ISSN 1992-6502 (Print) Вестник УГАТУ ISSN 2225-2789 (Online)
2017. Т. 21, № 4 (78). С. 41–49 http://journal.ugatu.ac.ru

УДК 534.1

Интегральный метод сплайнов для расчета частот собственных колебаний стержня и его возможности

В. П. Павлов

victor.pavlov.51@yandex.ru

ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

Поступила в редакцию 01.10.2017

Аннотация. Рассматривается методика применения интегрального метода сплайн-функций степени 5 для расчета частот собственных колебаний прямого стержня при различных способах закрепления его концов. На примере решения тестовых задач, имеющих точное аналитическое решение, анализируются возможности предлагаемого метода. Показано, что реализованный алгоритм применения интегрального метода сплайн-функций степени 5 характеризуется четвертым порядком сходимости и позволяет определять значения собственных частот на современных компьютерах с точностью до четырнадцати значащих цифр.

Ключевые слова: стержни; колебания; частоты собственных колебаний; сплайны; математическое моделирование.

ВВЕДЕНИЕ

При создании современной техники необходимо выполнять статические и динамические расчеты конструкций с максимальной точностью. В связи с этим актуальной остается разработка максимально точных численные методов решения задач механики деформируемого твердого тела.

В работах [1–4] изложен метод расчета частот собственных поперечных колебаний стержней, базирующийся на алгебраических сплайнах степени 5 и реализующий метод коллокаций, в котором дифференциальное уравнение удовлетворяется в узлах сплайна. Данный метод, обозначаемый МСК5, имеет 2-й порядок сходимости и обеспечивает относительную погрешность расчета частот собственных колебаний по первым десяти формам не выше $1\cdot10^{-6}$.

В данной статье излагается метод, базирующийся на алгебраических сплайнах степени 5, но уже в интегральной форме, что позволяет достигнуть более высокую по сравнению с МСК5 точность. Как показывается в данной статье, интегральный метод сплайнов имеет 4-й порядок сходимости и обеспечивает относительную погрешность расчета частот собственных колебаний по первым десяти формам не выше $1\cdot10^{-10}$. Предлагаемый метод далее будем называть интегральным методом сплайнов и обозначать МСИ5.

Автор считает, что метод МСИ5 весьма перспективен для его применения при расчете частот собственных колебаний стержневых систем различной конфигурации, и для обоснования этого утверждения написана данная статья, в которой на основе решения ряда тестовых задач излагаются возможности предлагаемого метода.

Возможности предлагаемого метода оцениваются на тестовой задаче о свободных поперечных колебаний прямого однородного стержня с постоянными жестко-

«Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Башкортостан в рамках научного проекта №_17-48-020824_р_а».

стью $EI = \text{const}$ и погонной массой $\mu = \text{const}$, традиционно описываемых дифференциальным уравнением четвертого порядка [5]:

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \qquad (1)$$

где $w = w(x,t)$ – функции от координаты x и времени t для поперечных перемещений точек осевой линии стержня; $\mu = \mu(x)$ – масса единицы длины стержня; E – модуль упругости материала; I – момент инерции поперечного сечения стержня относительно центральной оси сечения, перпендикулярной к плоскости колебаний.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО МЕТОДА СПЛАЙНОВ СТЕПЕНИ 5 ДЕФЕКТА 1

При построении сплайна степени 5 дефекта 1 [1–4, 6–14] на отрезке $[a, b]$ формируется сетка Δ:

$$\Delta: \quad a = x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b, \qquad (2)$$

имеющая N узлов. На данной сетке строится сплайн-функция $\boldsymbol{W}_{5,1}(x)$ степени 5 дефекта 1, имеющая $N_s = N + 4$ степеней свободы.

В пределах каждого отрезка $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1,\ldots,N-1$ сплайн-функция $\boldsymbol{W}_{5,1}(x)$ является многочленом пятой степени

$$\begin{cases} \boldsymbol{W}_{5,1}(x) = \sum\limits_{\alpha=0}^{5} a_\alpha^{(i)}(x - x_i)^\alpha, \\ \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1,\ldots,N-1. \end{cases} \qquad (3)$$

Согласно [1–4, 8] параметры, определяющие сплайн, сведены в вектор-столбец $\boldsymbol{Q}$ из $N_s = N + 4$ параметров сплайна:

$$\boldsymbol{Q} = (q_k, \quad k = 1,2,\ldots,N+4)^T \qquad (4)$$

где

$$\begin{cases} q_1 = \boldsymbol{W}_{5,1}(x_1), \qquad q_2 = \dfrac{d\boldsymbol{W}_{5,1}(x_1)}{dx}, \\ q_3 = \dfrac{d^2\boldsymbol{W}_{5,1}(x_1)}{dx^4}, \quad q_4 = \dfrac{d^3\boldsymbol{W}_{5,1}(x_1)}{dx^3}, \\ \{q_{i+4} = \dfrac{d^4\boldsymbol{W}_{5,1}(x_i)}{dx^4}, \quad i = 1,2,\ldots,N. \end{cases} \qquad (5)$$

В узлах сетки Δ рассматриваются значения сплайн-функции $\boldsymbol{W}_{5,1}(x)$ и ее производных до четвертого порядка включительно:

$$\begin{cases} f_i = \boldsymbol{W}_{5,1}(x_i), \\ f_i^s = \dfrac{d^s\boldsymbol{W}_{5,1}(x_i)}{dx^s}, \quad s = 1,\ldots,4, \\ \qquad\qquad\qquad i = 1,\ldots,N. \end{cases} \qquad (6)$$

Из них формируются векторы-столбцы:

$$\begin{cases} \boldsymbol{V}_f = (f_i, \quad i = 1,\ldots,N)^T, \\ \boldsymbol{V}_{df} = (f_i^1, \quad i = 1,\ldots,N)^T, \\ \boldsymbol{V}_{dsf} = (f_i^s, \quad i = 1,\ldots,N)^T, \\ \qquad\qquad s = 2,\ldots,4. \end{cases} \qquad (7)$$

Векторы узловых значений сплайн-функции $\boldsymbol{W}_{5,1}(x)$ и ее производных определим согласно [8] матричными выражениями:

$$\begin{cases} \boldsymbol{V}_f = \boldsymbol{M}_f\boldsymbol{Q}, \\ \boldsymbol{V}_{df} = \boldsymbol{M}_{df}\boldsymbol{Q}, \\ \boldsymbol{V}_{d2f} = \boldsymbol{M}_{d2f}\boldsymbol{Q}, \\ \boldsymbol{V}_{d3f} = \boldsymbol{M}_{d3f}\boldsymbol{Q}, \\ \boldsymbol{V}_{d4f} = \boldsymbol{M}_{d4f}\boldsymbol{Q}, \end{cases} \qquad (8)$$

где $\boldsymbol{M}_f, \boldsymbol{M}_{df}, \boldsymbol{M}_{d2f}, \boldsymbol{M}_{d3f}, \boldsymbol{M}_{d4f}$ – прямоугольные матрицы размера $N \times (N+4)$, формируемые по методике, изложенной в [8].

Определим на отрезках $x_i \le x \le x_{i+1}$, $i = 1,2,\ldots,N-1$ интегралы от сплайн-функции $\boldsymbol{W}_{5,1}(x)$ и ее производных до четвертого порядка включительно:

$$\begin{cases} J_i^w = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \boldsymbol{W}_{5,1}(x)dx, \\ J_i^{dw} = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \dfrac{d\boldsymbol{W}_{5,1}(x)}{dx}dx, \\ J_i^{d2w} = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \dfrac{d^2\boldsymbol{W}_{5,1}(x)}{dx^2}dx, \\ J_i^{d3w} = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \dfrac{d^3\boldsymbol{W}_{5,1}(x)}{dx^3}dx, \\ J_i^{d4w} = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \dfrac{d^4\boldsymbol{W}_{5,1}(x)}{dx^4}dx, \\ \qquad i = 1,2,\ldots,N-1. \end{cases} \qquad (9)$$

Из значений интегралов $J_i^W, J_i^{dW}, J_i^{d2W}, J_i^{d3W}, J_i^{d4W}$ сформируем векторы-столбцы:

$$\begin{cases} \boldsymbol{J}_W = (J_i^W, \quad i = 1,...,N-1)^T, \\ \boldsymbol{J}_{dW} = (J_i^{dW}, \quad i = 1,...,N-1)^T, \\ \boldsymbol{J}_{d2W} = (J_i^{d2W}, \quad i = 1,...,N-1)^T, \\ \boldsymbol{J}_{d3W} = (J_i^{d3W}, \quad i = 1,...,N-1)^T, \\ \boldsymbol{J}_{d4W} = (J_i^{d4W}, \quad i = 1,...,N-1)^T, \end{cases} \tag{10}$$

Векторы $\boldsymbol{J}_W$, $\boldsymbol{J}_{dW}$, $\boldsymbol{J}_{d2W}$, $\boldsymbol{J}_{d3W}$, $\boldsymbol{J}_{d4W}$ определим матричными выражениями:

$$\begin{cases} \boldsymbol{J}_W = \boldsymbol{R}_W \boldsymbol{Q}, \\ \boldsymbol{J}_{dW} = \boldsymbol{R}_{dW} \boldsymbol{Q}, \\ \boldsymbol{J}_{d2W} = \boldsymbol{R}_{d2W} \boldsymbol{Q}, \\ \boldsymbol{J}_{d3W} = \boldsymbol{R}_{d3W} \boldsymbol{Q}, \\ \boldsymbol{J}_{d4W} = \boldsymbol{R}_{d4W} \boldsymbol{Q}, \end{cases} \tag{11}$$

где $\boldsymbol{R}_W, \boldsymbol{R}_{dW}, \boldsymbol{R}_{d2W}, \boldsymbol{R}_{d3W}, \boldsymbol{R}_{d4W}$ – прямоугольные матрицы размера $(N-1)\times(N+4)$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{R}_W = (R_{i,j}^W, \ i = \overline{1, N-1}, \ j = \overline{1, N+4}), \\ \boldsymbol{R}_{dW} = (R_{i,j}^{dW}, \ i = \overline{1, N-1}, \ j = \overline{1, N+4}), \\ \boldsymbol{R}_{d2W} = (R_{i,j}^{d2W}, \ i = \overline{1, N-1}, \ j = \overline{1, N+4}), \\ \boldsymbol{R}_{d3W} = (R_{i,j}^{d3W}, \ i = \overline{1, N-1}, \ j = \overline{1, N+4}), \\ \boldsymbol{R}_{d4W} = (R_{i,j}^{d4W}, \ i = \overline{1, N-1}, \ j = \overline{1, N+4}). \end{cases} \tag{12}$$

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЯ С ПОСТОЯННЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Для оценки точности интегрального метода сплайнов МСИ5 в сравнении с методом сплайнов по схеме метода коллокаций МСК5, реализованного в работах [1–4], выполним на основе МСИ5 расчеты частот собственных поперечных колебаний прямого стержня при различных способах его закрепления по концам. Рассмотрим тот же стержень, что и в работе [1], имеющий длину $l = 2$ м и прямоугольное поперечное сечение шириной $b = 0{,}03$ м и высотой $h = 0{,}02$ м. Модуль упругости материала стержня $E = 2\cdot 10^{11}$ Па, плотность $\rho = 7{,}85\cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение дифференциального уравнения (1) ищем в вид [5]:

$$w = W(x)\sin\omega t, \tag{13}$$

где $W(x)$ – форма колебаний; ω – частота собственных колебаний.

После подстановки (13) в (1) запишем

$$EI\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}\sin\omega t - \mu\omega^2 \sin\omega t W = 0. \tag{14}$$

После преобразования из (14) получаем:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - a^4 W = 0, \tag{15}$$

где

$$a^4 = \frac{\mu\omega^2}{EI}. \tag{16}$$

Согласно [5] общее решение уравнения (15) имеет вид:

$$W = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax + \\ + C_3 e^{ax} + C_4 e^{-ax}, \tag{17}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – постоянные интегрирования, определяемые из краевых условий.

Для полноты исследования рассмотрим стержни с различными видами закрепления по концам.

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ СТЕРЖНЯ, ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕННОГО ПО КОНЦАМ

Для стержня, шарнирно закрепленного по концам, имеем четыре краевых условия:

$$\begin{cases} W(x=0) = \dfrac{\partial^2 W(x=0)}{\partial x^2} = 0, \\ W(x=l) = \dfrac{\partial^2 W(x=l)}{\partial x^2} = 0. \end{cases} \tag{18}$$

при которых получаем [5] ряд решений уравнения (15) относительно a:

$$a_m = m\pi / l, \quad m = 1, 2, ... \tag{19}$$

Подставив (19) в (16), после ряда преобразований получим выражение для вычисления частот собственных колебаний ω_m, $m = 1, 2, ...$.

$$\omega_m = \frac{\pi^2 m^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}, \quad m = 1, 2, ... \qquad (20)$$

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ СТЕРЖНЯ, ЗАЩЕМЛЕННОГО ПО КОНЦАМ

Рассматривается стержень, защемленный на левом при $x = 0$ и правом при $x = l$ концах. Для такого стержня краевых условия имеют вид:

$$\begin{cases} W(x=0) = \dfrac{\partial W(x=0)}{\partial x} = 0, \\ W(x=l) = \dfrac{\partial W(x=l)}{\partial x} = 0. \end{cases} \qquad (21)$$

При условиях (21) значения a_m параметра a являются [5] решением трансцендентного уравнения:

$$\cos al(e^{al} + e^{-al}) - 2 = 0. \qquad (22)$$

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ СТЕРЖНЯ, ЗАЩЕМЛЕННОГО НА ЛЕВОМ КОНЦЕ И ШАРНИРНО ОПЕРТОГО НА ПРАВОМ

Рассматривается стержень, защемленный на левом конце при $x = 0$ и шарнирно опертый на правом при $x = l$. Для такого стержня краевые условия имеют вид:

$$\begin{cases} W(x=0) = \dfrac{\partial W(x=0)}{\partial x} = 0, \\ W(x=l) = \dfrac{\partial^2 W(x=l)}{\partial x^2} = 0. \end{cases} \qquad (23)$$

При условиях (21) значения a_m параметра a являются [5] решением трансцендентного уравнения:

$$\sin al(e^{al} + e^{-al}) - \cos al(e^{al} - e^{-al}) = 0. \qquad (24)$$

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ СТЕРЖНЯ С ЖЕСТКИМ ЗАКРЕПЛЕНИЕМ СЛЕВА И СВОБОДНЫМ ПРАВЫМ КОНЦОМ

Рассматриваемый стержень жестко закреплен на левом конце при $x = 0$ и имеет свободный правый конец при $x = l$. Для такого стержня краевые условия имеют вид:

$$\begin{cases} W(x=0) = \dfrac{\partial W(x=0)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 W(x=l)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^3 W(x=l)}{\partial x^3} = 0. \end{cases} \qquad (25)$$

При условиях (25) значения a_m параметра a являются [5] решением трансцендентного уравнения:

$$\cos al \operatorname{ch} al + 1 = 0. \qquad (26)$$

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО МЕТОДА СПЛАЙНОВ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

Для определения частот ω собственных колебаний стержня запишем дифференциальное уравнение собственных форм колебаний для стержня переменного поперечного сечения [5]:

$$EI\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial(EI)}{\partial x}\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \\ + \frac{\partial^2(EI)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \lambda\mu W = 0, \qquad (27)$$

где введено обозначение

$$\lambda = a^4. \qquad (28)$$

Построим дискретный аналог дифференциального уравнения (27) в интегральной форме.

Для этого на сетке узлов сплайна Δ в пределах каждого из отрезков

$$[x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, ..., N-1 \qquad (29)$$

приравниваются определенные интегралы от левой и правой частей дифференциального уравнения (27), и получим $N-1$ уравнений:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} EI\frac{d^4 W}{dx^4}dx + 2\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d(EI)}{dx}\frac{d^3 W}{dx^3}dx + \\ + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d^2(EI)}{dx^2}\frac{\partial^2 W}{dx^2}dx - \lambda\int_{x_i}^{x_{i+1}} \mu W = 0, \qquad (30)$$
$$i = 1, 2, ..., N-1.$$

К системе уравнений (30) добавляем еще одно уравнение в виде дискретного аналога дифференциального уравнения (27), записанного для первого узла с координатой x_1:

$$EI(x_1)\frac{d^4W_1}{dx^4}+2E\frac{dI(x_1)}{dx}\frac{d^3W(x_1)}{dx^3}+$$
$$+E\frac{d^2I(x_1)}{dx^2}\frac{d^2W(x_1)}{dx^2}- \qquad (31)$$
$$-\lambda\mu(x_1)W(x_1)=0.$$

Систему уравнений (30) и (31) следует дополнить четырьмя уравнениями краевых условий, учитывающими способы закрепления стержня.

РАССМАТРИВАЕМЫЕ СПОСОБЫ ЗАКРЕПЛЕНИЯ СТЕРЖНЯ ПО КОНЦАМ

При формировании уравнений краевых условий рассмотрим задачи о поперечных колебаниях прямого стержня при четырех видах его закреплении по концам:

- шарниры по концам стержня;
- защемление по концам стержня;
- заделка на левом конце стержня и шарнир на правом;
- заделка на левом конце стержня и свободный правый конец стержня.

ВАРИАНТЫ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ НА ЛЕВОМ КОНЦЕ СТЕРЖНЯ

1. Шарнир на левом конце стержня с координатой x_1:

$$W(x_1)=0,\quad \frac{d^2W(x_1)}{dx^2}=0. \qquad (32)$$

2. Защемление на левом конце стержня с координатой x_1:

$$W(x_1)=0,\quad \frac{dW(x_1)}{dx}=0. \qquad (33)$$

3. Свободный левый конец стержня с координатой x_1:

$$\frac{d^2W(x_1)}{dx^2}=0,\quad \frac{d^3W(x_1)}{dx^3}=0. \qquad (34)$$

ВАРИАНТЫ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ НА ПРАВОМ КОНЦЕ СТЕРЖНЯ

1. Шарнир на правом конце стержня с координатой x_N:

$$W(x_N)=0,\quad \frac{d^2W(x_N)}{dx^2}=0. \qquad (35)$$

2. Защемление на правом конце стержня с координатой x_N:

$$W(x_N)=0,\quad \frac{dW(x_N)}{dx}=0. \qquad (36)$$

3. Свободный правый конец стержня с координатой x_N:

$$\frac{d^2W(x_N)}{dx^2}=0,\quad \frac{d^3W(x_N)}{dx^3}=0. \qquad (37)$$

КОМПЛЕКТ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ФОРМЫ СВОБОДНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО МЕТОДА СПЛАЙНОВ

Пусть стержень имеет модуль упругости материала $E=\text{const}$, постоянное поперечное сечение с осевым моментом инерции $I=\text{const}$ и постоянную по длине стержня массу единицы длины стержня $\mu=\text{const}$. Сформируем систему уравнений для вычисления частот собственных колебаний.

Метод сплайнов в интегральной форме

Для рассматриваемого стержня соотношения (30), описывающие в интегральном виде формы колебаний, принимают вид:

$$EI\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{d^4W}{dx^4}dx-\lambda\mu\int_{x_i}^{x_{i+1}}W=0, \qquad (38)$$
$$i=1,2,...,N-1.$$

На основе выражений (9) запишем матричный аналог системы уравнений (38):

$$EI\boldsymbol{J}_{d4W}-\lambda\mu\boldsymbol{J}_W=0, \qquad (39)$$

который преобразуем с учетом (11):

$$EI\boldsymbol{R}_{d4W}\boldsymbol{Q}-\lambda\mu\boldsymbol{R}_W\boldsymbol{Q}=0. \qquad (40)$$

Введем в рассмотрение матрицы:

$$\boldsymbol{B}=EI\boldsymbol{R}_{d4W},\quad \boldsymbol{D}=(\mu\boldsymbol{R}_W) \qquad (41)$$

размера $(N-1)\times(N+4)$:

$$\begin{cases}\boldsymbol{B}=(B_{i,j},\ i=\overline{1,N-1},\ j=\overline{1,N+4}),\\ \boldsymbol{D}=(D_{i,j},\ i=\overline{1,N-1},\ j=\overline{1,N+4}).\end{cases} \qquad (42)$$

На основе обозначений (41) уравнение (40) принимает вид:

$$\boldsymbol{BQ} - \lambda \boldsymbol{DQ} = 0. \qquad (43)$$

Метод сплайнов по схеме метода коллокаций для первого узла

На основе соотношений (8) построим по методу коллокаций с учетом обозначения (28) дискретный аналог дифференциального уравнения (27) для первого узла с координатой x_1:

$$\boldsymbol{V}_{d4f}^{(1)}\boldsymbol{Q} - \lambda \boldsymbol{V}_{f}^{(1)}\boldsymbol{Q} = 0, \qquad (44)$$

где $\boldsymbol{V}_{f}^{(1)}$ и $\boldsymbol{V}_{d4f}^{(1)}$ – векторы-строки размера $1\times(N+4)$

$$\begin{cases} \boldsymbol{V}_{f}^{(1)} = (V_j^{f}, \quad j=\overline{1,N+4}), \\ \boldsymbol{V}_{d4f}^{(1)} = (V_j^{d4f}, \quad j=\overline{1,N+4}), \end{cases} \qquad (45)$$

которые заполняются компонентами из первых строк матриц $\boldsymbol{M}_f$ и $\boldsymbol{M}_{d4f}$:

$$\begin{cases} V_j^{f} = M_{1,j}^{f}, \\ V_j^{d4f} = M_{1,j}^{d4f}, \quad j=1,\ldots,N+4. \end{cases} \qquad (46)$$

Метод сплайнов для уравнений краевых условий

Рассмотрим один из частных случаев краевых условий, выбрав *заделку* на *левом конце* стержня и *полную свободу перемещений на правом конце* стержня. В этом случае имеем четыре уравнения краевых условий:

$$\begin{cases} W(x_1) = 0, & \dfrac{dW(x_1)}{dx} = 0. \\ \dfrac{d^2W(x_N)}{dx^2} = 0, & \dfrac{d^3W(x_N)}{dx^3} = 0. \end{cases} \qquad (47)$$

Дискретный аналог краевых условий (47) представим в *виде*:

$$\boldsymbol{AQ} = 0, \qquad (48)$$

где $\boldsymbol{A}$ – прямоугольная матрица размера $4\times(N+4)$, которая заполняется компонентами из соответствующих строк матриц $\boldsymbol{M}_f$, $\boldsymbol{M}_{df}$, $\boldsymbol{M}_{d2f}$ и $\boldsymbol{M}_{d3f}$:

$$\begin{cases} A_{1,j} = M_{1,j}^{f}, \\ A_{2,j} = M_{1,j}^{df}, \\ A_{3,j} = M_{N,j}^{d2f}, \\ A_{4,j} = M_{N,j}^{d3f}, \quad j=1,\ldots,N+4. \end{cases} \qquad (49)$$

Рассматривая уравнения (43), (44) и (48) совместно, получаем систему из $N+4$ однородных уравнений с $N+4$ неизвестными:

$$\begin{cases} \boldsymbol{BQ} - \lambda \boldsymbol{DQ} = 0, \\ \boldsymbol{V}_{d4f}^{(1)}\boldsymbol{Q} - \lambda \boldsymbol{V}_{f}^{(1)}\boldsymbol{Q} = 0, \\ \boldsymbol{AQ} = 0. \end{cases} \qquad (50)$$

Система (50) имеет решения только при определенных значениях λ, которые будем называть собственными числами системы однородных уравнений (50). Определив значения λ, на основе (16) и (28) вычислим круговые частоты ω собственных колебаний

$$\omega = \sqrt{\lambda EI/\mu}. \qquad (51)$$

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО МЕТОДА СПЛАЙНОВ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ С РАЗЛИЧНЫМИ СПОСОБАМИ ЗАКРЕПЛЕНИЯ ЕГО КОНЦОВ

Точность расчетов на основе изложенного интегрального метода сплайнов оценим десятичным логарифмом абсолютного значения относительной ошибки $\lg|\delta\omega|$:

$$\lg|\delta\omega| = \lg\left|(\omega_T - \omega)/\omega_T\right|, \qquad (52)$$

где ω – расчетное значение, ω_T – точное значение частоты собственных колебаний,

Результаты представлены графиками зависимости $\lg|\delta\omega|$ от десятичного логарифма $\lg M$, где M – число отрезков сетки узлов сплайна, определяемое формулой $M = N-1$.

Стержень, шарнирно закрепленный по концам

На рис. 1 представлены в координатах $\lg|\delta\omega| \sim \lg M$ зависимости ошибок численного расчета частот собственных колебаний при первых десяти формах для стержня, шарнирно закрепленного по концам.

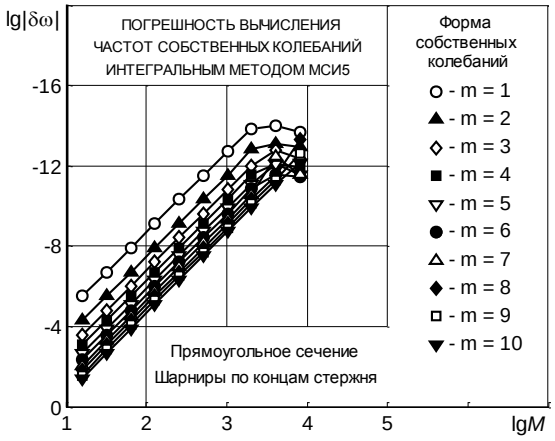

Рис. 1

Видно (рис. 1), что для данного способа закрепления метод МСИ5 характеризуется четвертым порядком сходимости [8].

Стержень, защемленный по концам

На рис. 2 представлены в координатах $\lg|\delta\omega| \sim \lg M$ зависимости ошибок численного расчета частот собственных колебаний при первых десяти формах для стержня, защемленного по концам.

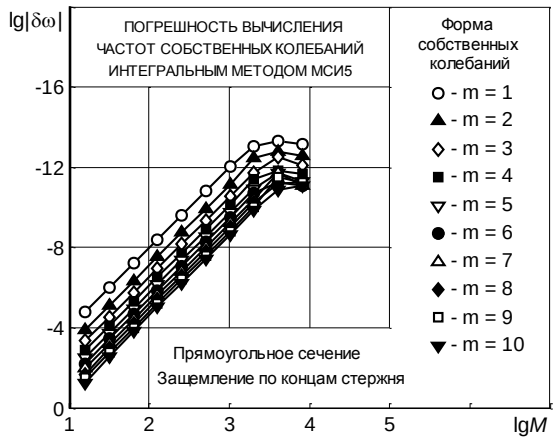

Рис. 2

Видно (рис. 2), что для данного способа закрепления метод МСИ5 характеризуется четвертым порядком сходимости [8].

Стержень, защемленный на левом конце и шарнирно опертый на правом

На рис. 3 представлены в координатах $\lg|\delta\omega| \sim \lg M$ зависимости ошибок численного расчета частот собственных колебаний при первых десяти формах для стержня, защемленного на левом конце и шарнирно опертого на правом.

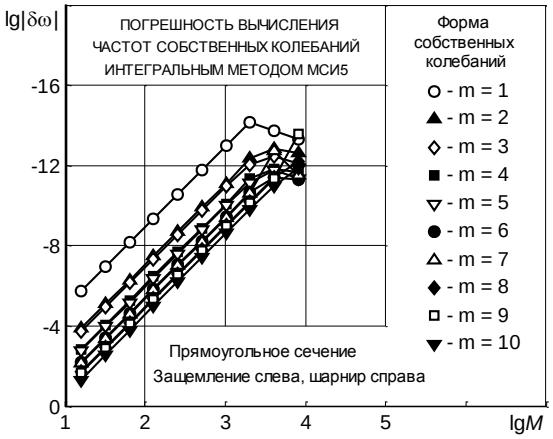

Рис. 3

Видно (рис. 3), что для данного способа закрепления метод МСИ5 характеризуется четвертым порядком сходимости [8].

Стержень, с жестким закреплением слева и свободным правым концом

На рис. 4 представлены в координатах $\lg|\delta\omega| \sim \lg M$ зависимости ошибок расчета частот собственных колебаний при первых десяти формах для стержня, защемленного на левом конце и имеющего свободный правый конец.

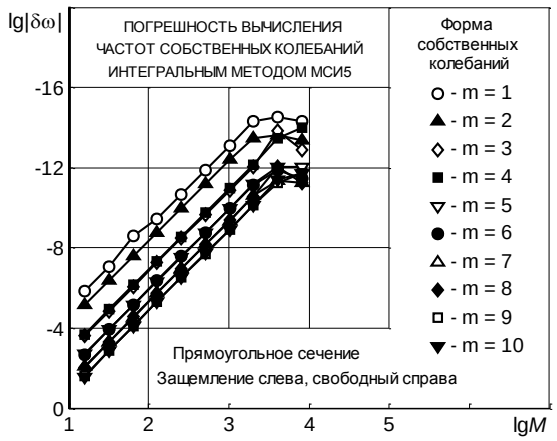

Рис. 4

Видно (рис. 4), что для данного способа закрепления метод МСИ5 характеризуется четвертым порядком сходимости [8].

Из рис. 1–4 видно, что при всех способах закрепления стержня точность вычисления частоты собственных колебаний стержня практически одинакова.

Графики на рис. 1–4 показывают, что при рассмотрении первых десяти форм колебаний максимальная относительная ошибка численных расчетов находится в

пределах $\delta\omega = 1\cdot 10^{-10}...1\cdot 10^{-14}$, что соответствует 10..14 точным значащим цифрам. Следует отметить, что минимальная ошибка имеет место при числе отрезков сетки сплайна в районе $M \cong 2048$, а затем с ростом M погрешность расчетов увеличивается. Это связано с тем, что более сильное сгущение сетки узлов сплайна приводит к увеличению арифметической ошибки численных расчетов, которая при определенном M начинает превышать ошибку самого метода интегральных сплайнов.

Поэтому при сегодняшнем уровне развития компьютеров, обеспечивающих точность расчета лишь с 16 значащими цифрами, целесообразно ограничиться числом отрезков сетки сплайна $M = 2048$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье представлены результаты применения нового метода расчета частот собственных колебаний стержня, базирующегося на интегральных сплайнах степени 5 дефекта 1.

Разработанный метод характеризуется четвертым порядком сходимости и высокой точностью, ограничением которой являются только возможности современных компьютеров. Это видно из рис. 1–4, где с увеличением числа отрезков M сетки узлов имеет место уменьшение вычислительной погрешности $\delta\omega$ вплоть до $M = 2048$. В итоге при $M = 2048$ относительная погрешность $\delta\omega$ расчета частот собственных колебаний по первым десяти формам не превышает $1\cdot 10^{-10}$, а при первой форме получаем погрешность на уровне всего лишь $1\cdot 10^{-14}$. При $M > 2048$ для ряда форм колебаний наблюдается уменьшение точности расчетов, обусловленное увеличением арифметической ошибки вычислений с ростом числа выполняемых арифметических операций.

В данной статье интегральный метод сплайнов применен для определения частот собственных колебаний стержня постоянного сечения. Дальнейшие исследования предполагается продолжить в направлении исследования возможностей этого метода для определения частот собственных поперечных колебаний стержней с переменным поперечным сечением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Павлов В. П.** Анализ спектра частот собственных колебаний стержня методом сплайнов // Вестник УГАТУ. 2016. Т. 20, № 4 (74). С. 16–22. **[** V. P. Pavlov, “Analysis of the spectrum of frequencies of own fluctuations of a rod by the method of splines”, (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 20, no. 4 (74), pp. 16-22, 2016. **]**

2. **Павлов В. П.** Поперечные колебания стержня с переменным поперечным сечением и вычисление его собственных частот методом сплайнов // Вестник УГАТУ. 2017. Т. 21, № 2 (76). С. 3–16. **[** V. P. Pavlov, “Transverse vibrations of a rod with variable cross sections and calculation of its eigenfrequencies by the method of splines”, (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 21, no. 2 (76), pp. 3-16, 2017. **]**

3. **Zhernakov V. S., Pavlov V. P., Kudoyarova V. M.** The Enhanced Spline-Method for Numerical Results of Natural Frequencies of Beams // Proc. Engineering. 2017, Vol. 176C, pp. 438–450. **[** V. S. Zhernakov, V. P. Pavlov, V. M. Kudoyarova, **“**The Enhanced Spline-Method for Numerical Results of Natural Frequencies of Beams”, in *Proc. Engineering,* Vol. 176C, pp. 438-450, 2017. **]**

4. **Абдрахманова А. А., Павлов В. П.** Применение сплайнов пятой степени при расчете частот собственных колебаний стержня. Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных: Тезисы докладов международной научной конференции, посвященной памяти академика А. В. Бицадзе. 2016. С. 93. **[** A. A. Abdrakhmanova, V. P. Pavlov, “Application of supply-new fifth degree in the calculation of the natural frequencies of the rod”, in International scientific conference, p. 93, 2016. **]**

5. **Бабаков И. М.** Теория колебаний. М.: Наука, 1965. 560 с. **[** I. M. Babakov, *Theory of vibrations*. M.: Nauka, 1965. **]**

6. **Павлов В. П.** Метод сплайнов в расчетах стержней на устойчивость // Вестник УГАТУ. 2016. Т.20, № 4 (74). С. 45–53. **[** V. P. Pavlov, “The method of splines in the calculation of the studs for stability”, (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 20, no. 4 (74), pp. 45-53, 2016. **]**

7. **Kudoyarova V. M., Pavlov V. P.** The Spline Method for the Solution of the Transient Heat Conduction Problem with Nonlinear Initial and Boundary Conditions for a Plate // Proc. Engineering. 2016, Vol. 150, pp. 1419–1426. **[** V. M. Kudoyarova, V. P. Pavlov, “The Spline Method for the Solution of the Transient Heat Conduction Problem with Nonlinear Initial and Boundary Conditions for a Plate”, in *Proc. Engineering*. Vol. 150, pp. 1419-1426, 2016. **]**

8. **Павлов В. П.** Метод сплайнов и другие численные методы решения одномерных задач механики деформируемых твердых тел. Уфа: Уфимск. Гос. Авиац. техн. ун-т, 2003. 197 с. **[** V. P. Pavlov, *Method of spline and other numerical me-ODS for solving one-dimensional problems of mechanics deformi-roemah solids*. Ufa: Ufimsk. State. Aviation. techn. Univ, 2003. **]**

9. **Абдрахманова А. А., Павлов В. П.** Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния стеклопластикового стержня при различных жесткостях опор // Вестник УГАТУ. 2007. Т. 9. № 5 (23). С. 87–92. **[** A. A. Abdrakhmanova, V. P. Pavlov, “Mathematical modeling of stress-strain state of a fiberglass core with different stiffness of the supports”, (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 9, no. 5 (23), pp. 87-92, 2007. **]**

10. **Павлов В. П.** Оценка возможностей метода сплайн-функций при решении уравнений, описывающих

изгиб стержней // Механика деформируемых тел и конструкций: Уфа, 1998. С. 15–20. **[** V. P. Pavlov, “Evaluation of the possibilities of the method of spline-functions in the solution of the equations describing the bending of the rods”, in *Mechanics of deformable bodies and structures*: Ufa, pp. 15-20, 1998. **]**

11. **Павлов В. П., Абдрахманова А. А., Абдрахманова Р. П.** Задача расчета стержней одномерным сплайном пятой степени дефекта два // Математические заметки ЯГУ. Т. 20, вып. 1, Якутск, 2013. С. 50–59. **[** V. P. Pavlov, A. A. Abdrakhmanov, R. P. Abdrakhmanova, “The task of calculating the one-dimensional rods with a spline of the fifth degree of the defect two”, in *Mathematical notes of YSU*, Vol. 20, issue. 1, Yakutsk, pp. 50-59, 2013. **]**

12. **Zhernakov V. S., Pavlov V. P., Kudoyarova V. M.** The Spline-Method for Numerical Calculation of the Natural-Vibration Frequency of a Beam with Variable Cross-Sectio // Proc. Engineering. 2017, Vol. 206C, pp. 710–715. **[** V. S. Zhernakov, V. P. Pavlov, V. M. Kudoyarova, **“**The Spline-Method for Numerical Calculation of the Natural-Vibration Frequency of a Beam with Variable Cross-Sectio”, in *Proc. Engineering,* Vol. 206C, pp. 710-715, 2017. **]**

13. **Pavlov V. P., Kudoyarova V. M.** A Numerical Method Based on Spline for Solution Heat Conduction Nonlinear Problems // Proc. Engineering. 2017, Vol. 206C, pp. 704–710. **[** V. P. Pavlov, V. M. Kudoyarova, **“**A Numerical Method Based on Spline for Solution Heat Conduction Nonlinear Problems”, in *Proc. Engineering,* Vol. 206C, pp. 704-709, 2017. **]**

14. **Pavlov V. P., Kudoyarova V. M., Philippov A. A.** Simulation of Boron and Carbon Fiber Composite Characteristics of the Elasticity // MATEC Web of Conferences, 2017, Vol. 129, 02009 (2017), pp. 1-4. **[** V. P. Pavlov, V. M. Kudoyarova, A. A. Philippov, **“**Simulation of Boron and Carbon Fiber Composite Characteristics of the Elasticity”, in *MATEC Web of Conferences,* Vol. 129, 02009, (2017) pp. 1-4, 2017. **]**

ОБ АВТОРЕ

ПАВЛОВ Виктор Павлович, проф. каф. сопротивления материалов. Дипл. инж. по авиац. двигателям (УАИ, 1973). Д-р техн. наук по динамике и прочности (УГАТУ, 2005). Иссл. в обл. динамики и прочности конструкций из композиционных материалов.

METADATA

Title: The integral method of splines for calculation of the natural frequencies of the rod and its capabilities

Author: V. P. Pavlov

Affiliation:
Ufa State Aviation Technical University (UGATU), Russia.

Email: victor.pavlov.51@yandex.ru

Language: Russian.

Source: Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 21, no. 4 (78), pp. 41-49, 2017. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

Abstract: The technique of applying the integral method of spline functions of degree 5 for the calculation of the natural frequencies of a straight rod at different ways of fastening its ends. On the example of solving the test problems with exact analytical solution, the possibilities of the proposed method, Yes. It is shown that the implemented algorithm is the use of integral method of spline functions of degree 5 has fourth order of convergence and allows to determine the values of the natural frequencies at an accuracy to fourteen significant digits.

Key words: rods; vibrations; natural frequency; splines; mathematical modeling.

About authors:
PAVLOV, Victor Pavlovich, Prof., Dept. of Strength of Materials. Dipl. Engineer for Aircraft Engines (Ufa Aviation Inst., 1973). Dr. of Tech. Sci. (UGATU, 2005).