

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 536.421.4

Р. Г. ЗАЙНУЛЛИН

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРОЦЕССА ТЕПЛООБМЕНА С ФАЗОВЫМ ПЕРЕХОДОМ

Излагается применение метода вырожденных гипергеометрических преобразований (ВГПП) к решению одной нестационарной задачи теплообмена с фазовым переходом на примере процесса промерзания некоторой сплошной среды. Получено аналитическое решение задачи при специальных краевых условиях. В ходе решения устанавливается закон движения границы раздела двух фаз. Рассматривается случай, когда на уравнение для ядра интегрального преобразования, используемого при решении задачи, накладывается требование самосопряженности, что дает возможность применения метода разложения по собственным функциям. *Фазовый переход; свободные границы; задача Штурма-Лиувилля*

Краевые задачи теплопроводности в областях с подвижными границами за последние годы приобретают все большее значение как в теоретических, так и в прикладных разделах физики и математики. Количество работ, посвященных решению подобных задач, за последние годы стало заметно увеличиваться [1–9]. Аналитический подход при решении краевых задач теплообмена в системах со свободными границами относится к числу труднейших проблем в современной аналитической теории математической физики. Вследствие зависимости положения характеристического раздела области от времени к этому классу задач неприменимы классические методы дифференциальных уравнений в частных производных, так как оставаясь в рамках этих методов, не удается согласовать решение уравнения теплопроводности с движением границы фазового перехода.

Имеется целый ряд аналитических [9] и численных методов решения указанных задач. Но формулы распределения температурных полей, полученные этими методами, или слишком громоздки и неудобны для использования, или носят весьма приближенный характер, или же, как это наиболее типично для задач подобного рода, дают неопределенность решения в начальный момент времени. Данная работа как раз лишена данного недостатка, благодаря чему и удается получить аналитическое решение в компактной форме, позволяющее описать истинное распределение температурных полей в рассматриваемых областях. При этом следует

отметить сложность выбранного объекта исследования, что подчеркивает актуальность темы. Сложным является как получение аналитического решения, так и доведение полученного результата до числовых результатов, что связано с наличием в решениях специальных функций зависящих от нескольких параметров.

Суть метода решения изучаемой задачи состоит в том, что, переходя в неподвижную систему координат из подвижной с помощью соответствующих преобразований, задача преобразуется к классическому случаю с фиксированной границей, но в ней появляются переменные коэффициенты. В последнем случае становится возможным применение метода конечных интегральных преобразований, ядра которых находятся через постановку и решение соответствующей спектральной задачи. Собственные функции выражаются через вырожденные гипергеометрические функции (ВГГФ). Способ нахождения собственных значений связан с величиной введенного безразмерного параметра β_k , зависящего от теплофизических характеристик среды и краевых условий задачи. Причем при малых и больших значениях этого параметра нахождение собственных значений основано на асимптотических методах. При малых значениях β_k используется известное асимптотическое разложение по малому параметру [13]. При больших же значениях параметра используется асимптотическое разложение для решения уравнения второго порядка в вещественной окрестности точки поворота [14]. Новый подход в развитии теории интегральных преобразований в конечном счете приводит к получению формулы обращения, что позволяет

выписать аналитическое решение задачи и рассмотреть ряд частных случаев.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим применение метода вырожденных гипергеометрических преобразований (ВГГП), разработанного в [10, 11], к процессу теплообмена с фазовым переходом при затвердевании некоторой сплошной среды под действием плоского источника холода. В начальный момент времени среда обладает постоянной температурой $t_0 > 0$ при $x \geq a\xi_0$. Внешняя поверхность среды обладает температурой $t_e < 0$. Образуются зоны промерзания ($k = 1$) и охлаждения ($k = 2$), и граница фазового перехода с течением времени продвигается внутрь среды. Математическую модель этого процесса для одномерной схемы можно представить в виде:

$$\frac{\partial t_k(x, \tau)}{\partial \tau} = a_k \frac{\partial^2 t_k(x, \tau)}{\partial x^2}; \quad (1)$$

$$x \in D_k(\tau): D_1(\tau) = \{0 < x < \xi_1(\tau)\},$$

$$D_2(\tau) = \{\xi_1(\tau) < x < \xi_2(\tau)\};$$

$$\tau > 0, \xi_1(+0) = \xi_0 > 0, \xi_2(\tau) = a\xi_1(\tau), a > 1;$$

$$t_1(x, 0) = \left(1 - \frac{x}{\xi_0}\right)t_e; \quad (2)$$

$$t_2(x, 0) = \frac{x - \xi_0}{(a-1)\xi_0}t_0; \quad (3)$$

$$t_1(0, \tau) = t_e; \quad (4)$$

$$t_k(\xi_1(\tau), \tau) = 0; \quad (5)$$

$$t_2(\xi_2(\tau), \tau) = t_0; \quad (6)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(\xi_1(\tau), \tau)}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial t_2(\xi_1(\tau), \tau)}{\partial x} = \sigma v \frac{d\xi_1(\tau)}{d\tau}. \quad (7)$$

Здесь a_k и λ_k – коэффициенты теплопроводности и температуропроводности в $D_k(\tau)$, σ – скрытая теплота кристаллизации, а v – плотность образующейся фазы, a – безразмерный параметр теплового влияния [12].

Предполагаем, что $t_k(x, \tau)$ и $\xi_1(\tau)$ являются решениями задачи (1–7) для всех $0 < \tau < T \leq \infty$, если:

- $\frac{\partial^2 t_k(x, \tau)}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial t_k(x, \tau)}{\partial \tau}$ непрерывны в $D_k(\tau)$

при $0 < \tau < T$;

- $t_k(x, \tau)$ и $\frac{\partial t_k(x, \tau)}{\partial x}$ непрерывны в $\bar{D}_k(\tau)$ при

$0 < \tau < T$;

- $t_k(x, \tau)$ непрерывны также при $\tau = 0$;

- $\xi_1(\tau)$ непрерывно дифференцируема при

$0 < \tau < T$;

- они удовлетворяют уравнениям (1–7).

НАХОЖДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И ЗАКОНА ДВИЖЕНИЯ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ

Используя подстановку

$$x = y\xi_1(\tau) \quad (8)$$

и вводя вспомогательные функции

$$T_k(y, \xi) = t_k(y\xi_1(\tau), \tau) - \begin{cases} (1-y)t_e & \text{при } k = 1; \\ \frac{y-1}{a-1}t_0 & \text{при } k = 2, \end{cases} \quad (9)$$

сведем задачу (1–6) к решению уравнения

$$\xi_1^2(\tau) \frac{\partial T_k(y, \tau)}{\partial \tau} = a_k \frac{\partial^2 T_k(y, \tau)}{\partial y^2} + \xi_1(\tau) \xi_1'(\tau) y \frac{\partial T_k(y, \tau)}{\partial y} - \begin{cases} t_e \xi_1(\tau) \xi_1'(\tau) y & \text{при } k = 1; \\ \frac{t_0}{1-a} \xi_1(\tau) \xi_1'(\tau) y & \text{при } k = 2 \end{cases} \quad (10)$$

с однородными краевыми условиями

$$T_k(y, 0) = 0; \quad (11)$$

$$T_1(0, \tau) = T_k(1, \tau) = T_2(a, \tau) = 0. \quad (12)$$

Решение задачи (10–12) отыскиваем, используя метод конечных интегральных преобразований по y :

$$U_k(\gamma, \tau) = \int_{y_1}^{y_2} T_k(y, \tau) \rho_k(y) K_k(y, \gamma) dy, \quad (13)$$

где $y_1 = 0, y_2 = 1$ при $k = 1$ и $y_1 = 1, y_2 = a$ при $k = 2$, с априори неизвестным ядром, полагая, что постулируемые ниже свойства преобразования (13) имеют место равномерно относительно τ .

Ядра $K_k(y, \gamma)$ преобразования (13) являются решениями уравнений

$$a_k \frac{\partial^2 [\rho_k(y) K_k(y, \tau)]}{\partial y^2} - \xi_1(\tau) \xi_1'(\tau) \times \times \frac{\partial [y \rho_k(y) K_k(y, \gamma)]}{\partial y} + \mu_{k,\gamma}^2 \rho_k(y) K_k(y, \gamma) = 0 \quad (14)$$

при однородных граничных условиях

$$K_1(0, \gamma) = K_k(1, \gamma) = K_2(a, \gamma) = 0, \quad (15)$$

где $\mu_k^2(\gamma)$ – величина, не зависящая от y . При этом преобразованное уравнение не будет содержать интегральных членов.

В дальнейшем будем пользоваться формальными равенствами

$$K_k(y, \gamma) = K_{k,\gamma}(y);$$

$$\mu_k^2(\gamma) = \mu_{k,\gamma}^2; \quad U_k(\gamma, \tau) = U_{k,\gamma}(\tau),$$

где переменная γ принимает натуральные значения, что связано с условиями существования разложения задачи (10–12) по собственным функциям $K_{k,\gamma}(y)$, соответствующим собственным значениям $\mu_{k,\gamma}^2$. Для обеспечения условий, позволяющих получить это разложение, на уравнения (14) накладываем требование самосопряженности. Уравнения (14) преобразуются в самосопряженные, если только

$$a_k \rho'_k(y) = \xi_1(\tau) \xi'_1(\tau) \rho_k(y).$$

Полагая, что

$$2\xi_1(\tau) \xi'_1(\tau) = \Lambda^2,$$

получаем весовую функцию

$$\rho_k(y) = \exp\left(\frac{\Lambda^2 y^2}{4a_k}\right) = \exp(\beta_k y^2)$$

с точностью до произвольного множителя и устанавливаем характер зависимости положения свободной границы от времени

$$\xi_1^2(\tau) = \int_0^\tau \Lambda^2 d\eta = \Lambda^2 \tau + \xi_0^2.$$

Параметр Λ подлежит определению через условие (7). Он определяется характером положения и движения свободной границы и является функцией тепло-физических характеристик и краевых условий. После наложения требования самосопряженности уравнение (14) можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\rho_k(y) \frac{\partial K_{k,\gamma}(y)}{\partial y} \right] + \frac{\mu_{k,\gamma}^2}{a_k} \rho_k(y) K_{k,\gamma}(y) = 0 \quad (16)$$

при однородных граничных условиях

$$K_{1,\gamma}(0) = K_{k,\gamma}(1) = K_{2,\gamma}(a) = 0. \quad (17)$$

Уравнение (16), при необходимости, можно привести к виду

$$\frac{\partial^2 K_{k,\gamma}(y)}{\partial y^2} + 2\beta_k y \frac{\partial K_{k,\gamma}(y)}{\partial y} + \frac{\mu_{k,\gamma}^2}{a_k} K_{k,\gamma}(y) = 0. \quad (18)$$

Задача (16–17) есть задача Штурма-Лиувилля. Подстановками

$$K_{k,\gamma}(y) = \frac{2\sqrt{a_k z}}{\Lambda} u_{k,\gamma}(z) \exp(-z), \quad z = \frac{\Lambda^2 y^2}{4a_k} = \beta_k y^2,$$

уравнения (14) приводятся к вырожденным гипергеометрическим:

$$z \frac{\partial^2 u_{k,\gamma}(z)}{\partial z^2} + \left(\frac{3}{2} - z \right) \frac{\partial u_{k,\gamma}(z)}{\partial z} - b_{k,\gamma} u_{k,\gamma}(z) = 0; \quad (19)$$

$$b_{k,\gamma} = 1 - \left(\frac{\mu_{k,\gamma}}{\Lambda} \right)^2$$

с однородными граничными условиями

$$u_{1,\gamma}(0) = u_{k,\gamma}(\beta_k) = u_{2,\gamma}(\beta_2 a^2) = 0, \quad (20)$$

подстановкой

$$K_{k,\gamma}(y) = v_{k,\gamma}(y) \times \exp(-\beta_k \int_0^y \xi d\xi) = v_{k,\gamma}(y) \exp\left(-\frac{1}{2} \beta_k y^2\right),$$

где $\beta_k = \frac{\Lambda^2}{4a_k}$ уравнение (18) приводится к виду

$$-v_{k,\gamma}''(y) + [(\beta_k y)^2 + \beta_k] v_{k,\gamma}(y) = \frac{\mu_{k,\gamma}^2}{a_k} v_{k,\gamma}(y) \quad (21)$$

с однородными граничными условиями

$$v_{1,\tau}(0) = v_{k,\gamma}(1) = v_{2,\gamma}(a) = 0. \quad (22)$$

Решая задачу (19–20), находим собственные функции задачи (16–17) ортонормированные с весом $\rho_k(y)$, которые имеют вид

$$K_{1,\gamma}(y) = C_{1,\gamma}^{-1} y F\left(b_{1,\gamma}, \frac{3}{2}; z\right) \exp(-z); \quad (23)$$

$$K_{2,\gamma}(y) = C_{2,\gamma}^{-1} \Delta F\left(b_{2,\gamma}, \frac{3}{2}; z\right) \exp(-z),$$

где $C_{k,\gamma}^{-1}$ – нормирующие множители, определяемые формулами

$$C_{1,\gamma}^2 = \frac{-b_{1,\gamma}}{6\beta_1} F\left(b_{1,\gamma} + 1, \frac{5}{2}; \beta_1\right) \exp(-\beta_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b_{1,\gamma})_n}{(1,5)_n} S_{1,n} \frac{\beta_1^n}{n!};$$

$$C_{2,\gamma}^2 = -\frac{1}{2\beta_2} \left(\frac{a_2}{\Lambda^2} q p_0 + B \right) \exp(-\beta_2) \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(b_{2,\gamma})_n}{(1,5)_n} (a^{2n+1} q_0 - q) S_{2,n} - \left[-a \frac{(b_{2,\gamma} - 0,5)_n}{(0,5)_n} (a^{2n-1} p_0 - p) S_n \right] \right] \frac{\beta_2^n}{n!},$$

где

$$S_{k,n} = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m_0 b_{k,\gamma} + m}, \quad S_n = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m_0 b_{2,\gamma} - 0,5 + m};$$

$$B = \frac{b_{2,\gamma}}{3} q F\left(b_{2,\gamma} + 1, \frac{5}{2}; \beta_2\right) - a \left(b_{2,\gamma} - \frac{1}{2} \right) p F\left(b_{2,\gamma} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \beta_2\right);$$

$$q = F\left(b_{2,\gamma} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \beta_2 a^2\right),$$

$$q_0 = F\left(b_{2,\gamma} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \beta_2\right), \quad p_0 = F\left(b_{2,\gamma}, \frac{3}{2}; \beta_2\right).$$

Ниже всюду предполагаем, что собственные функции нормированы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Нетривиальные решения изучаемой задачи возможны лишь при значениях $\mu_{k,\gamma}$, удовлетворяющих характеристическим уравнениям

$$F(b_{1,\gamma}, \frac{3}{2}; \beta_1) = 0, \quad \Delta F(b_{2,\gamma}, \frac{3}{2}; \beta_2) = 0, \quad (24)$$

где

$$\Delta F(b_{2,\gamma}, \frac{3}{2}; \beta_2 y^2) = F(b_{2,\gamma} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \beta_2 a^2) \times$$

$$\times y F(b_{2,\gamma}, \frac{3}{2}; \beta_2 y^2) - a F(b_{2,\gamma}, \frac{3}{2}; \beta_2 a^2) \times$$

$$\times F(b_{2,\gamma} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \beta_2 y^2).$$

Используя частные случаи вырожденной гипергеометрической функции [15]:

$$F\left(b, \frac{3}{2}; y\right) = (\pi y)^{-0.5} 2^{b-2.5} e^{0.5y} \times$$

$$\times \Gamma\left(b - \frac{1}{2}\right) [D_{1-2b}(-\sqrt{2y}) - D_{1-2b}(\sqrt{2y})];$$

$$F\left(b - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; y\right) = \pi^{-0.5} 2^{b-1.5} e^{0.5y} \times$$

$$\times \Gamma(b) [D_{1-2b}(-\sqrt{2y}) + D_{1-2b}(\sqrt{2y})],$$

где $\Gamma(b)$ есть гамма-функция, в уравнениях (24) можно перейти к функциям параболического цилиндра

$$[D_{1-2b_{1,\gamma}}(-\sqrt{2\beta_1}) -$$

$$- D_{1-2b_{1,\gamma}}(\sqrt{2\beta_1})] \Gamma\left(b_{1,\gamma} - \frac{1}{2}\right) = 0;$$

$$[D_{1-2b_{2,\gamma}}(a\sqrt{2\beta_2}) D_{1-2b_{2,\gamma}}(-\sqrt{2\beta_2}) -$$

$$- D_{1-2b_{2,\gamma}}(-a\sqrt{2\beta_2}) D_{1-2b_{2,\gamma}}(\sqrt{2\beta_2})] \times$$

$$\Gamma\left(b_{2,\gamma} - \frac{1}{2}\right) \Gamma(b_{2,\gamma}) = 0. \quad (25)$$

При малых значениях безразмерного параметра β_k способ нахождения собственных чисел спектральной задачи (16–17) представлен в статье [16]. Будем считать, что левая часть уравнения (21) порождается возмущенным дифференциальным оператором. Собственные значения задачи (21–22) с невозмущенным оператором хорошо известны и имеют вид

$$\mu_{1,\gamma}^2 = (\pi\gamma)^2 a_1, \quad \mu_{2,\gamma}^2 = \left(\frac{\pi\gamma}{a-1}\right)^2 a_2, \quad \gamma \in \mathbb{N}$$

Для нахождения собственных значений $\mu_{k,\gamma}^2$ воспользуемся известным асимптотическим разложением

$$\frac{\mu_{1,\gamma}^2}{a_1} = (\pi\gamma)^2 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_{2m}}{\gamma^{2m}}, \quad (26)$$

$$\frac{\mu_{2,\gamma}^2}{a_2} = \left(\frac{\pi\gamma}{a-1}\right)^2 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_{2m}}{\gamma^{2m}}.$$

В работе [13] приведена система уравнений

$$\sum_{r=1}^m \binom{m-0.5}{r} \sum_{\sigma=m-r} \left(\prod_{s=1}^r c_{2\alpha_s}^* \right) =$$

$$= \frac{1}{y_2 - y_1} \int_{y_1}^{y_2} A_{2m} \left(m - \frac{1}{2}, y \right) dy, \quad (27)$$

причем $y_1 = 0, y_2 = 1, c_{2\alpha_s}^* = c_{2\alpha_s}$ при $k = 1$ и $y_1 = 1, y_2 = a, c_{2\alpha_s}^* = d_{2\alpha_s}$ при $k = 2$

$$\binom{m}{r} = \frac{m!}{(m-r)!r!}, \quad \sigma = \sum_{s=1}^r \alpha_s,$$

$$A_l(s, y) = \sum_{m=0}^l \binom{s}{l+m} B_{l,m}(y),$$

величины $B_{l,m}(y)$ находятся из рекуррентных формул

$$B_{l,m}(y) = [(\beta_k y)^2 + \beta_k] B_{l-2,m}(y) +$$

$$+ 2i B'_{l-1,m-1}(y) - B''_{l-2,m}(y),$$

$$B_{l,m}(y) = 0, \text{ если } l < 0 \text{ или } m < 0,$$

$$B_{0,0}(y) = 1, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Заметим, что m -е уравнение системы (27) содержит коэффициенты с номерами не больше $2m-2$, причем C_{2m-2}^* в первой степени. Это дает возможность последовательно найти все коэффициенты асимптотического разложения (26). Выпишем вычислительные формулы для нескольких первых коэффициентов:

$$c_0 = \int_0^1 h_1(y) dy, \quad c_2 = \frac{1}{4} \int_0^1 g_1^2(y) dy,$$

$$c_4 = \frac{1}{8} \int_0^1 g_1^3(y) dy + \frac{1}{16} \int_0^1 [g_1'(y)]^2 dy,$$

$$c_6 = -\frac{5}{4} c_2^2 + \frac{5}{64} \int_0^1 g_1^4(y) dy + \frac{5}{32} \times$$

$$\times \int_0^1 g_1'(y) [g_1'(y)]^2 dy + \frac{1}{64} \int_0^1 [g_1''(y)]^2 dy,$$

$$\dots$$

$$d_0 = \frac{1}{a-1} \int_1^a h_2(y) dy, \quad d_2 = \frac{1}{4(a-1)} \int_1^a g_2^2(y) dy,$$

$$d_4 = \frac{1}{8(a-1)} \int_1^a g_2^3(y) dy + \frac{1}{16(a-1)} \int_1^a [g_2'(y)]^2 dy,$$

$$d_6 = \frac{5}{4} d_2^2 + \frac{5}{64(a-1)} \int_1^a g_2^4(y) dy +$$

$$+ \frac{5}{32(a-1)} \int_1^a g_2(y) [g_2'(y)]^2 dy + \frac{1}{64(a-1)} \int_1^a [g_2''(y)]^2 dy,$$

Здесь

$$h_k(y) = (\beta_k y)^2 + \beta_k,$$

$$g_k(y) = h_k(y) - \frac{1}{y_2 - y_1} \int_{y_1}^{y_2} h_k(y) dy,$$

причем $y_1 = 0, y_2 = 1$ при $k = 1$ и $y_1 = 1, y_2 = a$ при $k = 2$, откуда

$$g_1(y) = \beta_1^2 \left(y^2 - \frac{1}{3} \right), \quad g_2(y) = \beta_2^2 \left[y^2 - \frac{1}{3} (a^2 + a + 1) \right].$$

Проведя соответствующие вычисления, получим следующие значения коэффициентов асимптотики для собственных чисел

$$c_0 = \frac{1}{3} \beta_1^2 + \beta_1, \quad c_2 = \frac{1}{45} \beta_1^4, \quad c_4 = \frac{2}{945} \beta_1^6 + \frac{1}{12} \beta_1^4,$$

$$c_6 = \frac{2}{2835} \beta_1^8 + \frac{1}{18} \beta_1^6 + \frac{1}{16} \beta_1^4$$

.....

$$d_0 = \frac{1}{3} (a^2 + a + 1) \beta_2^2 + \beta_2,$$

$$d_2 = \frac{1}{45} (a-1)^2 \left(a^2 + \frac{7}{4} a + 1 \right) \beta_2^4,$$

$$d_4 = \frac{2}{945} (a-1)^4 \left(a^2 + \frac{31}{6} a + 1 \right) \beta_2^6 + \frac{1}{12} \beta_2^4,$$

$$d_6 = \frac{2}{2835} (a-1)^4 \times$$

$$\times \left(a^4 + \frac{313}{128} a^3 + \frac{189}{64} a^2 + \frac{313}{128} a + 1 \right) \beta_2^8 +$$

$$+ \frac{1}{18} (a-1)^2 \left(a^2 + \frac{7}{4} a + 1 \right) \beta_2^6 + \frac{1}{16} \beta_2^4,$$

.....

Числовые значения этих коэффициентов можно найти только после вычисления параметра Λ . Используя значения полученных ко-

эффициентов, асимптотический ряд (26) можно записать в следующем виде:

$$\mu_{1,\gamma}^2 = (\pi\gamma)^2 + c_0 + \frac{c_2}{\gamma^2} + \frac{c_4}{\gamma^4} + \frac{c_6}{\gamma^6} + O\left(\frac{1}{\gamma^8}\right), \quad \gamma \in \mathbb{N};$$

$$\mu_{2,\gamma}^2 = \left(\frac{\pi\gamma}{a-1}\right)^2 + d_0 + \frac{d_2}{\gamma^2} + \frac{d_4}{\gamma^4} + \frac{d_6}{\gamma^6} + O\left(\frac{1}{\gamma^8}\right),$$

$$\gamma \in \mathbb{N};$$

При умеренных значениях β_k собственные числа могут быть вычислены с помощью уравнений (22) или (23) на ЭВМ в программной системе Maple. При больших значениях параметра β_k для нахождения собственных чисел $\mu_{k,\gamma}^2$ спектральная задача (24–25) решается путем преобразования (24) к виду

$$v_{k,\gamma}''(y) - \beta_k^2 (y^2 - y^2_{k,\gamma}) v_{k,\gamma}(y) = 0; \quad (28)$$

$$y_{k,\gamma} = \sqrt{(3 - 4b_{k,\gamma}) \beta_k^{-1}}.$$

В теории асимптотических методов точку $y_{k,\gamma}$ называют простой точкой поворота уравнения (28) или точкой перехода. Полагая, что β_k достаточно большой параметр для нахождения собственных функций $v_{k,\gamma}(y)$ воспользуемся известным асимптотическим разложением [14]:

$$v_{k,\gamma}(y) = \left[\left| \frac{\partial \xi(y, \beta_k^{-1})}{\partial y} \right|^{-0.5} + \sum_{n=1}^m \frac{A_{\gamma,n}(y, \beta_k^{-1})}{\beta_k^n} + O\left(\frac{1}{\beta_k^{m+1}}\right) \right] \times$$

$$\times \left[M_{k,\gamma} \text{Ai}(\beta_k^{\frac{2}{3}} \xi_\gamma(y, \beta_k^{-1})) + N_{k,\gamma} \text{Bi}(\beta_k^{\frac{2}{3}} \xi_\gamma(y, \beta_k^{-1})) \right] + \quad (29)$$

$$+ \beta_k^{\frac{1}{3}} \left[\sum_{n=0}^m \frac{B_{\gamma,n}(y, \beta_k^{-1})}{\beta_k^n} + O\left(\frac{1}{\beta_k^{m+1}}\right) \right] \times$$

$$\times \left[M_{k,\gamma} \text{Ai}'(\beta_k^{\frac{2}{3}} \xi_\gamma(y, \beta_k^{-1})) + N_{k,\gamma} \text{Bi}'(\beta_k^{\frac{2}{3}} \xi_\gamma(y, \beta_k^{-1})) \right]$$

где

$$A_{\gamma,n}(y, \beta_k^{-1}) = \frac{1}{2} \left| \frac{\partial \xi_\gamma(y, \beta_k^{-1})}{\partial y} \right|^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left[C_n \int_{y_{k,\gamma}}^y \left| \frac{\partial \xi_\gamma(t, \beta_k^{-1})}{\partial t} \right|^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 B_{n-1}(t, \beta_k^{-1})}{\partial t^2} dt \right],$$

$$B_{\gamma,n}(y, \beta_k^{-1}) = -\frac{1}{2} \left[\xi_\gamma(y, \beta_k^{-1}) \frac{\partial \xi_\gamma(y, \beta_k^{-1})}{\partial y} \right]^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \int_{y_{k,\gamma}}^y \left[\xi_{\gamma}(y, \beta_k^{-1}) \frac{\partial \xi_{\gamma}(y, \beta_k^{-1})}{\partial y} \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 A_{\gamma, n-1}(t, \beta_k^{-1})}{\partial t^2} dt,$$

$$A_{\gamma, 0}(y, \beta_k^{-1}) = C_0 \left| \frac{\partial \xi_{\gamma}(y, \beta_k^{-1})}{\partial y} \right|^{\frac{1}{2}},$$

$$A_{\gamma, -1}(y, \beta_k^{-1}) = 0 = B_{\gamma, -1}(y, \beta_k^{-1}), \quad C_n = 0,$$

$$A_{\gamma, 2n+1}(y, \beta_k^{-1}) = 0, B_{\gamma, 2n}(y, \beta_k^{-1}) = 0, \quad n \in N,$$

$$\xi_{\gamma}(y, \beta_k^{-1}) = \left(\frac{3}{2} \int_{y_{k,\gamma}}^y |y^2 - y_{k,\gamma}^2|^{\frac{1}{2}} dy \right)^{\frac{2}{3}} \operatorname{sgn}(y - y_{k,\gamma}).$$

Соответствующие вычисления приводят к следующим соотношениям

$$\xi_{\gamma}(y, \beta_n^{-1}) = -\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \times$$

$$\times \left(y_{k,\gamma}^2 \arccos \frac{y}{y_{k,\gamma}} - \sqrt{y_{k,\gamma}^2 - y^2} y \right)^{\frac{2}{3}};$$

$$0 < y < y_{1,\gamma}, 1 < y < y_{2,\gamma},$$

$$\frac{\partial \xi_{\gamma}(y, \beta_n^{-1})}{\partial y} = -\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{y_{k,\gamma}^2 - y^2} \times$$

$$\times \left(y_{k,\gamma}^2 \arccos \frac{y}{y_{k,\gamma}} - \sqrt{y_{k,\gamma}^2 - y^2} y \right)^{-\frac{1}{3}};$$

$$\xi_{\gamma}(y, \beta_k^{-1}) = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \times$$

$$\times \left(y \sqrt{y^2 - y_{k,\gamma}^2} - y_{k,\gamma}^2 \ln \frac{y + \sqrt{y^2 - y_{k,\gamma}^2}}{y_{k,\gamma}^2} \right)^{\frac{2}{3}};$$

$$y_{1,\gamma} < y < 1, \quad y_{2,\gamma} < y < a,$$

$$\frac{\partial \xi_{\gamma}(y, \beta_k^{-1})}{\partial y} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{y^2 - y_{k,\gamma}^2} \times$$

$$\times \left(y \sqrt{y^2 - y_{k,\gamma}^2} - y_{k,\gamma}^2 \ln \frac{y + \sqrt{y^2 - y_{k,\gamma}^2}}{y_{k,\gamma}^2} \right)^{\frac{1}{3}};$$

$$M_{1,\gamma} = \operatorname{Bi} \left(\beta_1^{\frac{2}{3}} \xi_{\gamma}(1, \beta_1^{-1}) \right),$$

$$N_{1,\gamma} = -\operatorname{Ai} \left(\beta_1^{\frac{2}{3}} \xi_{\gamma}(1, \beta_1^{-1}) \right), \quad M_{2,\gamma} = \operatorname{Bi} \left(\beta_2^{\frac{2}{3}} \xi_{\gamma}(a, \beta_2^{-1}) \right),$$

$$N_{2,\gamma} = -\operatorname{Ai} \left(\beta_2^{\frac{2}{3}} \xi_{\gamma}(a, \beta_2^{-1}) \right).$$

Тогда собственные значения $\mu_{k,\gamma}^2$ в асимптотическом приближении (29) с точностью до порядка $O(\beta_k^{-1})$ являются решениями следующего характеристического уравнения

$$\operatorname{Bi} \left(\beta_k^{\frac{2}{3}} \xi_{\gamma}(y_2, \beta_k^{-1}) \right) \operatorname{Ai} \left(\beta_k^{\frac{2}{3}} \xi_{\gamma}(y_1, \beta_k^{-1}) \right) - \operatorname{Ai} \left(\beta_k^{\frac{2}{3}} \xi_{\gamma}(y_2, \beta_k^{-1}) \right) \operatorname{Bi} \left(\beta_k^{\frac{2}{3}} \xi_{\gamma}(y_1, \beta_k^{-1}) \right) = 0, \quad (30)$$

где $y_1 = 0, y_2 = 1$ при $k = 1, y_1 = 1, y_2 = a$ при $k = 2$. При больших значениях аргументов в уравнении (30), особенно при $k = 2$, следует воспользоваться известными асимптотическими формулами для функций Эйри [17]:

$$\operatorname{Ai}(z) \sim \frac{1}{2} \pi^{-0.5} z^{-0.25} e^{-\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n \zeta^{-n},$$

$$\operatorname{Bi}(z) \sim \pi^{-0.5} z^{-0.25} e^{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n \zeta^{-n}.$$

Здесь

$$c_n = \frac{\Gamma(3n + 0.5)}{n! 54^n \Gamma(n + 0.5)}, \quad \zeta = \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}, \quad |z| \gg 1,$$

$$|\arctg z| < \frac{1}{3} \pi.$$

При $k = 2: 1 < y_{2,\gamma} < a, z = \beta_2^{\frac{2}{3}} \xi_{\gamma}(a, \beta_2^{-1}),$

$$\operatorname{Ai}(\beta_2^{\frac{2}{3}} \xi_{\gamma}(a, \beta_2^{-1})) \sim \frac{1}{2} \pi^{-0.5} z^{-0.25} e^{-\xi} (1 - O(\xi^{-1}));$$

$$\operatorname{Bi}(\beta_2^{\frac{2}{3}} \xi_{\gamma}(a, \beta_2^{-1})) \sim \pi^{-0.5} z^{-0.25} e^{\xi} (1 - O(\xi^{-1})),$$

и уравнение (30) в более подробных обозначениях принимает вид

$$2 \operatorname{Ai} \left(- \left(\frac{3}{4} \left((3 - 4b_{2,\gamma}) \arccos \sqrt{\frac{\beta_2}{3 - 4b_{2,\gamma}}} - \sqrt{(3 - 4b_{2,\gamma} - \beta_2) \beta_2} \right) \right)^{\frac{2}{3}} \right) -$$

$$-\exp\left[-\left(\frac{a\sqrt{(a^2\beta_2-3+4b_{2,\gamma})\beta_2}-(3-4b_{2,\gamma})\times}{\times\ln\frac{a\sqrt{\beta_2}+\sqrt{a^2\beta_2-3+4b_{2,\gamma}}}{\sqrt{3-4b_{2,\gamma}}}}\right)\right] \cdot \text{Bi}\left[-\left(\frac{3}{4}\left(\frac{(3-4b_{2,\gamma})\arccos\sqrt{\frac{\beta_2}{3-4b_{2,\gamma}}}-}{-\sqrt{(3-4b_{2,\gamma}-\beta_2)\beta_2}}\right)\right)^{\frac{2}{3}}\right]=0.$$

Для сохранения точности порядка $O(\beta_2^{-1})$: $O(\xi^{-1}) \leq O(\beta_2^{-1})$ достаточно выполнение условия $\xi_2 \geq \beta_2$, т. е.

$$a\sqrt{a^2-y_{2,\gamma}^2}-y_{2,\gamma}^2 \ln \frac{a+\sqrt{a^2-y_{2,\gamma}^2}}{y_{2,\gamma}} \geq 2,$$

где $y_{2,\gamma} = \sqrt{\frac{3-4b_{2,\gamma}}{\beta_2}}$.

ПОСТРОЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

Преобразованием (13) задача (10–12) приводится к виду

$$\frac{\partial U_{k,\gamma}(\tau)}{\partial \tau} + \left(\frac{\mu_{k,\gamma}}{\xi_1(\tau)}\right)^2 U_{k,\gamma}(\tau) = -\frac{H_{k,\gamma}}{\xi_1^2(\tau)}; \quad (31)$$

$$U_{k,\tau}(0) = 0, \quad (32)$$

где

$$H_{1,\gamma} = \frac{t_e \Lambda^2}{6C_{1,\gamma}} F\left(b_{1,\gamma}, \frac{5}{2}; \beta_1\right);$$

$$H_{2,\gamma} = \frac{t_0 \Lambda^2}{6(1-a)C_{2,\gamma}} \times \left[\begin{aligned} & (a^{2n+3}-1)q \frac{(b_{2,\gamma})_n}{(2,5)_n} + \\ & + 3a(a^{2n}-1)p \frac{a_2(b_{2,\gamma}-0,5)}{\Lambda^2(-0,5)_n} \end{aligned} \right] \frac{\beta_2^n}{n!}.$$

Решение задачи (25–26) получается в виде

$$U_{k,\gamma}(\tau) = \int_{\tau}^0 \frac{H_{k,\gamma}}{\xi_1^2(\eta)} \exp\left[\int_{\tau}^{\eta} \left(\frac{\mu_{k,\gamma}}{\xi_1(\theta)}\right)^2 d\theta\right] d\eta.$$

Осуществив преобразования, обратные (13), и учитывая (8), (9), для распределения температурных полей получим следующие формулы:

$$t_{k,\gamma}(x, \tau) = \sum_{\gamma=1}^{\infty} U_{k,\gamma}(\tau) K_{k,\gamma}\left(\frac{x}{\xi_1(\tau)}\right) + \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{\xi_1(\tau)}\right) t_e & \text{при } k=1; \\ \left(\frac{x}{\xi_1(\tau)} - 1\right) \frac{t_0}{a-1} & \text{при } k=2, \end{cases} \quad (33)$$

где функции $K_{k,\gamma}\left(\frac{x}{\xi_1(\tau)}\right)$ определяются формулами (23) и выражаются через комбинации вырожденных гипергеометрических функций [13].

Из условия (7) получаем соотношение для нахождения параметра Λ :

$$\sum_{\gamma=1}^{\infty} \left[\lambda_1 U_{1,\gamma}(\tau) \frac{\partial K_{1,\gamma}(1)}{\partial y} - \lambda_2 U_{2,\gamma}(\tau) \frac{\partial K_{2,\gamma}(1)}{\partial y} \right] - \frac{\lambda_2 t_0}{a-1} - \lambda_1 t_e = \frac{1}{2} \sigma v \Lambda^2.$$

При $\tau = 0$ получим, что

$$\Lambda^2 = \frac{2}{v\sigma} \left(\frac{\lambda_2 t_0}{1-a} - \lambda_1 t_e \right). \quad (34)$$

С учетом того, что параметр Λ не зависит от времени τ , решение задачи (31–32) принимает вид:

$$U_{k,\gamma}(\tau) = \frac{H_{k,\gamma}}{\mu_{k,\gamma}^2} \left[\left(\frac{\xi_0^2}{\Lambda^2 \tau + \xi_0^2} \right)^{\left(\frac{\mu_{k,\gamma}}{\Lambda}\right)^2} - 1 \right].$$

Это решение соответствует случаю, когда $\tau \rightarrow 0$ и $\tau \rightarrow \infty$. При $\tau \rightarrow \infty$ для нахождения параметра Λ из условия (7) получается следующее соотношение:

$$\sum_{\gamma=1}^{\infty} \left[\lambda_1 \frac{H_{2,\gamma}}{\mu_{1,\gamma}^2} \frac{\partial K_{1,\gamma}(1)}{\partial y} - \lambda_2 \frac{H_{2,\gamma}}{\mu_{2,\gamma}^2} \frac{\partial K_{2,\gamma}(1)}{\partial y} \right] - \frac{\lambda_2 t_0}{a-1} - \lambda_1 t_e = \frac{1}{2} \sigma v \Lambda^2.$$

В данном случае, при $\tau \rightarrow \infty$, решение (33) стремится к автомодельному, которое будет иметь следующий вид:

$$t_k(x, \tau) = -\sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{H_{k,\gamma}}{\mu_{k,\gamma}^2} K_{k,\gamma}\left(\frac{x}{\Lambda\sqrt{\tau}}\right) + \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{\Lambda\sqrt{\tau}}\right) t_e & \text{при } k=1; \\ \left(\frac{x}{\Lambda\sqrt{\tau}} - 1\right) \frac{t_0}{a-1} & \text{при } k=2. \end{cases} \quad (35)$$

Представлением найденных значений Λ и $\mu_{k,\gamma}^2$ в (33) завершается решение поставленной задачи. В решении (33) присутствуют экспоненты с отрицательными показателями, что видно из формул (23), по которым можно судить о быстроте сходимости рядов.

ОБОСНОВАНИЕ ПОЛУЧЕННОГО РЕШЕНИЯ

При решении задачи (19–20), а значит, и (14–15), собственные функции определяются из однородных граничных условий вида (20), причем в первом из этих условий используется требование ограниченности при $z \rightarrow 0$ решения задачи. При этом свойства ортогональности собственных функций и вещественности собственных значений основываются на свойстве самосопряженности дифференциального оператора L уравнения (16) для класса функции, имеющих непрерывную вторую производную в промежутке (y_1, y_2) :

$$\int_{y_1}^{y_2} (fLg - gLf) dy = 0,$$

$$\text{где } LK_{k,\gamma}(y) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho_k(y) \frac{\partial K_{k,\gamma}(y)}{\partial y} \right].$$

Самосопряженные дифференциальные формы Lf и Lg удовлетворяют тождеству Лагранжа [19]:

$$fLg - gLf = [\rho W(g, f)],$$

$$\text{где } W(g, f) = \begin{vmatrix} g & f \\ g' & f' \end{vmatrix}, (g, f) \in C^2[y_1, y_2].$$

Тогда

$$\int_{y_1}^{y_2} (fLg - gLf) dy = \rho W(g, f) \Big|_{y_1}^{y_2}.$$

Если функция f и g удовлетворяют однородным граничным условиям (17), то оператор L будет самосопряженным за счет того, что

$$W(g, f) \Big|_{y_1}^{y_2} = 0.$$

Из теории задачи Штурма–Лиувилля [20–23] следует, что ряды (33) сходятся в среднем равномерно по τ , если интеграл

$$\int_{y_1}^{y_2} [T_k(y, \tau)]^2 \rho_k(y) dy < \infty$$

равномерно ограничен относительно τ , а функция $T_k(y, \tau)$ дважды непрерывно дифференцируема в $[y_1, y_2]$ и удовлетворяют граничным условиям задачи Штурма–Лиувилля (16–17). Сходимость в среднем означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{y_1}^{y_2} \left[T_k(y, \tau) - \sum_{\gamma=1}^n U_{k,\gamma}(\tau) K_{k,\gamma}(y) \right]^2 \times \rho_k(y) dy = 0, \quad (36)$$

то есть ортонормированная с весом $\rho_k(y)$ система собственных функций $K_{k,\gamma}(y)$ является полной [24] в рассматриваемом классе функций, которому принадлежит $T_k(y, \tau)$. Необходимым условием полноты системы функций $K_{k,\gamma}(y)$ является свойство замкнутости [24] этой системы, для которой выполняется равенство Парсевалля:

$$\int_{y_1}^{y_2} T_k^2(y, \tau) \rho_k(y) dy = \sum_{\gamma=1}^{\infty} U_{k,\gamma}^2(\tau),$$

доказываемое с помощью условия (36).

Если функция $T_k(y, \tau)$ удовлетворяет сформулированным требованиям, то формула (33) представляет обратное преобразование. Из единственности разложения (33) следует взаимно-однозначное соответствие между функциями $T_k(y, \tau)$ и $U_k(y, \tau)$. Поэтому, решив преобразованную задачу, как следствие, получаем решение исходной задачи.

ПОЛУЧЕНИЕ ЧИСЛОВЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для построения температурного поля в зоне промерзания согласно формуле (35) получается соотношение

$$t_1(x, \tau) = (1-y)t_e + t_e \beta_1 y e^{(1-y^2)\beta_1};$$

$$\sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{F\left(b_{1,\gamma}, \frac{5}{2}; \beta_1\right) F\left(b_{1,\gamma}, \frac{3}{2}; \beta_1 y^2\right)}{(1-b_{1,\gamma})b_{1,\gamma} F\left(b_{1,\gamma} + 1, \frac{5}{2}; \beta_1\right) \sigma_{1,\gamma}}, \quad (37)$$

где $y = \frac{x}{\Lambda\sqrt{\tau}}$, а величина $\sigma_{1,\gamma}$ является резуль-

татом дифференцирования $F\left(b_{1,\gamma}, \frac{3}{2}; \beta_1\right)$ по первому параметру

$$\sigma_{1,\gamma} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b_{1,\gamma})_n \beta_1^{n-1}}{(1,5)_n n!} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{b_{1,\gamma} + m},$$

$$\sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m + b_{1,\gamma}} = \psi(n + b_{1,\gamma}) - \psi(b_{1,\gamma}),$$

$\psi(b_{1,\gamma})$ есть пси-функция.

Пользуясь рекуррентным соотношением для ВГГФ [17] можно записать

$$\left(b_{1,\gamma} - \frac{3}{2}\right) F\left(b_{1,\gamma}, \frac{5}{2}; \beta_1\right) -$$

$$- b_{1,\gamma} F\left(b_{1,\gamma} + 1, \frac{5}{2}; \beta_1\right) + \frac{3}{2} F\left(b_{1,\gamma}, \frac{3}{2}; \beta_1\right) = 0.$$

С учетом первого из уравнений (24) получим

$$F\left(b_{1,\gamma} + 1, \frac{5}{2}; \beta_1\right) = \frac{b_{1,\gamma} - 1,5}{b_{1,\gamma}} F\left(b_{1,\gamma}, \frac{5}{2}; \beta_1\right).$$

Тогда формула (37) заметно упрощается:

$$t_1(x, \tau) = (1 - y)t_e - t_e \beta_1 y e^{(1-y^2)\beta_1} \times \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{F\left(b_{1,\gamma}, \frac{3}{2}; \beta_1 y^2\right)}{(1 - b_{1,\gamma})(1,5 - b_{1,\gamma})\sigma_{1,\gamma}}. \quad (38)$$

Для построения температурного поля в зоне охлаждения согласно формуле (35) запишем соотношение

$$t_2(x, \tau) = (y - 1) \frac{t_0}{a - 1} - \Lambda^{-2} e^{-\beta_2 y^2} \times \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{H_{k,\gamma}}{1 - b_{k,\gamma}} C_{2,\gamma}^{-1} \Delta F\left(b_{2,\gamma}, \frac{3}{2}; \beta_2 y^2\right). \quad (39)$$

Выражение для $H_{2,\gamma}$, данное в уравнении (31), может быть преобразовано к виду

$$H_{2,x} = C_{2,\gamma}^{-1} \frac{t_0 \Lambda^2}{6(1-a)} \times \left\{ \left[a^3 F\left(b_{2,\gamma}, \frac{5}{2}; \beta_2 a^2\right) - F\left(b_{2,\gamma}, \frac{5}{2}; \beta_2\right) \right] q - \frac{3a}{4\beta_2(1,5 - \beta_{2,\gamma})} \left[\frac{F\left(b_{2,\gamma} - \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}; \beta_2 a^2\right)}{-F\left(b_{2,\gamma} - \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}; \beta_2\right)} \right] p \right\}. \quad (40)$$

Что означают p и q указано в формулах (23), они включаются в нормирующие множители $C_{2,\gamma}^{-1}$. Формула (40) содержит две разности.

За счет применения рекуррентных соотношений для ВГГФ [17]

$$\begin{aligned} (1 + a - v)F(a, v; z) - aF(a + 1, v; z) + \\ + (v - 1)F(a, v - 1; z) &= 0; \\ vF(a, v; z) - vF(a - 1, v; z) - zF(a, v + 1; z) &= 0 \end{aligned} \quad (41)$$

ко второй разности с учетом второго из уравнений (24) выражение в правой части формулы (40) сворачивается в полные производные

$$H_{2,\gamma} = C_{2,\gamma}^{-1} \frac{t_0 \Lambda^2}{8(a-1)(1,5 - b_{2,\gamma})\beta_2} \times \left[a \Delta F'_y \left(b_{2,\gamma}, \frac{3}{2}; \beta a^2 \right) - \Delta F'_y \left(b_{2,\gamma}, \frac{3}{2}; \beta_2 \right) \right].$$

Выражения для нормирующих множителей $C_{k,\gamma}^{-1}$ также сворачиваются в полные производные

$$C_{1,\gamma}^2 = -\frac{e^{-\beta_1}}{4\beta_1} F'_y \left(b_{1,\gamma}, \frac{3}{2}; \beta_1 \right) \frac{\partial}{\partial b_{1,\gamma}} F \left(b_{1,\gamma}, \frac{3}{2}; \beta_1 \right);$$

$$C_{2,\gamma}^2 = -\frac{e^{-\beta}}{4\beta_2} \Delta F'_y \left(b_{2,\gamma}, \frac{3}{2}; \beta_2 \right) \frac{\partial}{\partial b_{2,\gamma}} F \left(b_{2,\gamma}, \frac{3}{2}; \beta_2 \right).$$

С учетом полученных соотношений формула (39) преобразуется к виду

$$t_2(x, \tau) = (y - 1) \frac{t_0}{a - 1} - \frac{t_0 \beta_1 \exp\left[(1 - y^2)\beta_2\right]}{2(a - 1)} \times \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{\Delta F\left(b_{2,\gamma}, \frac{3}{2}; \beta_2 y^2\right)}{(1 - b_{2,\gamma})(1,5 - b_{2,\gamma})\sigma_{2,\gamma}} \times \left[\frac{\Delta F'_y \left(b_{2,\gamma}, \frac{3}{2}; \beta_2 a^2 \right)}{\Delta F'_y \left(b_{2,\gamma}, \frac{3}{2}; \beta_2 \right)} - 1 \right], \quad (42)$$

где $y = \frac{x}{\Lambda\sqrt{\tau}}$, а величина $\sigma_{2,\gamma}$ является результатом дифференцирования $\Delta F\left(b_{2,\gamma}, \frac{3}{2}; \beta_2\right)$ по первому параметру

$$\begin{aligned} \sigma_{2,\gamma} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(b_{2,\gamma})_n}{(1,5)_n} (a^{2n+1} q_0 - q) \right. \\ &\times \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m + b_{2,\gamma}} - a \frac{(b_{2,\gamma} - 0,5)_n}{(0,5)_n} \times \\ &\times (a^{2n-1} p_0 - p) \times \left. \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m + b_{2,\gamma} - 0,5} \right] \times \frac{\beta_2^n}{n!}; \end{aligned}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m + b_{2,\gamma}} = \psi(n + b_{2,\gamma}) - \psi(b_{2,\gamma}),$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m + b_{2,\gamma} - 0,5} = \psi(n + b_{2,\gamma} - 0,5) - \psi(b_{2,\gamma} - 0,5), \quad (43)$$

величины p, q, p_0, q_0 указаны в формулах (23),

$$\begin{aligned} \Delta F'_y \left(b_{2,\gamma}, \frac{3}{2}; \beta_2 y^2 \right) &= 4\beta_2 \left[\frac{q}{4\beta_2} F \left(b_{2,\gamma}, \frac{3}{2}; \beta_2 y^2 \right) - \right. \\ &- \left(\frac{3}{2} - b_{2,\gamma} \right) \frac{q}{3} y^2 F \left(b_{2,\gamma}, \frac{5}{2}; \beta_2 y^2 \right) + \\ &+ a(1 - b_{2,\gamma}) p y F \left(b_{2,\gamma} - \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \beta_2 y^2 \right) \left. \right]. \end{aligned}$$

Начиная с $\gamma = 4$ в формуле (43) используется первое из рекуррентных соотношений (41). На его основе для производных по первому параметру от ВГГФ получаются новые рекуррентные формулы.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} - b_{2,\gamma}\right)^2 \frac{\partial}{\partial b_{2,\gamma}} F\left(b_{2,\gamma}, \frac{3}{2}; \beta_2 a^2\right) = \\ & \frac{3}{2} F\left(b_{2,\gamma} + 2, \frac{3}{2}; \beta_2 a^2\right) - \left(\frac{3}{2} + \beta_2 a^2\right) \times \\ & \times F\left(b_{2,\gamma} + 1, \frac{3}{2}; \beta_2 a^2\right) + \left(\frac{1}{2} - b_{2,\gamma}\right) \times \\ & \times \left\{ b_{2,\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\psi(n+2+b_{2,\gamma}) - \psi(2+b_{2,\gamma}) \right] \frac{(2+b_{2,\gamma})_n}{(1,5)_n} \cdot \frac{(\beta_2 a^2)^n}{n!} \right. \\ & \left. - \left(\frac{1}{2} + 2b_{2,\gamma} + \beta_2 a^2\right) \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\psi(n+1+b_{2,\gamma}) - \psi(1+b_{2,\gamma}) \right]}{(1+b_{2,\gamma})_n} \cdot \frac{(\beta_2 a^2)^n}{n!} \right\}; \\ & b_{2,\gamma}^2 \frac{\partial}{\partial b_{2,\gamma}} F\left(b_{2,\gamma} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \beta_2 a^2\right) = \frac{1}{2} F\left(b + \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; \beta_2 a^2\right) - \\ & - \left(\frac{1}{2} + \beta_2 a^2\right) F\left(b_{2,\gamma} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \beta_2 a^2\right) - \\ & - b_{2,\gamma} \left\{ \left(b_{2,\gamma} + \frac{1}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\psi\left(n + \frac{3}{2} + b_{2,\gamma}\right) - \psi\left(\frac{3}{2} + b_{2,\gamma}\right) \right] \times \right. \\ & \times \frac{(1,5+b_{2,\gamma}) (\beta_2 a^2)^n}{(0,5)_n n!} - \left(\frac{1}{2} + 2b_{2,\gamma} + \beta_2 a^2\right) \times \\ & \left. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2} + b_{2,\gamma}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + b_{2,\gamma}\right) \right] \times \right. \\ & \left. \times \frac{(0,5+b_{2,\gamma}) (\beta_2 a^2)^n}{(0,5)_n n!} \right\}. \end{aligned}$$

Десятикратное применение этих формул влечет потерю примерно одной значащей цифры [17], но согласно расчетам это не повлияет на сходимость ряда (42) в силу его достаточно быстрой сходимости. Воспользовавшись асимптотическими представлением ВГГФ можно дать оценку суммы рядов в формулах (38), (42). Когда $\beta_k y^2 < 10$ и $b_{k,\gamma} \rightarrow -\infty$ имеет место следующая асимптотическая формула [17]

$$\begin{aligned} & F\left(b, \frac{3}{2}; \beta y^2\right) = \exp\left(\frac{1}{2} \beta y^2\right) \times \\ & \times \frac{\sin\left(y\sqrt{(3-4b)\beta}\right)}{y\sqrt{(3-4b)\beta}} \left[1 + O\left(\left|\frac{3}{4} - b\right|^{-0,5}\right) \right]. \end{aligned}$$

Тогда выражение под знаком суммы ряда в формуле (38) преобразуется так:

$$\begin{aligned} & \frac{F\left(b_{1,\gamma}, \frac{3}{2}; \beta_1 y^2\right)}{(1-b_{1,\gamma})(1,5-b_{1,\gamma})\sigma_{1,\gamma}} = -\frac{\exp[0,5\beta_1(y^2-1)]}{2y} \times \\ & \times \frac{\sqrt{3-4b_{1,\gamma}}}{(1-b_{1,\gamma})(1,5-b_{1,\gamma})} \sin\left(\sqrt{(3-4b_{1,\gamma})\beta_1} y\right), \end{aligned}$$

без учета порядка малости $O\left(\left|\frac{3}{4} - b_{1,\gamma}\right|^{-0,5}\right)$ в

ВГГФ. Характеристическое уравнение (24) при этом принимает вид

$$\sin\sqrt{(3-4b_{1,\gamma})\beta_1} = 0,$$

решения которого при $b_{1,\gamma} \rightarrow -\infty$

$$-b_{1,\gamma} = \frac{1}{4} \left[\frac{(\pi\gamma)^2}{\beta_1} - 3 \right], \quad \gamma \in N/y.$$

Подставляя их в формулу (38), имеем

$$\frac{\sqrt{3-4b_{1,\gamma}}}{(1-b_{1,\gamma})(1,5-b_{1,\gamma})} \sim \frac{1}{\gamma^3}.$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F\left(b_{1,\gamma}, \frac{3}{2}; \beta_1 y^2\right)}{(1-b_{1,\gamma})(1,5-b_{1,\gamma})\sigma_{1,\gamma}} \right| \leq \\ & \leq \frac{\exp[0,5\beta_1(y^2-1)]}{2y} \frac{\sqrt{3-4b_{1,\gamma}}}{(1-b_{1,\gamma})(1,5-b_{1,\gamma})}, \end{aligned}$$

откуда следует, что при $b_{1,\gamma} \rightarrow -\infty$ ($\gamma \rightarrow \infty$) решение (38) сходится не хуже числового ряда $\sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma^3}$. То же самое утверждение имеет место и

для решения (42) в зоне охлаждения. Таким образом, получены окончательные формулы (38), (42), на основании которых нужно представить графики изменения температуры по пространственной и временной координатам. Сначала определимся с исходными данными. Значение безразмерного параметра теплового влияния для фазового перехода «вода-лед» можно взять равным $a = 4$ [12]. Для краевых условий зададим следующий температурный диапазон: $t_e = -20^\circ \text{C}$, $t_0 = +10^\circ \text{C}$.

Теплофизические характеристики будем задавать в интернациональной системе: $\sigma = 335 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$; $a_1 = 1,255 \cdot 10^{-6} \frac{\text{М}^2}{\text{с}}$; $a_2 = 0,151 \times 10^{-6} \frac{\text{М}^2}{\text{с}}$; $\lambda_1 = 2,44 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$; $\lambda_2 = 0,63 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$;

$\nu = 0,917 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{М}^3}$. Прежде всего найдем значение параметра Λ по формуле (34).

$$\Lambda^2 = 0,30405 \cdot 10^{-6} \frac{\text{М}^2}{\text{с}}$$

и получим значения безразмерных параметров β_k : $\beta_1 = 0,06057$; $\beta_2 = 0,5034$.

Таблица 1

γ	$b_{1,\gamma}$	$\sigma_{1,\gamma}$	$b_{2,\gamma}$	$b_{2,\gamma}$	G_γ
1	-39,99063660	0,012651708	-0,551623071	-235,7559131	-82,51310488
2	-162,2002809	-0,003162886	-2,311227245	53,60204448	73,24499588
3	-365,8821689	0,001405588	-5,038454622	-22,71512493	-193,5626213
4	-651,0367001	-0,000781960	-8,848920381	12,59507523	187,5437346
5	-1017,663924	0,000495600	-13,74908758	-8,015189847	-147,7108239
6	-1465,763853	-0,000815000	-19,73895690	5,476158764	175,4499255
7	-1995,336490	-0,011084899	-26,81833274	-8,501136619	-187,1514118
8	-2606,381838	-0,037830000	-34,98709674	440,7455479	159,9870429
9	-3298,899987	1,120000000	-44,24518293	-2108,65151	-176,2078465
10	-4072,890668	58,3034344	-54,59255349	$5,025477 \cdot 10^5$	182,5251447
11	-4928,354152	7176,476967	-66,02918587	$-2,659997 \cdot 10^7$	-164,3589950

Формулы (26) нахождения собственных чисел с точностью до порядка $O\left(\frac{1}{\gamma^8}\right)$ преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
 (1-b_{1,\gamma})\left(\frac{\Lambda}{a_1}\right)^2 &= (\pi\gamma)^2 + \beta_1 + \frac{1}{3}\beta_1^2 + \\
 &+ \frac{1}{\gamma^2}\left(\frac{1}{45} + \frac{1}{12\gamma^2} + \frac{1}{16\gamma^4}\right)\beta_1^4 \\
 &+ + \frac{1}{9\gamma^4}\left(\frac{2}{105} + \frac{1}{2\gamma^2}\right)\beta_1^6 + \frac{2}{2835\gamma^6}\beta_1^8; \\
 (1-b_{2,\gamma})\left(\frac{\Lambda}{a_2}\right)^2 &= \frac{1}{9}(\pi\gamma)^2 + \beta_2 + 7\beta_2^2 + \\
 &+ \frac{1}{\gamma^2}\left(\frac{24}{5} + \frac{1}{12\gamma^2} + \frac{1}{16\gamma^4}\right)\beta_2^4 + \\
 &+ \frac{3}{\gamma^4}\left(\frac{99}{70} + \frac{4}{\gamma^2}\right)\beta_2^6 + \frac{2151}{80\gamma^6}\beta_2^8.
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

При данных значениях параметра β_k собственные числа задачи (21–22) будем находить из уравнений (24) с использованием программной системы Maple. В зоне промерзания для вычисления собственных чисел можно пользоваться и уравнением (24), и формулой (44), причем результаты в пределах заданной точности будут совпадать даже в том случае, если в формуле (44) мы ограничимся первыми тремя слагаемыми. Значения величин $\sigma_{k,\gamma}$ в формулах (38), (42) также вычисляем в программной системе Maple. Кроме того, воспользуемся обозначением

$$G_\gamma = a \frac{\Delta F'_y\left(b_{2,\gamma}, \frac{3}{2}; \beta_2 a^2\right)}{\Delta F'_y\left(b_{2,\gamma}, \frac{3}{2}; \beta_2\right)} - 1$$

и заполним табл. 1. Основываясь на этой вспомогательной таблице, составим табл. 2 изменения температуры вдоль безразмерной пространственной координаты в момент времени $\tau_0 = 10$ ч (при этом значении $y = 1$ будет соответствовать расстоянию $x = 0,10462$ м) и табл. 3 изменения температуры вдоль временной координаты на расстоянии $x_0 = 3,3084 \cdot 10^{-2}$ м от начала координат. В эту же таблицу внесем зависимость положения свободной границы от времени, а также соответствующие значения безразмерной пространственной координаты. Все значения температуры даются в градусах Цельсия ($^{\circ}\text{C}$), расстояние – в метрах (м), а время – в часах (ч). При этом вычисления производятся в СИ. Заметим, что ряды в формулах (38), (42) достаточно быстро сходятся. Скажем, для получения значения температуры в $^{\circ}\text{C}$ с точностью до 10^{-2} в зоне промерзания достаточно четырех, а в зоне охлаждения – восьми первых слагаемых. По составленным таблицам строим графики распределения температурного поля вдоль пространственной и временной координат, а также график зависимости положения свободной границы от времени (рис. 1–3).

Результаты данной работы могут быть использованы во многих отраслях народного хозяйства, где необходимо решение задач, связанных с процессами затвердевания или плавления.

ления – машиностроительной, автомобильной, авиационной промышленности; в развитии сырьевой базы металлургической, топливной, химической промышленности; при сооружении гидроэлектростанций, метрополитенов, баз и хранилищ различного назначения. Проблема совершенствования технологических процессов в данных отраслях промышленности неизбежно приводит к задачам интенсификации процессов механической обработки материалов. А это требует выявления влияния режимных, технологических, конструктивных факторов на тепловое состояние изделий. Например, для повышения надежности и безопасности функционирования летательных аппаратов необходима информация о внутреннем температурном режиме вдоль всего ланжерона с учетом фазового перехода, происходящего в период изготовления изделия. Возьмем основные виды работ по подземному строительству. Они осуществляются в сложных метеорологических и гидрогеологических условиях, при которых всегда имеют место такие процессы, как промерзание и оттаивание водоносного грунта. Построение температурных полей для таких процессов является весьма актуальной задачей, имеющей большое практическое значение.

ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Методом разложения по собственным функциям на основе интегральных преобразований и решения соответствующей спектральной

задачи получено автомодельное аналитическое решение нестационарной одномерной задачи теплообмена с фазовым переходом при $\tau \rightarrow \infty$.

2. Решению задачи соответствует параболический закон движения свободной границы: $\xi_1(\tau) = \sqrt{\Lambda^2 \tau + \xi_0^2}$, где постоянный параметр Λ находится из условия Стефана. При данных краевых условиях и теплофизических характеристиках скорость движения свободной границы определяется соотношением $\xi_1(\tau) = 0,5514 \cdot 10^{-3} \sqrt{\tau}$ в Международной системе СИ единиц физических величин.

3. Собственные значения оператора Штурма-Лиувилля зависят от параметра Λ . В зависимости от величины $\beta_k = (4a_k)^{-1} \Lambda^2$ собственные числа находятся тремя различными методами, два из которых асимптотические, а два из них сочетаются с численными методами.

4. На основе асимптотического представления по первому параметру ВГГФ удается установить, что ряды в полученных решениях на бесконечности сходятся не хуже числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3}$. Численные эксперименты показывают,

что в зоне промерзания для получения значения температуры в градусах Цельсия с точностью до 10^{-2} достаточно четырех слагаемых, а в зоне охлаждения – восьми слагаемых.

Таблица 2

y	$t_1(y, \tau_0)$	y	$t_2(y, \tau_0)$	y	$t_2(y, \tau_0)$	y	$t_2(y, \tau_0)$
0,0	-20,00000000	1,0	0,000000000	2,0	8,718479689	3,0	9,838480529
0,1	-17,59810588	1,1	1,703297768	2,1	8,740267435	3,1	9,917735615
0,2	-15,61189533	1,2	3,210989542	2,2	8,763608958	3,2	10,01492898
0,3	-13,63326830	1,3	4,507429355	2,3	8,846878326	3,3	10,11085213
0,4	-11,66085318	1,4	5,609424009	2,4	9,005563962	3,4	10,17569521
0,5	-9,697227174	1,5	6,543905060	2,5	9,212867772	3,5	10,18639913
0,6	-7,743456676	1,6	7,323484020	2,6	9,420658622	3,6	10,14038258
0,7	-5,795889319	1,7	7,938320581	2,7	9,587881460	3,7	10,05929434
0,8	-3,854869694	1,8	8,370183465	2,8	9,700597157	3,8	9,982033493
0,9	-1,925009667	1,9	8,618348478	2,9	9,774103999	3,9	9,951289471
1,0	0,000000000	2,0	8,718479689	3,0	9,838480529	4,0	10,00000000

Таблица 3

τ	$t(x_0, \tau)$	$\xi_1(\tau) = \Lambda\sqrt{\tau}$	$y = 60/\sqrt{\tau}$
1	0,000000000	0,033084000	1,000000000
2	-5,657672112	0,046787842	0,70710678
3	-8,185291291	0,057303169	0,57735031
4	-9,697227174	0,066168000	0,50000000
5	-10,73245396	0,073978073	0,44721362
6	-11,49850489	0,081038919	0,40824830
7	-12,09486237	0,087532036	0,37354369
8	-12,57610973	0,093575683	0,35355340
9	-12,97505034	0,099252000	0,33333333
10	-13,31274403	0,104620794	0,31622778
11	-13,60341043	0,109727215	0,30151135
12	-13,85704181	0,114606338	0,28867514
13	-14,08089164	0,119286058	0,27735010
14	-14,28036923	0,123788993	0,26726124
15	-14,45960152	0,128133781	0,25819889
16	-14,62179901	0,132336000	0,25000000
17	-14,76950180	0,136408827	0,24253563
18	-14,90474940	0,140363525	0,23570226
19	-15,02920080	0,144209813	0,22941573
20	-15,14422118	0,147956146	0,22360680
21	-15,25094551	0,151609934	0,21821789
22	-15,35032627	0,155177715	0,21320072
23	-15,44316948	0,158665290	0,20851441
24	-15,53016245	0,162077837	0,20412415
25	-15,61189533	0,165420000	0,20000000

5. Из графика распределения температурного поля по пространственной координате видно, то температурная кривая в зоне охлаждения выходит за пределы граничных условий, т. е. $t(x, \tau) > t_0$. Это наглядно демонстрирует тот факт, что процесс фазового перехода сопровождается выделением теплоты при кристаллизации, что невозможно продемонстрировать в случае классических постановок задачи Стефана.

Как видно из (38) и (42), нами получены компактные вычислительные формулы, и они содержат ряды, которые хорошо сходятся, что является очень удобным при построении температурных полей.

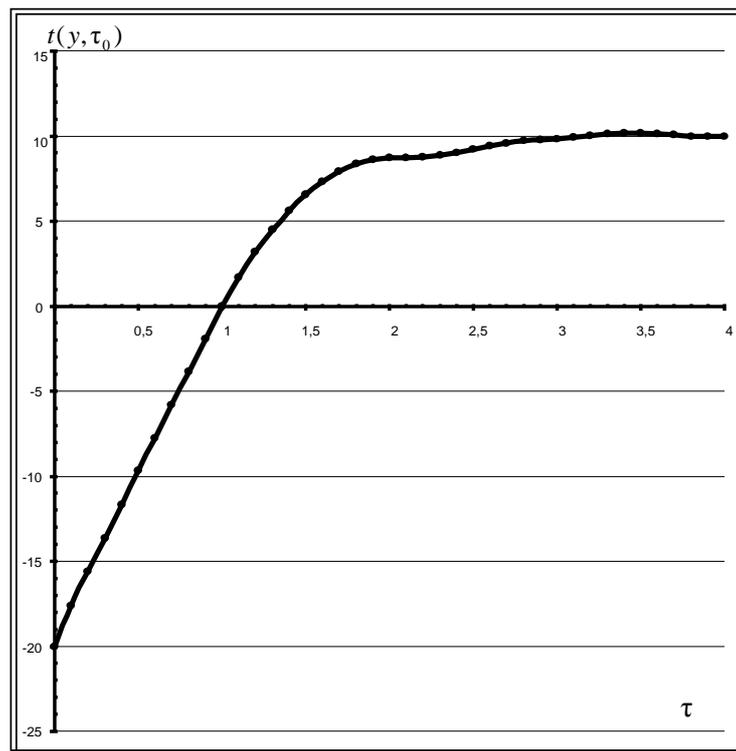


Рис. 1. Кривая распределения температуры $t(y, \tau_0)$ (в $^{\circ}\text{C}$) по безразмерной пространственной координате y в момент времени $\tau = 10$ ч

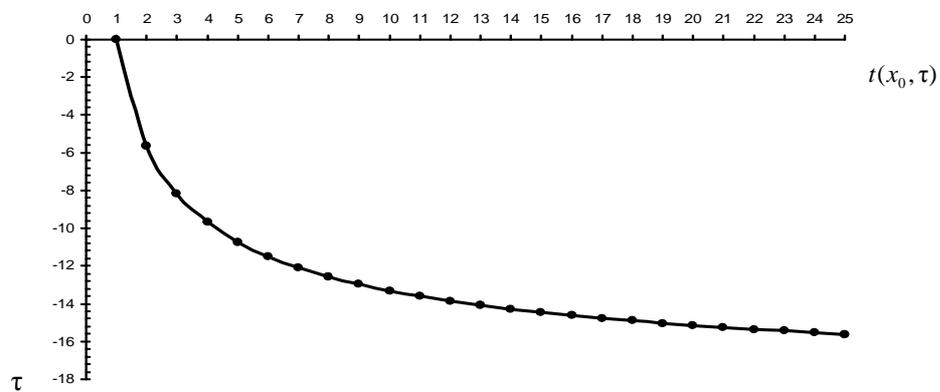


Рис. 2. Кривая распределения температуры $t(x_0, \tau)$ (в $^{\circ}\text{C}$) по временной координате τ (в ч.) на расстоянии $x_0 = 0,33084$ м от начала координат

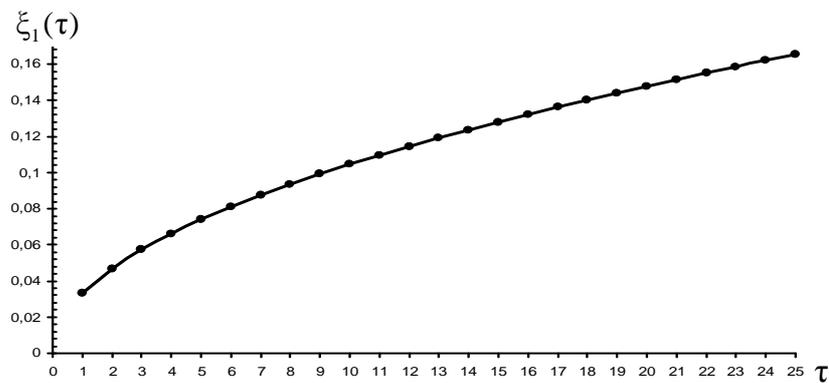


Рис. 3. Кривая зависимости положения свободной границы $\xi_1(\tau)$ (в м.) от времени τ (в ч.)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Рубцов Н. А., Слепцов С. Д., Савинова Н. А.** Численное моделирование однофазной задачи Стефана в слое с прозрачными и полупрозрачными границами // Прикладная механика и техническая физика. 2006. Т. 47, № 3. С. 84–91.
2. **Dancer E. N., Du Yihong.** A uniqueness theorem for a free boundary problem // Proc. Amer. Math. Soc. 2006. V. 134, № 11. P. 3223–3230.
3. **Borisovich A., Friedman A.** Symmetry-breaking bifurcations for free boundary problems // Indiana Univ. Math. 2005. V. 54, № 3. P. 927–947.
4. **Baconneau O., Lunardi A.** Smooth solutions to a class of free boundary parabolic problems // Trans. Amer. Math. Soc. 2004. V. 356, № 3. P. 987–1007.
5. **Карташов Э. М., Рубин А. Г., Ожерелкова Л. М.** Проблема Стефана // Математические модели физических процессов: Сб. науч. тр. 10 Междунар. конф. Таганрог, 2004. С. 88–92.
6. **Калиев И. А., Вагапова Э. В.** Задача Стефана как коэффициентная обратная задача // Современные проблемы физики и математики: Тр. Всероссийск. науч. конф. 2004. Т. 1. Уфа, 2004. С. 43–49.
7. **Ушакова В. И., Ключков А. В.** Поведение решений однофазной задачи Стефана при больших значениях времени // Известия вузов. Математика. 2006. № 11. С. 55–60.
8. **Бижанова Г. И., Солонников В. А.** О задачах со свободными границами для параболических уравнений второго порядка // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, № 6. С. 98–139.
9. **Карташов Э. М.** Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущимися границами // Изв. РАН (Сер. Энергетика). 1999. № 5. С. 3–34.
10. **Шафеев М. Н.** Решение одной плоской задачи Стефана методом ВГПП // Инженерно-физический журнал. 1978. Т. 34, № 4. С. 713–722.
11. **Шафеев М. Н.** Решение одной нелинейной задачи методом ВГПП // Известия вузов. Математика. 1980. № 12(233). С. 73–75.
12. **Хакимов Х. Р.** Замораживание грунтов в строительных целях. М.: Госстройиздат, 1962. 257 с.
13. **Диккий Л. А.** Формулы следов для дифференциальных операторов Штурма-Лиувилля // Успехи математических наук. 1958. Т. 13, № 3(81). С. 111–143.
14. **Федорнюк М. В.** Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.
15. **Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.** Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986. 800 с.
16. **Зайнуллин Р. Г.** Об одном аналитическом подходе к решению одномерной задачи переноса тепла со свободными границами // Известия вузов. Математика. 2008. № 2. С. 24–31.
17. **Абрамович М., Стиган И.** Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.
18. **Слейтер Л. Д.** Вырожденные гипергеометрические функции. М.: ВЦ АН СССР, 1968. 178 с.
19. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.
20. **Коддингтон Е. А., Левинсон Н.** Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958. 474 с.
21. **Левитан Б. М.** Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка. М.-Л.: Техтеоретиздат, 1950. 159 с.
22. **Березанский Ю. М.** Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965. 798 с.
23. **Котляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.** Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.
24. **Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.** Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984. 344 с.

ОБ АВТОРЕ



Зайнуллин Рифат Гильметдинович, ст. преп. каф. математики. Дипл. физик (КГУ, 1982). Иссл. в обл. разработки аналитич. методов решения спектральных задач с фаз. переходом для уравнений парабол, типа, иссл. и матем. моделирование процессов диффузии углеводорода в металл.