ISSN 1992-6502 (Print)
2017. Т. 21, № 4 (78). С. 121–128
Вестник УГАТУ
ISSN 2225-2789 (Online)
http://journal.ugatu.ac.ru

УДК 519.216

Измерение плотности вероятности эргодического случайного процесса с линейной корреляционной функцией

А. И. Заико

zaiko@ugatu.ac.ru

ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

Поступила в редакцию 22.09.2016

Аннотация. Приведены алгоритмы и погрешности измерения плотности вероятности случайного процесса с равномерным законом распределения плотности вероятности и линейно убывающей корреляционной функцией при экстраполяции и интерполяции его реализации между отсчетами. Описан комплексный подход к определению погрешностей таких измерений, позволяющий одновременно учесть влияние квантования по уровню и дискретизации по времени, а также экстраполяции и интерполяции реализации процесса. Даны рекомендации по оптимизации таких измерений и повышению их эффективности.

Ключевые слова: эргодический случайный процесс; линейная корреляционная функция; алгоритмы измерения; экстраполяция и интерполяция.

ВВЕДЕНИЕ

Измеряемые сигналы представляют собой случайные процессы. Поэтому задача оптимизации измерительных процедур таких сигналов на сегодняшний день является весьма актуальной. Для эргодических случайных процессов известны методы измерения математического ожидания, дисперсии и корреляционной функции. Для получения оценки плотности вероятности эргодического случайного процесса используют метод относительного времени пребывания реализации сигнала выше заданного уровня и его цифровой аналог – метод дискретных выборок, результаты измерения которого графически представляются в виде гистограммы. При построении гистограммы по умолчанию считают, что в течение шага дискретизации сигнал не выходит за пределы одного кванта и переход сигнала из одного кванта в другой осуществляется в момент дискретизации. Это выполняется только при ступенчатой корреляционной функции и шаге дискретизации, равном интервалу корреляции [1]. Получаемые результаты не сопровождаются оценкой их погрешностей и не позволяют говорить об их достоверности. Научно обоснованные рекомендации по оптимизации таких измерений также отсутствуют.

В статье рассматривается процедура цифрового измерения одномерной плотности вероятности на примере оригинального случайного процесса с равномерным законом распределения и линейно убывающей корреляционной функцией при равномерных распределениях погрешности квантования по уровню и шагах дискретизации во времени [2, 3]. Характеристики погрешностей измерений плотностей вероятностей получены с применением комплексного подхода к определению погрешностей. Он позволяет избежать некорректного суммирования погрешностей дискретизации и квантования, а также погрешностей восстановления реализации процесса между отсчетами, и учесть их взаимное влияние друг на друга [4, 5].

При цифровых измерениях реализация $x(t)$ случайного процесса равномерно дискретизируются во времени с шагом T_0 и квантуется по уровню с шириной кванта $2\Delta_к$. Получаются дискретные отсчеты x_{il}, где i – номер отсчета, датируемого моментом времени t_i, а l – номер кванта, соответствующий уровню квантования x_l. Номера отсчетов принимают значения $i=-n,...,-1,0,1,...,n$, где $2n+1$ – количество отсчетов, а $2nT_0$ – длительность реализации. Количество уровней квантования обозначим через L, а номера уровней квантования $l=1,2,...,L$ [6].

Оценка $\langle w_1[X]\rangle_и$ одномерной плотности вероятности при *интерполяции* реализации процесса между отсчетами имеет вид [1, 6]

$$\langle w_1[X]\rangle_и = \frac{1}{2nT_0}\sum_{i=-n}^{n-1}\int_{0_i}^{T_0} w_1[X|\lambda; x_{-nk},..,x_{il},..,x_{nr}]d\lambda, \quad (1)$$

где $w_1[X|\lambda;\, x_{-nk},\, ..,x_{il},.., x_{nr}]$ – одномерная условная плотность вероятности процесса в момент времени $0\le\lambda\le T_0$ между соседними отсчетами после получения всех отсчетов $x_{-nk},\, ..,x_{il},.., x_{nr}$ реализации; $k,\ r=1,\ 2,\ ...,L$ – номера уровней квантования.

При *экстраполяции в будущее* реализация $x(t)$ восстанавливается на i интервале дискретизации по предшествующим отсчетам $x_{-nk},...,x_{il}$ и продляется еще на один $2n+1$ интервал $t_n\le t< t_n+T_0$. Тогда оценка $\langle w_1[X]\rangle_э$ одномерной плотности вероятности при экстраполяции

$$\langle w_1[X]\rangle_э = \frac{1}{(2n+1)T_0}\sum_{i=-n}^{n}\int_{0_i}^{T_0} w_1[X|\lambda;\, x_{-nk},\, ..., x_{il}]d\lambda. \quad (2)$$

В инженерной практике ограничиваются чаще всего одним i отсчетом при экстраполяции в будущее, а также двумя i и $i+1$ отсчетами при интерполяции. Тогда апостериорная условная плотность вероятности $w_1[X|\lambda;\, x_{-nk},\, ..., x_{il}]$ при экстраполяции приобретает вид $w_1[X|\lambda; x_{il}]$. Обозначим в выражении (2) *частость* появления отсчетов x_{il}, равных уровню квантования x_l и определяющих плотность распределения вероятности $w_1[X|\lambda; x_{il}]=w_1[X|\lambda; x_l]$, через $\langle P(x_l)\rangle = n_l/(2n+1)$, где n_l – количество отсчетов x_{il}, равных уровню квантования x_l и $\sum_{l=1}^{L}\langle P(x_l)\rangle=1$. Тогда оценка (2)

$$\langle w_1[X]\rangle_э = \frac{1}{T_0}\langle P(x_l)\rangle\int_0^{T_0} w_1[X|\lambda; x_l]d\lambda. \quad (3)$$

При интерполяции реализации $x(t)$ процесса восстановление происходит по двум смежным отсчетам $x_{il}, x_{(i+1)k}$ в выражении (1) одномерная условная плотность вероятности $w_1[X|\lambda;\, x_{-nk},\, ..,x_{il},.., x_{nr}] = w_1[X|\lambda;\, x_{il},\, x_{(i+1)k}]$, где $0\le\lambda\le T_0$; $l,k=1,2,...,L$.

Обозначим *частость* появления отсчетов, следующих друг за другом и соответствующих уровням квантования x_l и x_k, определяющих плотность вероятности $w_1[X|\lambda;\, x_l,\, x_k]$ через $\langle P(x_l,x_k)\rangle = n_{lk}/2n$, где n_{lk} – количество событий, заключающихся в появлении отсчетов, с уровнями квантования x_l и x_k, а $\sum_{l=1}^{L}\sum_{k=1}^{L}\langle P(x_l,x_k)\rangle=1$. Тогда выражение (1) примет вид

$$\langle w_1[X]\rangle_и = \frac{1}{T_0}\langle P(x_l,x_k)\rangle\int_0^{T_0} w_1[X|\lambda; x_l, x_k]d\lambda. \quad (4)$$

Из выражений (1)–(4) следует, что оценка одномерной плотности вероятности существенно зависит от одномерной условной плотности вероятности $w_1\left[X|\lambda; x_{-nk},..,x_{il},..,x_{nr}\right]$, которая определяется свойствами и характеристиками конкретной модели случайного процесса.

Рассмотрим случайный процесс Заико с равномерным законом распределения плотности вероятности $w_1[X]$ [2, 3]. Такая модель проста, требует минимума априорной информации и позволяет получить пригодные для инженерной практики результаты. Она описывается всего тремя параметрами: нижней $X_н$ и верхней $X_в$ границами изменения случайного процесса и нормированной корреляционной функцией $\rho(\tau)$, которую в нашем случае положим равной

$$\rho(\tau)=\begin{cases}1-|\tau|/\tau_0, & 0\le|\tau|\le\tau_0;\\ 0, & |\tau|\ge\tau_0,\end{cases}$$

где τ – временной сдвиг; τ_0 – интервал корреляции.

Для него плотность вероятности

$$w_1[X]=\begin{cases}(X_в-X_н)^{-1}=(2\Delta_к L)^{-1}, & X_н\le X\le X_в;\\ 0, \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

Погрешность квантования по уровню случайна, стационарна и независима для отсчетов и от процесса. Опишем ее для $l=1,2,\ldots,L$ равномерной плотностью вероятности отсчета x_l

$$w[X|x_l]=\begin{cases}(2\Delta_к)^{-1}, & x_l-\Delta_к\le X\le x_l+\Delta_к;\\ 0, \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

При экстраполяции в будущее реализацию $x(t)$ процесса восстанавливаем по предыдущему отсчету x_l. При равномерных распределениях случайного процесса и погрешности квантования условная плотность вероятности $w_1[X|\lambda;x_l]$, где $0\le\lambda<T_0$, также равномерна [1, 6]

$$w_1[X|\lambda;x_l]=\begin{cases}[X_в(\lambda;x_l)-X_н(\lambda;x_l)]^{-1}, & X_н(\lambda;x_l)\le X\le X_в(\lambda;x_l);\\ 0, \text{ в остальных случаях,}\end{cases} \tag{5}$$

где верхняя $X_в(\lambda;x_l)$ и нижняя $X_н(\lambda;x_l)$ границы динамического диапазона изменения случайного процесса при экстраполяции и $0\le\lambda<\tau_0$ [1, 6]:

$$X_в(\lambda;x_l)=x_l+\Delta_к+(X_в-x_l-\Delta_к)\lambda/\tau_0;$$
$$X_н(\lambda;x_l)=x_l-\Delta_к-(x_l-\Delta_к-X_н)\lambda/\tau_0.$$

Тогда выражение (5) примет вид

$$w_1[X|\lambda;x_l]=\frac{1}{2\Delta_к}\times\begin{cases}\left[1+(L-1)\dfrac{\lambda}{\tau_0}\right]^{-1}, & x_l-\Delta_к-(x_l-\Delta_к-X_н)\lambda/\tau_0\le X\le\\ & \le x_l+\Delta_к+(X_в-x_l-\Delta_к)\lambda/\tau_0,\ 0\le\lambda\le\tau_0;\\ L^{-1}, & X_н\le X\le X_в,\quad \tau_0\le\lambda\le T_0;\\ 0, \text{ в остальных случаях.}\end{cases} \tag{6}$$

В зависимости от соотношения шага дискретизации T_0 и интервала корреляции τ_0 возможны два варианта экстраполяции реализации случайного процесса и получения оценки $\langle w_1[X]\rangle_э$ одномерной плотности вероятности: $T_0\le\tau_0$ и $T_0\ge\tau_0$.

При $T_0\le\tau_0$ экстраполяция по последнему отсчету x_l осуществляется с шагом T_0, и интервал корреляции τ_0 накладывается на соседний шаг дискретизации. Поэтому оценка $\langle w_1[X]\rangle_э$ (3) для $l=1,2,\ldots,L$ примет вид

$$\langle w_1[X]\rangle_э=\frac{\tau_0}{2\Delta_к T_0}\frac{\langle P(x_l)\rangle}{L-1}\times$$
$$\times\begin{cases}\ln\dfrac{1+(L-1)T_0/\tau_0}{1+(L-1)\dfrac{x_l-\Delta_к-X}{x_l-\Delta_к-X_н}}, & x_l-\Delta_к-(x_l-\Delta_к-X_н)T_0/\tau_0\le X\le x_l-\Delta_к;\\ \ln[1+(L-1)T_0/\tau_0], & x_l-\Delta_к\le X\le x_l+\Delta_к;\\ \ln\dfrac{1+(L-1)T_0/\tau_0}{1+(L-1)\dfrac{X-x_l-\Delta_к}{X_в-x_l-\Delta_к}}, & x_l+\Delta_к\le X\le x_l+\Delta_к+(X_в-x_l-\Delta_к)T_0/\tau_0;\\ 0, \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

При $T_0\ge\tau_0$ экстраполяция по отсчету x_{il} осуществляется на интервале $0\le\lambda\le\tau_0$, и $w_1[X|\lambda;x_l]$ описывается выражением (6). При $\tau_0\le\lambda\le T_0$ зависимость от последнего отсчета x_{il} отсутствует и $w_1[X|\lambda;x_l]=w_1[X]$ (6) [6]. В результате при $T_0\ge\tau_0$ и $l=1,2,\ldots,L$

$$\langle w_1[X]\rangle_э=\frac{\tau_0}{2\Delta_к T_0}\times$$
$$\times\begin{cases}\dfrac{\langle P(x_l)\rangle}{L-1}\ln\dfrac{L}{1+(L-1)\dfrac{x_l-\Delta_к-X}{x_l-\Delta_к-X_н}}+\dfrac{T_0-\tau_0}{\tau_0}\dfrac{1}{L}, & X_н\le X\le x_l-\Delta_к;\\ \dfrac{\langle P(x_l)\rangle}{L-1}\ln L+\dfrac{T_0-\tau_0}{\tau_0}\dfrac{1}{L}, & x_l-\Delta_к\le X\le x_l+\Delta_к;\\ \dfrac{\langle P(x_l)\rangle}{L-1}\ln\dfrac{L}{1+(L-1)\dfrac{X-x_l-\Delta_к}{X_в-x_l-\Delta_к}}+\dfrac{T_0-\tau_0}{\tau_0}\dfrac{1}{L}, & x_l+\Delta_к\le X\le X_в;\\ 0, \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

Абсолютная погрешность $\Delta_\text{э}[X]$ оценки $\langle w_1[X]\rangle_\text{э}$ при экстраполяции и комплексном подходе к ее определению для $T_0 \le \tau_0$ и $l = 1, 2, \ldots, L$ [2, 6]

$$\Delta_\text{э}[X] = \langle w_1[X]\rangle_\text{э} - w_1[X] = \frac{1}{2\Delta_\text{к}} \times$$
$$\times \begin{cases} \dfrac{\tau_0}{T_0}\dfrac{\langle P(x_l)\rangle}{L-1}\ln\dfrac{1+(L-1)T_0/\tau_0}{1+(L-1)\dfrac{x_l-\Delta_\text{к}-X}{x_l-\Delta_\text{к}-X_\text{н}}} - \dfrac{1}{L}, \\ x_l-\Delta_\text{к}-(x_l-\Delta_\text{к}-X_\text{н})T_0/\tau_0 \le X \le x-\Delta_\text{к}; \\ \dfrac{\tau_0}{T_0}\dfrac{\langle P(x_l)\rangle}{L-1}\ln[1+(L-1)T_0/\tau_0] - \dfrac{1}{L}, \\ \qquad x_l-\Delta_\text{к} \le X \le x_l+\Delta_\text{к}; \\ \dfrac{\tau_0}{T_0}\dfrac{\langle P(x_l)\rangle}{L-1}\ln\dfrac{1+(L-1)T_0/\tau_0}{1+(L-1)\dfrac{X-x_l-\Delta_\text{к}}{X_\text{в}-x_l-\Delta_\text{к}}} - \dfrac{1}{L}, \\ x_l+\Delta_\text{к} \le X \le x_l+\Delta_\text{к}+(X_\text{в}-x_l-\Delta_\text{к})T_0/\tau_0; \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

При $T_0 \ge \tau_0$ и $l = 1, 2, \ldots, L$ [3, 4]

$$\Delta_\text{э}[X] = \frac{\tau_0}{2\Delta_\text{к}T_0} \times$$
$$\times \begin{cases} \dfrac{\langle P(x_l)\rangle}{L-1}\ln\dfrac{L}{1+(L-1)\dfrac{x_l-\Delta_\text{к}-X}{x_l-\Delta_\text{к}-X_\text{н}}} - \dfrac{1}{L}, X_\text{н} \le X \le x_l-\Delta_\text{к}; \\ \dfrac{\langle P(x_l)\rangle}{L-1}\ln L - \dfrac{1}{L}, \qquad x_l-\Delta_\text{к} \le X \le x_l+\Delta_\text{к}; \\ \dfrac{\langle P(x_l)\rangle}{L-1}\ln\dfrac{L}{1+(L-1)\dfrac{X-x_l-\Delta_\text{к}}{X_\text{в}-x_l-\Delta_\text{к}}} - \dfrac{1}{L}, x_l+\Delta_\text{к} \le X \le X_\text{в}; \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Отметим наличие пропорциональной $\langle P(x_l)\rangle/2\Delta_\text{к}$ мультипликативной погрешности, которая имеет разное значение при $T_0 \le \tau_0$ и при $T_0 \ge \tau_0$. Кроме того, при $T_0 \ge \tau_0$ появилась аддитивная погрешность $(T_0 - \tau_0)/2\Delta_\text{к} L T_0$, которая при $T_0 < \tau_0$ отсутствует.

При интерполяции реализацию $x(t)$ случайного процесса восстановим по двум соседним отсчетам x_{il} и $x_{(i+1)k}$. Тогда условная плотность вероятности $w_1[X|\lambda; x_l, x_k]$, где $0 \le \lambda \le T_0$, равна [5–7]:

$$w_1[X|\lambda; x_l, x_k] = $$
$$= \begin{cases} [X_\text{в}(\lambda; x_l, x_k) - X_\text{н}(\lambda; x_l, x_k)]^{-1}, & X_\text{н}(\lambda; x_l, x_k) \le X \le \\ & \le X_\text{в}(\lambda; x_l, x_k); \\ 0, \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

где разность верхней $X_\text{в}(\lambda; x_l, x_k)$ и нижней $X_\text{н}(\lambda; x_l, x_k)$ границ динамического диапазона изменения случайного процесса при интерполяции [5–7]:

$$X_\text{в}(\lambda; x_l, x_k) - X_\text{н}(\lambda; x_l . x_k) =$$
$$= 2\Delta_\text{к}\left[L - (L-1)\frac{\rho(\lambda)+\rho(T_0-\lambda)}{1+\rho(T_0)}\right].$$

Возможны три варианта восстановления реализации: $T_0 \le \tau_0$, $\tau_0 \le T_0 \le 2\tau_0$ и $T_0 \ge 2\tau_0$. Результат восстановления на интервале $0 \le \lambda \le T_0$ зависит также от взаимосвязи отсчетов x_{il} и $x_{(i+1)k}$, которая учитывается условной плотностью вероятности $w_1[X|\lambda; x_l, x_k]$.

При $T_0 \le \tau_0$ и $l, k = 1, 2, \ldots, L$

$$w_1[X|\lambda; x_l, x_k] =$$
$$= \frac{1}{2\Delta_\text{к}}\begin{cases} 1, \begin{bmatrix} x_l-\Delta_\text{к}+(x_k-x_l)\lambda/T_0 \le X \le \\ \le x_l+\Delta_\text{к}+(x_k-x_l)\lambda/T_0, \end{bmatrix} 0 \le \lambda \le T_0; \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

При $\tau_0 \le T_0 \le 2\tau_0$ $l, k = 1, 2, \ldots, L$

$$w_1[X|\lambda; x_l, x_k] = (2\Delta_\text{к})^{-1} \times$$
$$\times \begin{cases} \left[1+(L-1)\dfrac{\lambda}{\tau_0}\right]^{-1}, & \begin{matrix} x_l-\Delta_\text{к}-(x_l-\Delta_\text{к}-X_\text{н})\lambda/\tau_0 \le X \le \\ \le x_l+\Delta_\text{к}+(X_\text{в}-x_l-\Delta_\text{к})\lambda/\tau_0, \\ 0 \le \lambda \le T_0-\tau_0; \end{matrix} \\ \left[1+(L-1)\dfrac{T_0-\tau_0}{\tau_0}\right]^{-1}, & \begin{matrix} x_l-\Delta_\text{к}-(x_k-\Delta_\text{к}-X_\text{н})(T_0-\tau_0)/\tau_0 + \\ +(x_k-x_l)\lambda/\tau_0 \le X \le x_l+\Delta_\text{к} + \\ +(X_\text{в}-x_k-\Delta_\text{к})(T_0-\tau_0)/\tau_0+(x_k-x_l)\lambda/\tau_0, \\ T_0-\tau_0 \le \lambda \le \tau_0; \end{matrix} \\ \left[1+(L-1)\dfrac{T_0-\lambda}{\tau_0}\right]^{-1}, & \begin{matrix} x_k-\Delta_\text{к}-(x_k-\Delta_\text{к}-X_\text{н})(T_0-\lambda)/\tau_0 \le X \le \\ \le x_k+\Delta_\text{к}+(X_\text{в}-x_k-\Delta_\text{к})(T_0-\lambda)/\tau_0, \\ \tau_0 \le \lambda \le T_0; \end{matrix} \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

При $T_0 \ge 2\tau_0$ $l, k = 1, 2, \ldots, L$

$$w_1[X|\lambda; x_l, x_k] = (2\Delta_\text{к})^{-1} \times$$
$$\times \begin{cases} \left[1+(L-1)\dfrac{\lambda}{\tau_0}\right]^{-1}, & x_l-\Delta_\text{к}-(x_l-\Delta_\text{к}-X_\text{н})\lambda/\tau_0 \le X \le \\ & \le x_l+\Delta_\text{к}+(X_\text{в}-x_l-\Delta_\text{к})\lambda/\tau_0, \\ & 0 \le \lambda \le \tau_0; \\ L^{-1}, & X_\text{н} \le X \le X_\text{в}, \quad \tau_0 \le \lambda \le T_0-\tau_0; \\ \left[1+(L-1)\dfrac{T_0-\lambda}{\tau_0}\right]^{-1}, & x_k-\Delta_\text{к}-(x_k-\Delta_\text{к}-X_\text{н})(T_0-\lambda)/\tau_0 \le X \le \\ & \le x_k+\Delta_\text{к}+(X_\text{в}-x_k-\Delta_\text{к})(T_0-\lambda)/\tau_0, \\ & T_0-\tau_0 \le \lambda \le T_0; \\ 0, \text{ в остальных случаях.} & \end{cases}$$

Подставив эти значения, получим оценку плотности распределения вероятности $\langle w_1[X]\rangle_\text{и}$ [8].

При $T_0 \le \tau_0$ и $l, k = 1, 2, \ldots, L$

$$\langle w_1[X]\rangle_\text{и} = \frac{1}{2\Delta_\text{к}} \times$$
$$\times \begin{cases} \dfrac{\langle P(x_l, x_k)\rangle}{x_k-x_l}\begin{bmatrix} X-x_l-\Delta_\text{к}, & x_l-\Delta_\text{к} \le X \le x_l+\Delta_\text{к} \\ 2\Delta_\text{к}, & x_l+\Delta_\text{к} \le X \le x_k-\Delta_\text{к} \\ x_k-\Delta_\text{к}-X, & x_k-\Delta_\text{к} \le X \le x_k+\Delta_\text{к} \end{bmatrix}, \\ \hfill k > l; \\ \langle P(x_l)\rangle, \quad x_l-\Delta_\text{к} \le X \le x_l+\Delta_\text{к}, \quad k = l; \\ \dfrac{\langle P(x_l, x_k)\rangle}{x_l-x_k}\begin{bmatrix} x_l-\Delta_\text{к}-X, & x_l-\Delta_\text{к} \le X \le x_l+\Delta_\text{к} \\ 2\Delta_\text{к}, & x_k+\Delta_\text{к} \le X \le x_l-\Delta_\text{к} \\ X-x_k-\Delta_\text{к}, & x_k-\Delta_\text{к} \le X \le x_k+\Delta_\text{к} \end{bmatrix}, \\ \hfill k < l; \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

При $\tau_0 \le T_0 \le 2\tau_0$, $l, k = 1, 2, \ldots, L$ и $k>l$

$$\langle w_1[X]\rangle_\text{и} = \frac{\tau_0}{2\Delta_\text{к}T_0}\frac{\langle P(x_l)\rangle}{L-1} \times$$
$$\times \left[\begin{array}{ll} \ln\dfrac{1+(L-1)(T_0-\tau_0)/\tau_0}{1+(L-1)\dfrac{x_l-\Delta_\text{к}-X}{x_l-\Delta_\text{к}-X_\text{н}}}, & \begin{array}{l} x_l-\Delta_\text{к}-(x_l-\Delta_\text{к}-X_\text{н})\times \\ \times(T_0-\tau_0)/\tau_0 \le X \le x_l-\Delta_\text{к}; \end{array} \\ \ln[1+(L-1)(T_0-\tau_0)/\tau_0], & x_l-\Delta_\text{к} \le X \le x_l+\Delta_\text{к}; \\ \ln\dfrac{1+(L-1)(T_0-\tau_0)/\tau_0}{1+(L-1)\dfrac{X-x_l-\Delta_\text{к}}{X_\text{в}-x_l-\Delta_\text{к}}}, & \begin{array}{l} x_l+\Delta_\text{к} \le X \le x_l+\Delta_\text{к}+ \\ +(X_\text{в}-x_l-\Delta_\text{к})(T_0-\tau_0)/\tau_0; \end{array} \\ 0, \text{ в остальных случаях.} & \end{array}\right.$$

При $\tau_0 \le T_0 \le 2\tau_0$ и $l = k = 1, 2, \ldots, L$

$$\langle w_1[X]\rangle_\text{и} = \frac{\tau_0\langle P(x_l)\rangle}{2\Delta_\text{к}T_0} \times$$
$$\times \left[\begin{array}{ll} \dfrac{T_0-2\tau_0}{\tau_0+(L-1)(T_0-\tau_0)}, & \begin{array}{r} x_l-\Delta_\text{к}-(x_l-\Delta_\text{к}-X_\text{н})\times \\ \times(T_0-\tau_0)/\tau_0 \le X \le \\ \le x_l+\Delta_\text{к}+(X_\text{в}-x_l-\Delta_\text{к})\times \\ \times(T_0-\tau_0)/\tau_0; \end{array} \\ 0, \text{ в остальных случаях.} & \end{array}\right.$$

При $\tau_0 \le T_0 \le 2\tau_0$, $l, k = 1, 2, \ldots, L$ и $k<l$

$$\langle w_1[X]\rangle_\text{и} = \frac{\tau_0}{2\Delta_\text{к}T_0}\frac{\langle P(x_k)\rangle}{L-1} \times$$
$$\times \left[\begin{array}{ll} \ln\dfrac{1+(L-1)(T_0-\tau_0)/\tau_0}{1+(L-1)\dfrac{x_k-\Delta_\text{к}-X}{x_k-\Delta_\text{к}-X_\text{н}}}, & \begin{array}{l} x_k-\Delta_\text{к}-(x_k-\Delta_\text{к}-X_\text{н})\times \\ \times(T_0-\tau_0)/\tau_0 \le X \le \\ \le x_k-\Delta_\text{к}; \end{array} \\ \ln[1+(L-1)(T_0-\tau_0)/\tau_0], & x_k-\Delta_\text{к} \le X \le x_k+\Delta_\text{к}; \\ \ln\dfrac{1+(L-1)(T_0-\tau_0)/\tau_0}{1+(L-1)\dfrac{X-x_k-\Delta_\text{к}}{X_\text{в}-x_k-\Delta_\text{к}}}, & \begin{array}{l} x_k+\Delta_\text{к} \le X \le x_k+\Delta_\text{к}+ \\ +(X_\text{в}-x_k-\Delta_\text{к})\times \\ \times(T_0-\tau_0)/\tau_0; \end{array} \\ 0, \text{ в остальных случаях.} & \end{array}\right.$$

При $T_0 \ge 2\tau_0$, $l, k = 1, 2, \ldots, L$ и $k>l$

$$\langle w_1[X]\rangle_\text{и} = \frac{\tau_0}{2\Delta_\text{к}T_0}\frac{\langle P(x_l)\rangle}{L-1} \times$$
$$\times \left[\begin{array}{ll} \ln\dfrac{L}{1+(L-1)\dfrac{x_l-\Delta_\text{к}-X}{x_l-\Delta_\text{к}-X_\text{н}}}, & X_\text{н} \le X \le x_l-\Delta_\text{к}; \\ \ln L, & x_l-\Delta_\text{к} \le X \le x_l+\Delta_\text{к}; \\ \ln\dfrac{L}{1+(L-1)\dfrac{X-x_l-\Delta_\text{к}}{X_\text{в}-x_l-\Delta_\text{к}}}, & x_l+\Delta_\text{к} \le X \le X_\text{в}; \\ 0, \text{ в остальных случаях.} & \end{array}\right.$$

При $T_0 \ge 2\tau_0$ и $l = k = 1, 2, \ldots, L$

$$\langle w_1[X]\rangle_\text{и} = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{1}{2\Delta_\text{к}}\dfrac{T_0-2\tau_0}{T_0}\dfrac{1}{L}, & X_\text{н} \le X \le X_\text{в}; \\ 0, \text{ в остальных случаях.} & \end{array}\right.$$

При $T_0 \ge 2\tau_0$, $l,k=1,2,\ldots,L$ и $k<l$

$$\langle w_1[X]\rangle_{\text{и}} = \frac{\tau_0}{2\Delta_{\text{к}} T_0}\frac{\langle P(x_k)\rangle}{L-1}\times$$

$$\times\begin{cases} \ln\dfrac{L}{1+(L-1)\dfrac{x_k-\Delta_{\text{к}}-X}{x_k-\Delta_{\text{к}}-X_{\text{н}}}}, & X_{\text{н}}\le X\le x_k-\Delta_{\text{к}};\\ \ln L, & x_k-\Delta_{\text{к}}\le X\le x_k+\Delta_{\text{к}};\\ \ln\dfrac{L}{1+(L-1)\dfrac{X-x_k-\Delta_{\text{к}}}{X_{\text{н}}-x_k-\Delta_{\text{к}}}}, & x_k+\Delta_{\text{к}}\le X\le X_{\text{в}};\\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Абсолютная погрешность $\Delta_{\text{и}}[X]$ оценки $\langle w_1[X]\rangle_{\text{и}}$ плотности вероятности при интерполяции реализации между отсчетами, $T_0 \le \tau_0$, $l,k=1,2,\ldots,L$ и $k>l$

$$\Delta_{\text{и}}[X] = \langle w_1[X]\rangle_{\text{и}} - w_1[X] =$$

$$=\frac{1}{2\Delta_{\text{к}}}\begin{cases} \dfrac{\langle P(x_l,x_k)\rangle}{x_k-x_l}(X-x_l-\Delta_{\text{к}})-\dfrac{1}{L}, & x_l-\Delta_{\text{к}}\le X\le x_l+\Delta_{\text{к}};\\ \dfrac{\langle P(x_l,x_k)\rangle}{x_k-x_l}2\Delta_{\text{к}}-\dfrac{1}{L}, & x_l+\Delta_{\text{к}}\le X\le x_k-\Delta_{\text{к}};\\ \dfrac{\langle P(x_l,x_k)\rangle}{x_k-x_l}(x_k-\Delta_{\text{к}}-X)-\dfrac{1}{L}, & x_k-\Delta_{\text{к}}\le X\le x_k+\Delta_{\text{к}};\\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

При $T_0 \le \tau_0$, $l=k=1,2,\ldots,L$

$$\Delta_{\text{и}}[X] = \frac{1}{2\Delta_{\text{к}}}\begin{cases} \langle P(x_l)\rangle - 1/L, & x_l-\Delta_{\text{к}}\le X\le x_l+\Delta_{\text{к}};\\ 0. \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

При $T_0 \le \tau_0$, $l,k=1,2,\ldots,L$ и $k<l$

$$\Delta_{\text{и}}[X] = \frac{1}{2\Delta_{\text{к}}}\times$$

$$\times\begin{cases} \dfrac{\langle P(x_l,x_k)\rangle}{x_l-x_k}(x_l-\Delta_{\text{к}}-X)-\dfrac{1}{L}, & x_l-\Delta_{\text{к}}\le X\le\\ & \le x_l+\Delta_{\text{к}};\\ \dfrac{\langle P(x_l,x_k)\rangle}{x_l-x_k}2\Delta_{\text{к}}-\dfrac{1}{L}, & x_k+\Delta_{\text{к}}\le X\le x_l-\Delta_{\text{к}};\\ \dfrac{\langle P(x_l,x_k)\rangle}{x_l-x_k}(X-x_k-\Delta_{\text{к}})-\dfrac{1}{L}, & x_k-\Delta_{\text{к}}\le X\le\\ & \le x_k+\Delta_{\text{к}};\\ 0, \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

При $\tau_0 \le T_0 \le 2\tau_0$, $l,k=1,2,\ldots,L$ и $k>l$

$$\Delta_{\text{и}}[X] = \frac{1}{2\Delta_{\text{к}}}\times$$

$$\times\begin{cases} \dfrac{\tau_0}{T_0}\dfrac{\langle P(x_l)\rangle}{L-1}\ln\dfrac{1+(L-1)(T_0-\tau_0)/\tau_0}{1+(L-1)\dfrac{x_l-\Delta_{\text{к}}-X}{x_l-\Delta_{\text{к}}-X_{\text{н}}}}-\dfrac{1}{L},\\ x_l-\Delta_{\text{к}}-(x_l-\Delta_{\text{к}}-X_{\text{н}})(T_0-\tau_0)/\tau_0\le X\le x_l-\Delta_{\text{к}};\\ \dfrac{\tau_0}{T_0}\dfrac{\langle P(x_l)\rangle}{L-1}\ln\left[1+(L-1)\dfrac{T_0-\tau_0}{\tau_0}\right]-\dfrac{1}{L},\\ \qquad x_l-\Delta_{\text{к}}\le X\le x_l+\Delta_{\text{к}};\\ \dfrac{\tau_0}{T_0}\dfrac{\langle P(x_l)\rangle}{L-1}\ln\dfrac{1+(L-1)(T_0-\tau_0)/\tau_0}{1+(L-1)\dfrac{X-x_l-\Delta_{\text{к}}}{X_{\text{в}}-x_l-\Delta_{\text{к}}}}-\dfrac{1}{L},\\ x_l+\Delta_{\text{к}}\le X\le x_l+\Delta_{\text{к}}+(X_{\text{в}}-x_l-\Delta_{\text{к}})(T_0-\tau_0)/\tau_0;\\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

При $\tau_0 \le T_0 \le 2\tau_0$ и $l=k=1,2,\ldots,L$

$$\Delta_{\text{и}}[X] = \frac{1}{2\Delta_{\text{к}}}\times$$

$$\times\begin{cases} \dfrac{\tau_0}{T_0}\dfrac{\langle P(x_l)\rangle(T_0-2\tau_0)}{\tau_0+(L-1)(T_0-\tau_0)}-\dfrac{1}{L},\\ x_l-\Delta_{\text{к}}-(x_l-\Delta_{\text{к}}-X_{\text{н}})(T_0-\tau_0)/\tau_0\le X\le\\ \le x_l+\Delta_{\text{к}}+(X_{\text{в}}-x_l-\Delta_{\text{к}})(T_0-\tau_0)/\tau_0;\\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

При $\tau_0 \le T_0 \le 2\tau_0$, $l,k=1,2,\ldots,L$ и $k<l$

$$\Delta_{\text{и}}[X] = \frac{1}{2\Delta_{\text{к}}}\times$$

$$\times\begin{cases} \dfrac{\tau_0}{T_0}\dfrac{\langle P(x_k)\rangle}{L-1}\ln\dfrac{1+(L-1)(T_0-\tau_0)/\tau_0}{1+(L-1)\dfrac{x_k-\Delta_{\text{к}}-X}{x_k-\Delta_{\text{к}}-X_{\text{н}}}}-\dfrac{1}{L},\\ x_k-\Delta_{\text{к}}-(x_k-\Delta_{\text{к}}-X_{\text{н}})(T_0-\tau_0)/\tau_0\le X\le x_k-\Delta_{\text{к}}\\ \dfrac{\tau_0}{T_0}\dfrac{\langle P(x_k)\rangle}{L-1}\ln\left[1+(L-1)\dfrac{T_0-\tau_0}{\tau_0}\right]-\dfrac{1}{L},\\ \qquad x_k-\Delta_{\text{к}}\le X\le x_k+\Delta_{\text{к}}\\ \dfrac{\tau_0}{T_0}\dfrac{\langle P(x_k)\rangle}{L-1}\ln\dfrac{1+(L-1)(T_0-\tau_0)/\tau_0}{1+(L-1)\dfrac{X-x_k-\Delta_{\text{к}}}{X_{\text{в}}-x_k-\Delta_{\text{к}}}}-\dfrac{1}{L},\\ x_k+\Delta_{\text{к}}\le X\le x_k+\Delta_{\text{к}}+(X_{\text{в}}-x_k-\Delta_{\text{к}})(T_0-\tau_0)/\tau_0\\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

При $T_0 \geq 2\tau_0$, $l,k = 1,2,\ldots,L$ и $k > l$

$$\Delta_{и}[X] = \frac{1}{2\Delta_{к}} \times$$

$$\times \begin{cases} \frac{\tau_0}{T_0}\frac{\langle P(x_l)\rangle}{L-1}\ln\frac{L}{1+(L-1)\frac{x_l-\Delta_{к}-X}{x_l-\Delta_{к}-X_{н}}} - \frac{1}{L}, & X_{н} \leq X \leq x_l - \Delta_{к}; \\ \frac{\tau_0}{T_0}\frac{\langle P(x_l)\rangle}{L-1}\ln L - \frac{1}{L}, & x_l - \Delta_{к} \leq X \leq x_l + \Delta_{к}; \\ \frac{\tau_0}{T_0}\frac{\langle P(x_l)\rangle}{L-1}\ln\frac{L}{1+(L-1)\frac{X-x_l-\Delta_{к}}{X_{в}-x_l-\Delta_{к}}} - \frac{1}{L}, & x_l + \Delta_{к} \leq X \leq X_{в}; \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

При $T_0 \geq 2\tau_0$ и $l = k = 1,2,\ldots,L$

$$\Delta_{и}[X] = 0, \; X_{н} \leq X \leq X_{в}.$$

При $T_0 \geq 2\tau_0$, $l,k = 1,2,\ldots,L$ и $k < l$

$$\Delta_{и}[X] = \frac{1}{2\Delta_{к}} \times$$

$$\times \begin{cases} \frac{\tau_0}{T_0}\frac{\langle P(x_k)\rangle}{L-1}\ln\frac{L}{1+(L-1)\frac{x_k-\Delta_{к}-X}{x_k-\Delta_{к}-X_{н}}} - \frac{1}{L}, \\ \qquad X_{н} \leq X \leq x_k - \Delta_{к}; \\ \frac{\tau_0}{T_0}\frac{\langle P(x_k)\rangle}{L-1}\ln L - \frac{1}{L}, \quad x_k - \Delta_{к} \leq X \leq x_k + \Delta_{к}; \\ \frac{\tau_0}{T_0}\frac{\langle P(x_k)\rangle}{L-1}\ln\frac{L}{1+(L-1)\frac{X-x_k-\Delta_{к}}{X_{н}-x_k-\Delta_{к}}} - \frac{1}{L}, \\ \qquad x_k + \Delta_{к} \leq X \leq X_{в};. \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Отметим, что для $k=l$ при $T_0 \leq \tau_0$ и $\tau_0 \leq T_0 \leq 2\tau_0$ имеют место мультипликативные и отсутствуют аддитивные погрешности оценки $\langle w_1[X]\rangle_{и}$. При $T_0 \geq 2\tau_0$ мультипликативная пропадает и появляется аддитивная погрешность $(T_0 - 2\tau_0)/2\Delta_{к} T_0 L$.

Выводы. При линейной корреляционной функции $\rho(\tau)$ оценки $\langle w_1[X]\rangle$ существенно отличаются от традиционных гистограмм. Столбцы гистограмм «расплываются» и налагаются друг на друга, появляются аддитивные и мультипликативные погрешности. Полученные выражения для погрешностей оценок $\langle w_1[X]\rangle$ позволяют адекватно учесть эти изменения при экстраполяции и интерполяции, повысить точность и достоверность измерений плотностей вероятностей стационарных эргодических случайных процессов [5, 9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Заико А. И.** Теория точности статистических и спектральных измерений // Вестник УГАТУ. 2000. № 2. С. 175–182. [A. I. Zaiko, «Theory of accuracy of statistical and spectral measurements», (in Russian), in *Vestnik UGATU*, no 2, pp. 175-182, 2000.]
2. **Свид. 72200700005**. Случайный процесс Заико А. И. с равномерным законом распределения. Математическая модель // Заико А. И.; зарег. ФГУП «ВНТИЦ» 28.02.07, 10 с. [Certif. 72200700005. «A. I. Zaiko random process with a uniform distribution law. The mathematical model»; zareg. FSUE "VNTIC" 28.02.07, (in Russian), 10 p.]
3. **Заико А. И**. Случайный процесс Заико с равномерным законом распределения // Вестник УГАТУ. 2008. Т. 11, № 1 (28). С. 188–193. [A. I. Zaiko, «Random process Zaiko A. I. with a uniform distribution law», (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 11, no 1 (28), pp. 188-193, 2008.]
4. **Заико А. И**. Комплексный подход к определению погрешностей // Датчики и Системы. 2007. № 8. С. 52–59. [A. I. Zaiko, «Integrated approach to the determination of errors», (in Russian), *in Sensors and Systems*, no 8, pp. 52-59, 2007.]
5. **Zaiko A. I**. Random signal with uniform distribution // Measurement Techniques, 1999 Vol. 42, Juni, pp. 11–13, 1999. [A. I. Zaiko, «Random signal with uniform distribution», in *Measurement Techniques*, vol. 42, Juni, pp. 11-13, 1999.]
6. **Заико А. И.** Случайные процессы. Модели и измерения: учеб. пособие, М.: Изд-во МАИ, 2006, 207 с. [A. I. Zaiko, Random process. Models and measurements: (in Russian). M.: Izd-vo MAI, 2006.]
7. **Заико А. И.** Оценивание плотности вероятности эргодического случайного процесса // Матер. II междунар. научно-практич. конф. «Современные проблемы науки и образования в техническом вузе». Уфа: УГАТУ, 2015, Т. 1, С. 146–152. [A. I. Zaiko, "Estimation of probability density in ergotic random process", (in Russian), *in Proc. II International scientific-practical conference "Modern problems of science and education in a technical college"*, vol. 1, pp. 146-152, 2015.]
8. **Заико А. И.** Измерение плотности вероятности случайного процесса с линейной корреляционной функцией // Труды междунар. научно-технич. конф. «Перспективные информационные технологии (ПИТ 2016)», Самара: Изд-во СНЦ РАН, 2016, С. 77–87. [A. I. Zaiko, «Measurement of the probability density of a random process with a linear correlation function», (in Russian), *in Proc. International scientific-technical conference "Advanced Information Technology (AIT 2016)"*, Samara: Izd-vo SNC RAN, pp. 77-87. 2016.]

ОБ АВТОРЕ

ЗАИКО Александр Иванович, проф. каф. теоретических основ электротехники. Дипл. инженер электронной техники (УАИ, 1970). Д-р техн. наук по информац. измерит. системам (ЛЭТИ, 1990). Заслуж. изобретатель РБ и РФ. Дейст. член Международ. инж. акад. и Инж. акад. РБ. Иссл. в области метрологич. обеспечения, анализа и синтеза информац. измерит. систем спец. назначения и измерения случайных процессов.

METADATA

Title: Measuring probability density of ergodic random having linear correlation function

Author: A. I. Zaiko

Affiliation:

Ufa State Aviation Technical University (UGATU), Russia.

Email: zaiko@ugatu.ac.ru

Language: Russian.

Source: Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 21, no. 4 (78), pp. 121-128, 2017. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

Abstract: The paper proposes algorithms and error estimations for measuring probability density of random process having linearly decreasing correlation function, considering reconstruction of its trajectory between samples.

Key words: Ergodic random process; linear correlation function; measurement algorithms; extrapolation and interpolation.

About authors:

ZAIKO, Alexander Ivanovich. Prof., Dept. of Theoretical Basics of Electrical Engineering. Dipl. Electronic Engineer (UGATU, 1970). Cand. (PhD) Tech. Sci. (KPtI, 1973), Dr. (Habil.) Tech. Sci. (LETI, 1990). Honored inventor of RB and RF.