Уфа : УГАТУ, 2009 *Вестник УГАТУ • Управление, ВТ и И* Т. 13, № 2 (35). С. 11–17

УДК 519.7

А. З. АСАНОВ, Д. Н. ДЕМЬЯНОВ

ВОПРОСЫ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ ВЫХОДНОЙ МАТРИЦЫ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ СПЕКТРА ПЕРЕДАТОЧНЫХ НУЛЕЙ МНОГОСВЯЗНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассматривается множество матриц – решений задачи обеспечения заданной совокупности передаточных нулей. Анализируется вопрос о выборе единственного решения из имеющегося множества. Предлагаются различные критерии выбора и способы их реализации. *Передаточный нуль*; *выходная матрица*; *синтез*; *структурные ограничения*

ВВЕДЕНИЕ

Учет структурных особенностей динамического объекта является необходимым условием в процессе синтеза качественной системы управления [1].

Одним из важных параметров, характеризующих структуру многосвязного объекта, является множество его системных нулей [2]. Необходимым и достаточным условием существования системного нуля является потеря ранга так называемой матрицы Розенброка динамической системы на некоторой частоте. Множество системных нулей состоит из множества передаточных нулей, которые характеризуют взаимовлияние различных каналов передачи сигнала, и развязанных нулей, характеризующих неуправляемые и ненаблюдаемые подсистемы. Задача обеспечения совокупности развязанных нулей на практике возникает крайне редко, поэтому далее здесь не рассматривается.

Передаточным нулем принято называть комплексное число p_i^z, при котором уменьшается ранг передаточной матрицы этой системы. Показано, что в некоторых случаях от значения передаточных нулей зависит принципиальная разрешимость некоторых задач управления и идентификации [3]. Поэтому при решении задач синтеза следует, как минимум, исследовать нули многосвязного динамического объекта, а как максимум – расположить их требуемым образом. Как известно, нули системы инвариантны относительно невырожденного преобразования переменных состояния, входов и выходов, действия статической обратной связи по состоянию и выходу. Даже введение динамической обратной связи приводит лишь к добавлению новых нулей к уже имеющимся. Изменить положение системных нулей можно только соответствующим выбором матрицы выхода и/или входа. Впервые возможность управления нулями путем выбора матрицы выхода сформулирована и обоснована в [2]. В этом случае при решении различных задач управления, идентификации, адаптации можно избежать трудностей, связанных с наличием нежелательных нулей, если на начальной стадии проектирования, когда существует некоторая свобода в выборе структуры выхода, задать нули синтезируемой системы желаемым образом.

Был предложен ряд способов формирования матрицы выхода, опирающихся на итеративные процедуры либо на вычисление собственных чисел специальных матриц и канонических форм [2, 4]. Но все они имеют весьма сложный и трудоемкий характер.

В работе [5] был предложен альтернативный подход к решению задачи управления спектром системных нулей. Показано, что на основе свойств матриц с дефектом ранга возможно построение дополнительных матричных конструкций, позволяющих синтезировать выходную матрицу системы с заданным расположением передаточных нулей. При этом использование аппарата канонизации матриц [6, 7] позволяет получить расчетные формулы и сформировать не одно решение, а множество. Однако остается открытым вопрос выбора из сформированного множества решений одного конкретного значения матрицы выхода.

Контактная информация: public.mail@ksu.ru
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-08-00536)

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача обеспечения заданной совокупности передаточных нулей многосвязной динамической системы может быть сформулирована следующим образом. Пусть рассматривается система, описываемая в пространстве состояний уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $u \in R^s$, $y \in R^m$ – векторы состояния, управления и выхода, A, B, C – числовые матрицы соответствующих размеров.

Предполагается, что $m = s$, $s < n$, пара (AB) управляема. Требуется построить матрицу $C_{m,n}$ полного ранга такую, чтобы $\mu = n - s$ различных наперед заданных чисел p_i^z являлись нулями заданной системы. При этом полученная система должна быть наблюдаема, а матрица $B_{n,s}$ – полного столбцового ранга. Числа p_i^z должны быть действительные, не кратные, ни одно из этих чисел не должно совпадать с собственными числами матрицы A – в этом случае выполняется условие наблюдаемости [2].

Алгоритм синтеза выходной матрицы, изложенный в [5], формулируется следующим образом.

1) Найдем μ матриц $F_i = F_x^u(p_i^z) = (p_i^z I_n - A)^{-1}B$, $i = \overline{1,\mu}$.

2) Сгруппируем матрицы F_i в блочные матрицы $F_k^* = \begin{bmatrix} F_l & \dots & F_t \end{bmatrix}$ по следующему субалгоритму:

2.1. Выбирается F_l – еще не сгруппированная матрица с наименьшим индексом. Так как она имеет размер $n \times s$, то у нее всегда будет существовать левый делитель нуля. Обозначим $F_i^* = F_l$.

2.2. Формируется блочная матрица $[F_l\ F_{l+1}]$. Проверяется наличие левого делителя нуля полученной блочной матрицы. Если он существует, то обозначим $F_i^* = \begin{bmatrix} F_l & F_{l+1} \end{bmatrix}$.

2.3. Формируется блочная матрица $[F_l\ F_{l+1}\ F_{l+2}]$. Проверяется наличие левого делителя нуля полученной блочной матрицы. Если он существует, то обозначим $F_i^* = \begin{bmatrix} F_l & F_{l+1} & F_{l+2} \end{bmatrix}$.

2.4. Так продолжается до тех пор, пока не получится блок $F_i^* = \begin{bmatrix} F_l & \dots & F_t \end{bmatrix}$, имеющий левый делитель нуля, присоединение к которому следующей матрицы F_{t+1}^* приведет к созданию блочной матрицы, не имеющей левого делителя нуля.

3) Найдем k левых делителей нуля $\overline{F_k^*}^L$ полученных блочных матриц F_k^*.

4) Найдем k строк выходной матрицы системы $C_j^* = V_j \overline{F_j^*}^L$, $j = \overline{1,k}$, где V_j – произвольная и не равная тождественно нулю векторстрока. Используя основные свойства делителей нуля, можно показать, что число таких строк всегда будет $k \leq s$.

5) Из полученных строк сформируем первые k строк матрицы C^*. Остальные $s - k$ строк выберем произвольно при условии, что они линейно-независимы от предыдущих. Кроме того, должно выполняться условие наличия в системе ровно $\mu = n - s$ передаточных нулей. Это значит, что $\det(C^*B) \neq 0$.

6) Искомая матрица выхода определяется следующим образом: $C = \mu C^*$, где μ – произвольная матрица полного ранга соответствующего размера.

Простой анализ показывает, что полученная формула определяет множество матриц, каждая из которых является решением поставленной задачи синтеза. Выбор конкретных значений параметров связан с заданием дополнительных ограничений на один или несколько компонентов выходной матрицы. Требуется формализовать различные типы ограничений и указать способы выделения из множества решений тех значений, которые им удовлетворяют.

2. ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ

Как правило, задача изменения спектра передаточных нулей ставится для объекта, у которого уже определены матрицы A, B, C, однако, имеющиеся у него неминимально-фазовые нули не позволяют решать задачу синтеза качественной системы управления. Очевидно, что полная перестройка выходной матрицы сопряжена с необходимостью серьезных модификаций объекта управления, что в большинстве случаев недопустимо. Таким образом, можно утверждать, что имеется некоторый эталон – матрица C_{st}, к которой синтезируемая матрица должна быть максимально близкка. Можно выделить два основных типа критериев близости.

В первом случае обеспечивается равенство максимального числа элементов матрицы C_{st} и синтезированной матрицы C. С физической точки зрения это можно интерпретировать как разделение всех коэффициентов выходной матрицы на значимые, которые должны иметь строго оговоренные значения, и незначимые, которые могут меняться в широких пределах для обеспечения требуемых структурных особенностей. Во втором случае предполагается, что все элементы выходной матрицы могут быть изменены. Однако такое отклонение от эталона должно быть минимальным. С физической точки зрения это означает, что все коэффициенты могут варьироваться, но в достаточно узких пределах.

Необходимо отметить также достаточно принципиальный момент – часто структура решения зависит от выбираемого спектра передаточных нулей. Если требования к спектру передаточных нулей заданы не жестко, то имеет смысл организовать процедуру синтеза в виде итерационного процесса. В этом случае на каждой итерации сначала решается задача синтеза и определяется структура множества решений, а затем по определенному критерию выбирается значение, близкое к исходной матрице выхода. Если полученная матрица недостаточно близка к эталону, то спектр желаемых передаточных нулей изменяется и процедуру повторяют. Такой процесс является достаточно трудоемким, однако он может дать существенные результаты в силу нелинейности задачи.

3. ВЫБОР ВЫХОДНОЙ МАТРИЦЫ С ЗАДАНИЕМ НЕИЗМЕНЯЕМОЙ ЧАСТИ

Наиболее частым и существенным ограничением при выборе выходной матрицы является обнуление некоторых ее столбцов. С физической точки зрения это означает, что некоторая переменная или несколько переменных не участвуют непосредственно в формировании выходного сигнала. При задании спектра передаточных нулей с помощью приведенного выше алгоритма множество решений имеет вид:

$$C = \eta \begin{bmatrix} V_1 \overline{F_1^*}^L \\ \dots \\ V_s \overline{F_s^*}^L \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Обеспечить обнуление столбца матрицы C гарантированно можно лишь в том случае, когда $\overline{F_j^*}^L$ являются матрицами, а V_j – векторами. В этом случае коэффициенты векторов V_j определяются из условия $V_j \overline{F_{ji}^*}^L = 0$, где $\overline{F_{ji}^*}^L$ – столбец с номером i матрицы $\overline{F_j^*}^L$.

Если все матрицы $\overline{F_j^*}^L$ имеют более t строк, то можно обеспечить равенство нулю не более t столбцов матрицы C.

Другим существенным ограничением может являться требование обеспечить заданные ненулевые значения некоторых столбцов выходной матрицы. Пусть эталонная матрица C_{st} имеет вид:

$$C_{\text{st}} = \left[C_{s,s}^{\text{ref}} \quad \widehat{C}_{s,n-s} \right],$$

где $C_{s,s}^{\text{ref}}$ – невырожденная матрица (к такому виду можно свести любую задачу соответствующей нумерацией переменных состояния).

Требуется построить матрицу выхода в виде:

$$C = \left[C_{s,s}^{\text{ref}} \quad H_{s,n-s} \right].$$

Обеспечить решение поставленной задачи можно заданием векторов V_j таких, что матрица C^* из п. 6 алгоритма синтеза имела линейно-независимые первые s столбцов, которые бы составляли невырожденную матрицу C_1^*. Тогда матрицу η можно найти из уравнения:

$$C_{s,s}^{\text{ref}} = \eta C_1^*.$$

Откуда $\eta = C_{s,s}^{\text{ref}} (C_1^*)^{-1}$.

Таким способом можно не только обнулить некоторые столбцы выходной матрицы, но и обеспечить строгое равенство элементов некоторых s столбцов заданному эталону.

Еще одним из вариантов решения задачи может являться задание спектра передаточных нулей путем изменения лишь одной строки $h_{1,n}$ выходной матрицы системы (1). При этом остальная часть матрицы выхода $C_{s-1,n}^*$ выбирается равной соответствующей части матрицы – эталона C_{st}. При этом должны выполняться следующие ограничения:

1) матрица выхода системы должна иметь полный ранг. Следовательно, C^* должна также иметь полный ранг;

2) система должна иметь ровно $\mu = n - s$ передаточных нулей, что означает полный ранг матрицы CB. Это означает, что система, задаваемая уравнениями вида (1) с матрицами A, B, C^* не должна иметь передаточных нулей. Исходя из структуры матрицы выхода,

$$CB = \begin{bmatrix} C^* \\ h \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} C^* B \\ hB \end{bmatrix}.$$

Значит, требуется также полный ранг матрицы C^*B. Запишем выражение для МПФ системы на нулевой частоте:

$$W = C(p_i I - A)^{-1} B = \begin{bmatrix} C^*(p_i I - A)^{-1} B \\ h(p_i I - A)^{-1} B \end{bmatrix}.$$

На нулевой частоте МПФ теряет ранг. Это означает, что существует линейная комбинация строк МПФ, равная нулю:

$$kh(p_i I - A)^{-1}B + \eta^* C^*(p_i I - A)^{-1}B = 0\,,$$

где k – число, а η^* – вектор-строка. При этом $k \neq 0$, так как в противном случае нарушается второе из ограничений (p_i является передаточным нулем системы вида (1) с матрицами A, B, C^*).

Выразим неизвестный вектор-строку:

$$h(p_i I - A)^{-1}B = \eta C^*(p_i I - A)^{-1}B\,.$$

Используя методы решения линейных матричных уравнений, получим:

$$h = \eta C^* + \lambda \overline{B}^L(p_i I - A)\,. \qquad (3)$$

Полученная формула будет являться ключевой в решении поставленной задачи. Однако, в зависимости от количества нулей в системе, решение будет несколько видоизменяться.

В случае, когда система имеет лишь один передаточный нуль, можно считать, что расчетная формула (3) получена. Единственным ограничением будет то, что $\lambda \neq 0$ (в противном случае, в итоговой матрице появится линейная зависимость строк). Теперь допустим, что в системе имеется $\mu = n - s$ передаточных нулей. В этом случае получим систему уравнений:

$$\begin{cases} h = \eta_1 C^* + \lambda_1 \overline{B}^L(p_1 I - A), \\ h = \eta_2 C^* + \lambda_2 \overline{B}^L(p_2 I - A), \\ \ldots \\ h = \eta_\mu C^* + \lambda_\mu \overline{B}^L(p_\mu I - A). \end{cases}$$

Приравняем к правой части первого уравнения последовательно правые части всех остальных уравнений:

$$\begin{cases} \eta_1 C^* + \lambda_1 \overline{B}^L(p_1 I - A) = \eta_2 C^* + \lambda_2 \overline{B}^L(p_2 I - A), \\ \eta_1 C^* + \lambda_1 \overline{B}^L(p_1 I - A) = \eta_3 C^* + \lambda_3 \overline{B}^L(p_3 I - A), \\ \ldots \\ \eta_1 C^* + \lambda_1 \overline{B}^L(p_1 I - A) = \eta_\mu C^* + \lambda_\mu \overline{B}^L(p_\mu I - A). \end{cases}$$

Эта система будет эквивалентна системе:

$$\begin{cases} \lambda_1 \overline{B}^L(p_1 I - A) - \lambda_2 \overline{B}^L(p_2 I - A) + (\eta_1 - \eta_2)C^* = 0, \\ \lambda_1 \overline{B}^L(p_1 I - A) - \lambda_3 \overline{B}^L(p_3 I - A) + (\eta_1 - \eta_3)C^* = 0, \\ \ldots \\ \lambda_1 \overline{B}^L(p_1 I - A) - \lambda_\mu \overline{B}^L(p_\mu I - A) + (\eta_1 - \eta_\mu)C^* = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Введем вспомогательную блочную матрицу

$$F^* = \begin{bmatrix} \overline{B}^L(p_1 I - A) & \overline{B}^L(p_1 I - A) & \ldots & \overline{B}^L(p_1 I - A) \\ \overline{B}^L(p_2 I - A) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \overline{B}^L(p_3 I - A) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \overline{B}^L(p_\mu I - A) \\ C^* & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & C^* & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & C^* \end{bmatrix}. \qquad (5)$$

Тогда система (4) может быть записана в виде одного уравнения:

$$\left[\lambda_1 \quad -\lambda_2 \quad -\lambda_3 \quad \ldots \quad -\lambda_\mu \quad (\eta_1 - \eta_2) \quad (\eta_1 - \eta_2) \quad \ldots \quad (\eta_1 - \eta_\mu)\right] F^* = 0. \qquad (6)$$

Откуда

$$\left[\lambda_1 \quad -\lambda_2 \quad -\lambda_3 \quad \ldots \quad -\lambda_\mu \quad (\eta_1 - \eta_2) \quad (\eta_1 - \eta_2) \quad \ldots \quad (\eta_1 - \eta_\mu)\right] = \rho \overline{F^*}^L. \qquad (7)$$

Рассмотрим вспомогательную матрицу F^*. Число строк этой матрицы определяется выражением:

$$l = (n - s)\mu + (s - 1)(\mu - 1) = n^2 - ns - n + 1\,.$$

Число столбцов матрицы F^* определяется выражением:

$$k = n(\mu - 1) = n^2 - ns - n\,.$$

Таким образом, число строк матрицы F^* всегда больше числа ее столбцов на 1. Это значит, что левый делитель нуля такой матрицы всегда существует и задача разрешима. В случае, когда $\overline{F^*}^L$ – вектор-строка, ρ является числом, которое не должно быть равно нулю. Если $\overline{F^*}^L$ – матрица, то ρ является вектор-строкой, которая должна выбираться из условия $\lambda_i \neq 0$.

Величина ρ может быть использована при нормировке коэффициентов строки h. После подстановки значения ρ в решение вспомогательного уравнения (7), можно получить конкретные числовые значения λ_i и систему линейных уравнений для η_i. Откуда можно легко определить вектор-строку h из равенства (3).

Необходимо отметить, что при решении вспомогательного уравнения (6) для коэффициентов η_i получается система из $\mu - 1$ уравнений с μ неизвестными. Значит, одна из переменных может быть задана произвольным образом. Это также расширяет множество решений и позволяет получать выходную матрицу, близкую к C_{st}. Можно комбинировать предложенный алгоритм с теми, что были представлены выше, и помимо первых $s - 1$ строк выходной матрицы задавать некоторые элементы строки h.

4. ВЫБОР ВЫХОДНОЙ МАТРИЦЫ ПО КРИТЕРИЮ НАИМЕНЬШЕГО ОТКЛОНЕНИЯ

В случае, когда изменению могут быть доступны все коэффициенты выходной матрицы, критерий близости может быть сформулирован следующим образом:

$$f = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{n} (c_{ij}^* - c_{ij})^2 \to \min, \qquad (8)$$

где c_{ij}^* – элементы матрицы C_{st}, c_{ij} – элементы символьной матрицы C, которая является результатом работы приведенного в разделе 1 алгоритма и определяется выражением (2). Решение задачи заключается в отыскании значений коэффициентов матриц η, V_1, $V_2,\ldots,V_s$, минимизирующих критерий (8). В случае, когда различные коэффициенты выходной матрицы могут меняться в разных пределах, можно использовать модифицированную целевую функцию:

$$f_m = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n} k_{ij}(c_{ij}^* - c_{ij})^2 \to \min. \qquad (9)$$

При этом коэффициентам k_{ij} придают различные значения в зависимости от возможных изменений соответствующих элементов выходной матрицы. Если элемент может колебаться лишь в небольших пределах, то ему назначают $k_{ij} > 1$, если же элемент может быть значительно изменен, то ему назначается $k_{ij} < 1$.

Полученная задача многомерной минимизации является в общем случае достаточно сложной и может быть решена только численными методами. Поэтому для упрощения задачи возможна комбинация метода минимизации отклонения и управления спектром передаточных нулей с помощью изменения строки. Тогда по формулам (3), (7) выражение для последней строки матрицы выхода примет вид:

$$h = \eta C^* + \rho \overline{F_n^*}^L \overline{B}^L (p_i I - A),$$

где $\overline{F_n^*}^L$ – первые n столбцов матрицы $\overline{F^*}^L$, η, ρ – произвольно задаваемые величины (но ρ ≠ ≠ 0). В этом случае целевая функция (8) запишется в виде:

$$f = \sum_{j=1}^{n}(h_j^* - h_j)^2 \to \min. \qquad (10)$$

При этом число переменных становится существенно меньше, объем и время расчетов также сокращается.

5. ПРИМЕР

Рассмотрим линейную модель силовой установки летательного аппарата [8], представленную в пространстве состояний матрицами

$$A = \begin{bmatrix} -0{,}320 & 0 & -1{,}360 & 0 \\ -0{,}018 & 0 & 0{,}225 & -1{,}160 \\ 0 & 0{,}470 & -1{,}930 & -1{,}850 \\ 0{,}030 & 0 & 0{,}385 & -0{,}109 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1{,}840 & 0{,}520 \\ 0{,}850 & -0{,}250 \\ 0 & 0 \\ -0{,}070 & -0{,}420 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1{,}000 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}800 & 0 & 0 & -1{,}000 \end{bmatrix}.$$

Анализ приведенной модели показывает, что объект является устойчивым – его полюса $\{-1{,}5596; -0{,}4076; -0{,}1959 \pm 0{,}1566j\}$.

Расчет передаточных нулей для данной модели показывает, что в системе присутствуют два нуля: $p_1^z = -2{,}0329$, $p_2^z = 0{,}1029$. Анализ показывает, что наличие таких нулей и полюсов приведет при входном сигнале $u(t) = [0{,}605 \quad 1]^T \exp(0{,}1029t)$ к обнулению («запиранию») обоих выходов. Кроме того, переходные характеристики анализируемого объекта будут иметь в начальный момент времени заброс в отрицательную сторону. Наличие вышеуказанных нулей, особенно неминимально-фазового нуля p_2^z, приведет к трудностям при синтезе системы управления.

Требуется найти такую выходную матрицу системы, чтобы нули системы были заданными минимально-фазовыми, например, чтобы $p_1^z =$ $= -5$ и $p_2^z = -7$. При этом полученная выходная матрица должна быть близка к исходной по некоторому критерию.

Решение. Используя инструментальные и программные средства [9], можно получить:

$$F_1 = (pI - A)^{-1}B\Big|_{p=-5} = \begin{bmatrix} -0{,}3832 & -0{,}0995 \\ -0{,}1697 & 0{,}0672 \\ 0{,}0344 & 0{,}0399 \\ 0{,}0140 & 0{,}0833 \end{bmatrix},$$

$$F_2 = (pI - A)^{-1}B\Big|_{p=-7} = \begin{bmatrix} -0{,}2724 & -0{,}0742 \\ -0{,}1209 & 0{,}0449 \\ 0{,}0150 & 0{,}0178 \\ 0{,}0105 & 0{,}0603 \end{bmatrix},$$

$$F_1^* = [F_1 \quad F_2] =$$

$$= \begin{bmatrix} -0{,}3832 & -0{,}0995 & -0{,}2724 & -0{,}0742 \\ -0{,}1697 & 0{,}0672 & -0{,}1209 & 0{,}0449 \\ 0{,}0344 & 0{,}0399 & 0{,}0150 & 0{,}0178 \\ 0{,}0140 & 0{,}0833 & 0{,}0105 & 0{,}0603 \end{bmatrix}.$$

Канонизация матрицы F_1^* показывает, что у нее левый матричный делитель нуля отсутствует. У матриц F_1 и F_2 они есть. Следовательно, получим:

$$\overline{F_1^*}^L = \overline{F_1}^L = \begin{bmatrix} 0{,}2132 & -0{,}2787 & 1{,}0000 & 0 \\ 0{,}3538 & -0{,}7166 & 0 & 1{,}0000 \end{bmatrix},$$

$$\overline{F_2^*}^L = \overline{F_2}^L = \begin{bmatrix} 0{,}1335 & -0{,}1763 & 1{,}0000 & 0 \\ 0{,}3657 & -0{,}7373 & 0 & 1{,}0000 \end{bmatrix}.$$

В общем случае решение задачи будет иметь вид:

$$C = \eta \begin{bmatrix} V_1 \overline{F_1^*}^L \\ V_2 \overline{F_2^*}^L \end{bmatrix},$$

где η – матрица полного ранга, V_1, V_2 – не равные тождественно нулю вектора.

Так как $\overline{F_1^*}^L$ и $\overline{F_2^*}^L$ содержат по две строки, то возможно обеспечить равенство нулю одного из столбцов выходной матрицы. Потребуем, чтобы первый и четвертый столбцы матрицы-решения совпадали со столбцами исходной матрицы, а третий столбец был нулевым. Очевидно, что для этого достаточно задать вектора $V_1 = [0\ V_{12}]$, $V_2 = [0\ V_{22}]$. Тогда матрица выхода будет иметь вид:

$$C = \eta \begin{bmatrix} V_{12} & 0 \\ 0 & V_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}3538 & -0{,}7166 & 0 & 1{,}0000 \\ 0{,}3657 & -0{,}7373 & 0 & 1{,}0000 \end{bmatrix}.$$

Обозначим

$$\eta^* = \eta \begin{bmatrix} V_{12} & 0 \\ 0 & V_{22} \end{bmatrix}$$

и найдем ее из условия:

$$\begin{bmatrix} 1{,}0000 & 0 \\ 0{,}8000 & -1{,}0000 \end{bmatrix} = \eta^* \begin{bmatrix} 0{,}3538 & 1{,}0000 \\ 0{,}3657 & 1{,}0000 \end{bmatrix}.$$

Откуда:

$$\eta^* = \begin{bmatrix} -83{,}4720 & 83{,}4720 \\ -97{,}3062 & 96{,}3062 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1{,}0000 & -1{,}7305 & 0 & 0 \\ 0{,}8000 & -1{,}2800 & 0 & -1{,}0000 \end{bmatrix}.$$

Можно убедиться, что эта выходная матрица обеспечивает требуемую пару передаточных нулей системы. При этом ее структура близка к исходной – третий столбец нулевой, а первый и четвертый столбцы совпадают.

Теперь потребуем, чтобы, например, первая строка матрицы выхода совпадала с исходной, а вторая задавалась. Поставленная задача разрешима, так как произведение C^*B имеет полный ранг. Составим вспомогательное уравнение (6) и найдем его решение:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^T \\ -\lambda_2^T \\ \eta_1 - \eta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1{,}9878 & 4{,}0820 & 0{,}3633 & -5{,}8380 \\ 0 & -0{,}4700 & -3{,}0700 & 1{,}8500 \\ -2{,}8182 & 5{,}7149 & 0{,}3633 & -7{,}8380 \\ 0 & -0{,}4700 & -5{,}0700 & 1{,}8500 \\ 1{,}0000 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Решив данное уравнение с применением программных средств [9], получим:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^T \\ -\lambda_2^T \\ \eta_1 - \eta_2 \end{bmatrix}^T = \rho [47{,}9643\ \ 21{,}5205\ \ -33{,}4766\ \ -11{,}9929\ \ 1].$$

Таким образом:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \rho[47{,}9643 \quad 21{,}5205], \\ -\lambda_2 = \rho[-33{,}4766 \quad -11{,}9929], \\ \eta_1 - \eta_2 = \rho. \end{cases}$$

Зададим ρ = 0,01 для нормировки, а η_1 = = 1,7534 для обеспечения равенства первого элемента второй строки исходной и синтезированной матрицы. Получим:

$$C = \begin{bmatrix} 1{,}0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}8000 & 1{,}8568 & -0{,}4864 & -2{,}4020 \end{bmatrix}.$$

Можно убедиться, что полученная выходная матрица также обеспечивает заданную совокупность передаточных нулей системы, при этом ее первая строка совпадает с первой строкой исходной матрицы.

Предположим теперь, что изменяться могут все коэффициенты матрицы выхода. Требуется построить такую матрицу выхода, сумма квадратов отклонений коэффициентов которой от исходной матрицы была бы минимальна. Используя найденное ранее общее решение задачи

$$C = \eta \begin{bmatrix} V_1 \begin{bmatrix} 0{,}2132 & -0{,}2787 & 1{,}0000 & 0 \\ 0{,}3538 & -0{,}7166 & 0 & 1{,}0000 \end{bmatrix} \\ V_2 \begin{bmatrix} 0{,}1335 & -0{,}1763 & 1{,}0000 & 0 \\ 0{,}3657 & -0{,}7373 & 0 & 1{,}0000 \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

сформируем целевую функцию (8) и минимизируем ее, используя симплекс-метод Нелдера-Мида (в среде MATLAB для этого была использована функция fminsearch).

В процессе численного решения задачи были получены следующие значения:

$$\eta = \begin{bmatrix} 4{,}2262 & -11{,}3629 \\ 18{,}3599 & -49{,}7105 \end{bmatrix},$$

$$V_1 = [2{,}3769 \quad 9{,}8772],$$

$$V_2 = [0{,}8789 \quad 3{,}6679].$$

При этом выходная матрица имеет коэффициенты:

$$C = \begin{bmatrix} 0{,}3323 & -0{,}2213 & 0{,}0584 & 0{,}0651 \\ 0{,}9379 & 0{,}0301 & -0{,}0511 & -0{,}9894 \end{bmatrix}.$$

Значение целевой функции f = 0,5250.

Можно убедиться, что и эта выходная матрица обеспечивает требуемую пару передаточных нулей системы. При этом сумма квадратов отклонений коэффициентов минимальна.

Если необходимо обеспечить точное значение одного из коэффициентов, например, C_{11}, то соответствующему слагаемому в целевой функции (9) присваиваем большой по модулю весовой коэффициент (порядка 10^3).

Осуществив процедуру минимизации, получим:

$$\begin{cases} \eta = \begin{bmatrix} 1{,}5246 & 7{,}3634 \\ 0{,}5864 & 2{,}3425 \end{bmatrix}, \\ V_1 = \begin{bmatrix} 2{,}3961 & -9{,}4694 \end{bmatrix}, \\ V_2 = \begin{bmatrix} -0{,}4248 & 2{,}1310 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

При этом выходная матрица имеет коэффициенты:

$$C = \begin{bmatrix} 0{,}9930 & -1{,}6907 & 0{,}5251 & 1{,}2543 \\ 0{,}0282 & 0{,}0821 & 0{,}4099 & -0{,}5607 \end{bmatrix}.$$

Значение целевой функции $f = 5{,}7197$.

Полученная матрица обеспечивает требуемую совокупность передаточных нулей, равенство первого элемента первой строки элементу исходной матрицы и минимизирует квадрат отклонения коэффициентов синтезированной матрицы от исходной. Применим процедуру минимизации к решению, полученному ранее, когда спектр передаточных нулей задавался изменением одной строки.

Общее решение в этом случае примет вид:

$$h = \rho\begin{bmatrix} -95{,}3423 & 185{,}6774 & -48{,}6402 & -240{,}2041 \end{bmatrix} + \\ + \eta_1\begin{bmatrix} 1{,}0000 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Применяя процедуру минимизации целевой функции (10), получим значения параметров $\rho = 0{,}0025$, $\eta_1 = 1{,}0423$. При этом выходная матрица имеет вид:

$$C = \begin{bmatrix} 1{,}0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}8000 & 0{,}4717 & -0{,}1236 & -0{,}6103 \end{bmatrix}.$$

Целевая функция имеет значение $f = 0{,}3897$.

Отметим, что по критерию суммы квадратов отклонений полученный результат является наилучшим из всех, полученных в ходе рассмотрения примера.

ВЫВОДЫ

При решении задачи обеспечения заданного расположения системных нулей возникает проблема неединственности решения. В настоящей статье изложены основные подходы к выбору из множества решений одного оптимального по какому-либо критерию. Сформулированы критерии близости синтезированной матрицы к некоторой исходной и показаны алгоритмы, позволяющие их обеспечить.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.

2. **Rosenbrock H. H.** State-space and multivariable theory. N.Y.: Wiley, 1970. 286 p.

3. **Смагина Е. М.** Нули линейных многомерных систем. Определения, классификация, применение (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1985. № 12. С. 5–33.

4. **Смагина Е. М.** Вычисление и задание нулей линейной многомерной системы // Автоматика и телемеханика. 1987. № 12. С. 165–173.

5. **Асанов А. З., Демьянов Д. Н.** Формирование заданного спектра передаточных нулей многосвязной динамической системы // Вестник УГАТУ. 2008. № 2. С. 25–34.

6. **Буков В. Н.** Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд. науч. лит-ры Н. Ф. Бочкаревой, 2006. 720 с.

7. **Асанов А. З.** Технология вложения систем и ее приложения: Учеб. пособие. Уфа: УГАТУ, 2007. 227 с.

8. Основы теории многосвязных систем автоматического управления летательными аппаратами / Под ред. М. Н. Красильщикова. М.: МАИ, 1995. 288 с.

9. **Асанов А. З., Ахметзянов И. З.** Канонизация матриц произвольного размера средствами Matlab // Тр. II Всероссийск. науч. конф. «Проектирование научных и инженерных приложений в среде Matlab». М.: ИПУ РАН, 2004. С. 798–804.

ОБ АВТОРАХ

Асанов Асхат Замилович, проф. каф. ПМиИ КГУ. Дипл. инж. по радиофизике и электронике (КГУ, 1972). Д-р техн наук по системн. анализу, управление и обработке информации (УГАТУ, 2004). Иссл. в обл. системн. анализа и теории управления.

Демьянов Дмитрий Николаевич, асс. той же каф. Дипл. инж. по автоматизации технол. процессов и производств (КамПИ, 2004). Иссл. в обл. теории автоматическ. управления.