho_{12}(1+\rho_{23})+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\rho_{23}\left(\rho_{12}^2+(1-\rho_{12})^2\right)\right]D\right\}m;$$
$$m_{124}=\left\{m^2+\left[\rho_{12}(1+\rho_{23}\rho_{34})+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\rho_{23}\rho_{34}\left(\rho_{12}^2+(1-\rho_{12})^2\right)\right]D\right\}m;$$
$$m_{134}=\left\{m^2+\left[\rho_{12}\rho_{23}(1+\rho_{34})+\rho_{23}^2\rho_{34}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\rho_{12}^2+(1-\rho_{12})^2\right)+\rho_{34}(1-\rho_{23})^2\right]D\right\}m;$$
$$m_{234}=\left\{m^2+\left[\rho_{23}(1+\rho_{34}(1+\rho_{23}))\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\rho_{12}^2+(1-\rho_{12})^2\right)+\rho_{34}(1-\rho_{23})^2\right]D\right\}m;$$
$$m_{1234}=\left(1+4\rho_{12}^3\rho_{23}^2\rho_{34}\right)m^4+$$
$$+\left\{\rho_{12}\left[1+\rho_{23}(1+\rho_{34})\right]+24\rho_{12}^3\rho_{23}^2\rho_{34}+\right.$$
$$+\rho_{23}\left[1+\rho_{34}(1+\rho_{23})\right]\left[\rho_{12}^2+(1-\rho_{12})^2\right]+$$
$$\left.+\rho_{34}(1-\rho_{23})^2\right\}m^2D+$$
$$+\rho_{12}\rho_{34}\left[9\rho_{12}^2\rho_{23}^2+3\rho_{23}^2(1-\rho_{12})^2+\right.$$
$$\left.+(1-\rho_{23})^2\right]D^2.$$

Дисперсии:

$$D_1=D;\quad D_2=\left[\rho_{12}^2+(1-\rho_{12})^2\right]D;$$
$$D_3=\left[\rho_{12}^2\rho_{23}^2+\rho_{23}^2(1-\rho_{12})^2+(1-\rho_{23})^2\right]D;$$
$$D_4=\left[\rho_{12}^2\rho_{23}^2\rho_{34}^2+\rho_{23}^2\rho_{34}^2(1-\rho_{12})^2+\right.$$
$$\left.+\rho_{34}^2(1-\rho_{23})^2+(1-\rho_{34})^2\right]D.$$

Корреляционные функции:

$$M_{12}=\rho_{12}D;\quad M_{13}=\rho_{12}\rho_{23}D;$$
$$M_{14}=\rho_{12}\rho_{23}\rho_{34}D;$$
$$M_{23}=\rho_{23}\left[\rho_{12}^2+(1-\rho_{12})^2\right]D;$$
$$M_{24}=\rho_{23}\rho_{34}\left[\rho_{12}^2+(1-\rho_{12})^2\right]D;$$
$$M_{34}=\rho_{34}\left[\rho_{12}^2\rho_{23}^2+\rho_{23}^2(1-\rho_{12})^2+(1-\rho_{23})^2\right]D.$$

Третьи смешанные центральные моменты

$$M_{123}=M_{124}=M_{134}=M_{234}=0\,.$$

Четвертый центральный момент

$$M_{1234}=\rho_{12}\rho_{34}\left[9\rho_{12}^2\rho_{23}^2+3\rho_{23}^2(1-\rho_{12})^2+\right.$$
$$\left.+(1-\rho_{23})^2\right]D^2.$$

Таким образом, в предлагаемом случайном процессе с равномерной плотностью распределения вероятности высшие моментные характеристики выражаются через моментные характеристики первого и второго порядков. Это существенно упрощает измерение его характеристик, идентификацию и делает удобным для описания большого количества реальных сигналов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Заико А. И.** Свид. 72200700005. Случайный процесс Заико А.И. с равномерным законом распределения. Математическая модель. Зарег. ФГУП «ВНТИЦ» 28.02.07 г. Описание. 10 с.

2. **Заико А. И.** Случайный процесс Заико с равномерным законом распределения // Вестник УГАТУ. 2008. № 1(28). С. 188–193.

3. **Заико А. И.** Случайный сигнал с равномерным законом распределения // Измерительная техника. 1999. № 1. С. 9–11.

4. **Заико А. И.** Случайные процессы. Модели и измерения: учеб. пособие. М.: МАИ, 2006. 207 с.

ОБ АВТОРЕ

Заико Александр Иванович, проф. каф. теоретич. основ электротехн. Дипл. инж. электрон. тех-ки (УАИ, 1970). Д-р техн. наук по информац.-измерит. системам (ЛЭТИ, 1990). Заслуж. изобретатель РБ и РФ. Член-кор. Междунар. инж. акад. Иссл. в обл. метрологич. обесп., анализа и синтеза информац.-измерит. систем.