

УДК 621.9.047

МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОМОДЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОГО ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ФОРМООБРАЗОВАНИЯ

О. Р. Зиннатуллина¹, Н. М. Шерыхалина², Н. И. Житникова³

¹olga_zr@mail.ru, ²n_sher@mail.ru, ³zhitnik@mail.ru

ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

Поступила в редакцию 10.10.2017

Аннотация. Задача моделирования автомодельного формообразования и краевые условия формулируются согласно закону Фарадея. Задача сводится к решению краевой задачи для определения аналитической функции комплексного переменного. В отличие от плоской задачи для определения потенциала, функции тока и напряженности используются интегральные преобразования аналитической функции. Производится интерполяция сплайн-функциями, описывается метод решения автомодельной осесимметричной задачи, отличающийся от известных своей точностью. Представлены результаты численного решения.

Ключевые слова: осесимметричная задача; комплексные переменные; интегральные преобразования; автомодельное решение.

ВВЕДЕНИЕ

Среди решений нестационарных задач электрохимического формообразования особый интерес представляют решения, которые сохраняют геометрическое подобие межэлектродного пространства (МЭП) [1] относительно некоторой точки Z_E (называемые автомодельными). Автомодельные решения позволяют более простыми средствами (в ряде случаев – аналитически) исследовать нестационарные процессы, в частности, получить оценки изменения радиуса кривизны при скруглении острых кромок. При этом иногда процесс, приближенный к автомодельному, возникает в начальный момент времени, а затем переходит в нестационарный. Чаще автомодельный процесс устанавливается асимптотически.

В связи с этим целью данной работы является разработка численно-аналитического метода и исследование характеристик автомодельных процессов.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА

Рассматривается задача по решению уравнения Лапласа для потенциала Φ внутри некоторой осесимметричной области, на границах которой выполняется условие постоянства Φ , причем форма свободной границы должна удовлетворять условию автомодельности, т.е. сохранения геометрического подобия МЭП.

Рассмотрим автомодельную задачу обработки точечным электродом-инструментом (ЭИ). Меридиональное сечение МЭП показано на рис. 1. Здесь ADB – граница растворяемого материала, точка C – неподвижный точечный ЭИ.

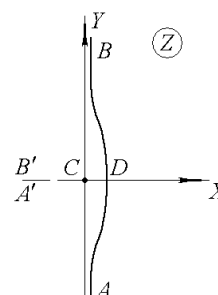


Рис. 1. Схема МЭП при автомодельном процессе

С помощью интегральных преобразований Г. Н. Положего [2] потенциал Φ и функция тока Ψ осесимметричного поля выражается через функцию комплексного переменного $f(Z)$, аналитическую (т.е. удовлетворяющую условиям Коши–Римана) в области $Z=X+iY$, форма границ которой совпадает с формой границ межэлектродного пространства в меридиональном сечении осесимметричного поля

$$\Phi(X_0, Y_0) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{\infty}^{Z_0} f(Z) \frac{dZ}{\sqrt{(Z-Z_0)(Z-\bar{Z}_0)}}, \quad (1)$$

$$\Psi(X_0, Y_0) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{\infty}^{Z_0} f(Z) \frac{(Z-X_0)dZ}{\sqrt{(Z-Z_0)(Z-\bar{Z}_0)}}, \quad (2)$$

где $Z_0 = X_0 + iY_0$, $\bar{Z}_0 = X_0 - iY_0$.

Таким образом, решение осесимметричной задачи сводится к решению некоторой плоской задачи для определения аналитической функции $W(Z)$, представляющей комплексный потенциал некоторого вспомогательного плоского поля. Потенциал и функция тока осесимметричного поля получаются путем интегральных преобразований (1), (2), примененных к функции $f(Z) = dW/dZ$ [1].

Краевые условия вспомогательной плоской задачи записываются в виде интегральных уравнений, которые получаются приравниванием к константе правых частей (1) для эквипотенциальных границ или (2) для непроницаемых. Равенство нулю мнимой или действительной части $f(Z)$ в общем случае не приводит к равенству нулю или константе соответствующих интегралов.

Из (1) и (2) определяются значения продольной и радиальной составляющей напряженности $E_x = \partial\Phi/\partial X$, $E_y = \partial\Phi/\partial Y$

$$E_x = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{X_1+i0}^{X_0+iY_0} \frac{df}{dZ} \frac{dZ}{\sqrt{(Z-Z_0)(Z-\bar{Z}_0)}}, \quad (3)$$

$$E_y = -\frac{1}{\pi Y} \operatorname{Im} \int_{X_1+i0}^{X_0+iY_0} \frac{df}{dZ} \frac{(Z-X_0)dZ}{\sqrt{(Z-Z_0)(Z-\bar{Z}_0)}}, \quad (4)$$

где $X_1 + i0$ – некоторая точка на оси симметрии X .

Отобразим конформно область, соответствующую МЭП на плоскости Z , на полосу $\chi = \sigma + i\nu$ (рис. 2, а). Тогда задачу определения функции $W(Z)$, аналитической в области МЭП, можно решать в параметрическом виде: найти функции $W(\chi)$ и $Z(\chi)$.

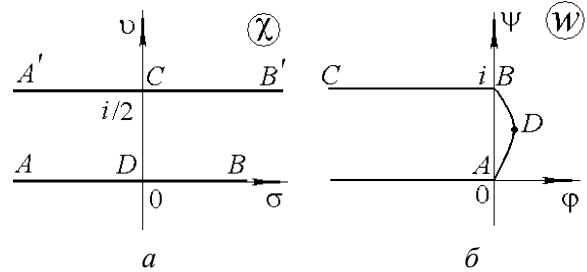


Рис. 2. Образы МЭП на плоскостях:
а – параметрического переменного χ ;
б – комплексного потенциала

КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ

Краевым условием для определения функции $W(\chi)$ является условие эквипотенциальности анода. При этом на плоскости W образом области МЭП является криволинейная полуполоса (рис. 2, б).

Краевым условием для определения функции $Z(\chi)$ является условие автомодельности. Для вывода этого условия в осесимметричном случае используем закон Фарадея в форме уравнения Полубариновой–Галина [1, 3, 4]

$$\operatorname{Im} \left(\frac{\partial Z}{\partial t} \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \sigma} \right) = -k \frac{1}{Y} \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma}, \quad (5)$$

где k – электрохимическая постоянная.

В автомодельном решении, если выбрать некоторое характерное расстояние $l(t)$, то отношение

$$z(\chi) = \frac{Z(\chi, t) - Z_E}{l(t)}$$

является безразмерной аналитической функцией, не зависящей от времени t (поскольку форма области на плоскости параметрического переменного также не зависит от времени). Тогда частная производная

$$\frac{\partial Z}{\partial t}(\chi, t) = \alpha(t) l(t) z(\chi), \quad \alpha(t) = \frac{1}{l(t)} \frac{dl}{dt},$$

где $\alpha(t)$ – относительная скорость изменения характерного размера (масштабного

фактора). При этом равенство (5) примет вид

$$\alpha(t)l^2(t)\operatorname{Im}\left[z(\sigma)\frac{\partial z}{\partial\sigma}(\sigma)\right] = -k\frac{1}{Y}\frac{\partial\Psi}{\partial\sigma},$$

или в безразмерном виде при $y=Y/l$, $\psi=\Psi\kappa/I$

$$\operatorname{Im}\left[z\frac{\partial z}{\partial\sigma}\right] = -\frac{k}{\alpha^2}\frac{1}{ly}\frac{I}{\kappa}\frac{d\psi}{d\sigma} = -\frac{1}{\lambda y}\frac{d\psi}{d\sigma}, \quad (6)$$

$$\lambda = \frac{l^3\kappa\alpha}{kI} = \frac{l^2\alpha}{kU}.$$

Это равенство представляет собой краевое условие автомодельности. Производная функции тока $d\psi/d\sigma$ определяется с помощью интегральных преобразований (3), (4) аналитической функции.

Значение безразмерной константы λ в (6) определяется при решении задачи. При этом все составляющие ее величины могут быть функциями времени.

В частности, при постоянном U величина $\alpha(t)$ должна удовлетворять условию

$$\alpha(t)l^2(0)e^{\int_0^t \alpha(\tau)d\tau} = \alpha(0)l^2(0).$$

Отсюда можно определить зависимость $\alpha(t)$

$$\alpha(t) = \frac{1}{2t + \alpha^{-1}(0)}, \quad l(t) = l(0)\sqrt{1 + 2\alpha(0)t}.$$

Время $t_0 = -\frac{1}{2\alpha(0)} = -\frac{l^2(0)}{2kU\lambda}$ можно рас-

сматривать как время начала процесса растворения некоторой начальной формы с особенностями. Принимая во внимание факт, что автомодельное решение является некоторым аттрактором, к которому, по видимому, сходятся решения нестационарных задач, имеется возможность избежать трудностей при начале расчета растворения поверхностей, имевших в начальное время изломы или точки соприкосновения проводника с изолятором.

При постоянном токе I величина $\alpha(t)$ должна удовлетворять условию

$$\alpha(t)l^3(0)e^{\int_0^t \alpha(\tau)d\tau} = \alpha(0)l^3(0).$$

Отсюда

$$\alpha(t) = \frac{1}{3t + \alpha^{-1}(0)}, \quad l(t) = l(0)\sqrt{1 + 3\alpha(0)t},$$

$$t_0 = -\frac{1}{3\alpha(0)} = -\frac{\kappa l^3(0)}{3\kappa\eta I\lambda}.$$

При постоянной плотности тока ($\sim I/l^2$)

$$\alpha(t)l(0)e^{\int_0^t \alpha(\tau)d\tau} = \alpha(0)l(0).$$

Тогда

$$\alpha(t) = \frac{1}{t + \alpha^{-1}(0)}, \quad l(t) = l(0)\sqrt{1 + \alpha(0)t},$$

$$t_0 = -\frac{1}{\alpha(0)} = -\frac{l^2(0)}{\kappa\eta U\lambda} = -\frac{\kappa l^3(0)}{\kappa\eta I\lambda}.$$

В (6) сделаем замену $z = e^{\omega}$, $\omega = \mu + i\nu = \ln z$,

$$\operatorname{Im}\left[e^{\omega}e^{\bar{\omega}}\frac{\partial\omega}{\partial\sigma}\right] = -e^{2\mu}\frac{\partial\nu}{\partial\sigma} = -\frac{1}{\lambda y}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}.$$

Тогда получим соотношение

$$e^{2\mu}\frac{\partial\nu}{\partial\sigma} = \frac{1}{\lambda y}\frac{d\psi}{d\sigma},$$

которое также может быть использовано в качестве краевого условия.

Метод решения осесимметричных задач по определению форм, не зависящих от времени, включает два основных этапа: нахождения конформного отображения области параметрического переменного на физическую плоскость и определения потенциала и функции тока с помощью интегральных преобразований аналитической функции.

КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

Задача конформного отображения решается следующим образом.

Функция

$$z_0(\chi) = ig \operatorname{sh} \pi\chi \quad (7)$$

при $g > 0$ конформно отображает полосу плоскости χ на левую полуплоскость с разрезом. При этом граница $\chi = \sigma$ отображается на поверхность ADB , граница $\chi = \sigma + i/2$ – на разрез $A'CB'$. Положение точечного источника $z_0(i/2) = -g$.

Функция, отображающая плоскость χ на физическую, ищется в виде суммы

$$z(\chi) = z_0(\chi) + z_{\Delta}(\chi). \quad (8)$$

При $\chi \rightarrow \infty$ величина $\operatorname{Re} z_{\Delta}(\chi) \rightarrow 0$.

Функция $z_{\Delta}(\chi)$ получается следующим образом. Будем искать решение на границе $\chi = \sigma$ в узловых точках σ_m ($m=0, \dots, n$). Искомыми будут значения $\operatorname{Re} z_{\Delta}(\sigma_m) = x_m$. При $\sigma = \sigma_n$ примем $\operatorname{Re} z_{\Delta}(\sigma_n) = 0$, поскольку $\operatorname{Re} z_{\Delta}(\sigma)$ как экспонента убывает при $\sigma \rightarrow \infty$. Значения $\operatorname{Re} z_{\Delta}(\sigma)$ в промежуточных между узловыми точками найдем, аналогично [5, 6], с помощью кубического сплайна $P(\sigma)$, имеющего две непрерывные производные.

Для восстановления функции $z_{\Delta}(\chi)$ используем формулу Шварца [7] с учетом того, что $z_{\Delta}(\chi)$ аналитическая функция, имеющая, как и $z_0(\chi)$, чисто действительные значения на прямой $\operatorname{Im} \chi = 1/2$. Аналитически продолжим функцию $z_{\Delta}(\chi)$ на полосу единичной ширины. В силу принципа симметрии [7] $\operatorname{Re} z_{\Delta}(\sigma + i) = \operatorname{Re} z_{\Delta}(\sigma)$. Так как в силу симметрии МЭП $\operatorname{Re} z_{\Delta}(\sigma)$ – четная по σ функция, то

$$z_{\Delta}(\chi) = -i2 \operatorname{sh} \pi \chi \int_0^{\infty} P(\sigma) \frac{\operatorname{ch} \pi \sigma d\sigma}{\operatorname{ch}^2 \pi \sigma - \operatorname{ch}^2 \pi \chi}. \quad (9)$$

Производная $\frac{dz_{\Delta}}{d\chi}(\chi)$ определяется дифференцированием (9)

$$\frac{dz_{\Delta}}{d\chi}(\chi) = -i2 \operatorname{ch} \pi \chi \int_0^{\infty} \frac{dP}{d\sigma}(\sigma) \frac{\operatorname{sh} \pi \sigma}{\operatorname{ch}^2 \pi \sigma - \operatorname{ch}^2 \pi \chi} d\sigma.$$

Так как в автомодельной задаче точечный источник располагается в начале координат, зададим условие $\operatorname{Re}[z_0(i/2) + z_{\Delta}(i/2)] = 0$ и найдем из этого условия параметр g

$$z\left(\frac{i}{2}\right) = -g + 2 \int_0^{\infty} P(\sigma) \frac{d\sigma}{\operatorname{ch} \pi \sigma} = 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА И ФУНКЦИИ ТОКА

Способ решения заключается в представлении комплексного потенциала $w(\chi)$ вспомогательной плоской задачи и его производной в виде сумм

$$w(\chi) = w_0(\chi) + w_1(\chi),$$

$$\frac{\partial w}{\partial \chi}(\chi) = f_0(\chi) + f_1(\chi),$$

где функция источника $f_0(\chi) = \frac{i}{\operatorname{ch} \pi \chi}$ определяется из решения плоской задачи.

Будем искать решение в виде функции

$$f_1(\chi) = \frac{\partial w_1}{\partial \chi}(\chi).$$

Эта функция должна обладать следующими свойствами: при $\chi = \sigma + i0$ ее действительная часть должна быть нечетной функцией σ , при $\chi = \sigma + i/2$ $f_1(\sigma + i/2)$ должна быть чисто действительной. Тогда ее можно аналитически продолжить на полосу единичной ширины. При этом в соответствии с принципом симметрии справедливо равенство $\operatorname{Re} f_1(\sigma + i) = \operatorname{Re} f_1(\sigma + i0)$.

Искомыми параметрами будут значения действительной части функции $\operatorname{Re} f_1(\sigma_m) = f_m$ в узловых точках σ_m , ($m = 1, \dots, n$). При $\sigma = \sigma_0 = 0$ $\operatorname{Re} f_1(\sigma_0) = 0$, поскольку действительная часть f_1 – нечетная функция σ . При $\sigma = \sigma_n$ примем $\operatorname{Re} f_1(\sigma_n) = 0$, поскольку $f_1(\sigma)$ как экспонента убывает при $\sigma \rightarrow \infty$. Значения $\operatorname{Re} f_1(\sigma) = 0$ в точках, промежуточных между узловыми, найдем с помощью кубического сплайна $S(\sigma)$.

Для восстановления функции $f_1(\chi)$ используем формулу Шварца [7]. Так как $\operatorname{Re} f_1(\sigma)$ нечетная по σ функция, то

$$f_1(\chi) = -i2 \operatorname{ch} \pi \chi \int_0^{\infty} S(\sigma) \frac{\operatorname{sh} \pi \sigma d\sigma}{\operatorname{ch}^2 \pi \sigma - \operatorname{ch}^2 \pi \chi}.$$

В связи с наличием особенности функции $f(\sigma)$ в точке C при применении преобразований Положего интегрирование необходимо проводить от бесконечности. Выражения (1), (2) примут вид

$$\varphi(\sigma_m) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{\sigma_m}^{\sigma_n} [f_0(\sigma) + f_1(\sigma)] \times \frac{d\sigma}{\sqrt{(z - z(\sigma_m))(z - \bar{z}(\sigma_m))}}, \quad (10)$$

$$\psi(\sigma_m) = \frac{1}{\pi y} \operatorname{Im} \int_{\sigma_m}^{\sigma_n} [f_0(\sigma) + f_1(\sigma)] \times \frac{(z - x(\sigma_m))d\sigma}{\sqrt{(z - z(\sigma_m))(z - \bar{z}(\sigma_m))}}. \quad (11)$$

Условие эквипотенциальности обрабатываемой поверхности при решении методом коллокаций приводит к системе уравнений

$$F_m = \varphi(\sigma_m) - \varphi(\sigma_n) = 0, m = 1, \dots, n-1. \quad (12)$$

Подставив в (10) выражение $f_1(\sigma)$ через сплайн и формулу Шварца, а полученные выражения в (12), и используя формулу Сохоцкого [7], получим систему линейных (относительно переменных f_m) уравнений:

$$F_m = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{\sigma_m}^{\sigma_n} \left(f_0(\sigma) + S(\sigma) - 2i \operatorname{v. p.} \int_0^{\infty} S(p) \times \frac{\operatorname{ch} \pi \sigma \operatorname{sh} \pi p dp}{\operatorname{ch}^2 \pi p - \operatorname{ch}^2 \pi \sigma} \right) \frac{d\sigma}{\sqrt{(z - z(\sigma_m))(z - \bar{z}(\sigma_m))}} = 0.$$

Для формирования указанной системы линейных уравнений необходимо найти частные производные $\frac{\partial F_m}{\partial f_j}$. При этом необходимо дифференцировать сплайн $S(\sigma)$ по f_j под знаком интеграла. Дифференцируя сплайн $S(\sigma)$ по f_j , получим единичный сплайн $E_j(\sigma)$. Тогда

$$\frac{\partial F_m}{\partial f_j} = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{\sigma_m}^{\sigma_n} \left(E_j(\sigma) - 2i \operatorname{v. p.} \int_0^{\infty} E_j(p) \times \frac{\operatorname{ch} \pi \sigma \operatorname{sh} \pi p dp}{\operatorname{ch}^2 \pi p - \operatorname{ch}^2 \pi \sigma} \right) \frac{d\sigma}{\sqrt{(z - z(\sigma_m))(z - \bar{z}(\sigma_m))}}.$$

Таким образом, система уравнений (12) примет вид

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial F_m}{\partial f_j} f_j = B_m, m = 0, \dots, N,$$

$$B_m = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{\sigma_m}^{\sigma_n} f_0(\sigma) \frac{d\sigma}{\sqrt{(z - z(\sigma_m))(z - \bar{z}(\sigma_m))}}. \quad (13)$$

Для численного интегрирования применяется метод, предложенный в [8].

Форма обрабатываемой поверхности заранее не известна, а определяется краевым условием автомодельности (6), которое запишем в виде

$$\operatorname{Im} \left[z \frac{\partial z}{\partial \sigma} \right] = g \operatorname{sh} \pi \sigma \frac{\partial x_{\Delta}}{\partial \sigma} - \pi g x_{\Delta} \operatorname{ch} \pi \sigma + \operatorname{Im} \left[z_{\Delta} \frac{\partial z_{\Delta}}{\partial \sigma} \right] = \frac{1}{\lambda} \frac{d\psi}{d\sigma}. \quad (14)$$

Это уравнение представляет собой нелинейное граничное условие при решении краевой задачи для определения неизвестной функции $z_{\Delta}(\sigma)$.

Задача решается методом коллокаций. Для этого используем представление этой функции в виде (7)–(8). Искомыми являются значения $\operatorname{Re} z_{\Delta}(\sigma_m) = x_m$ в узловых точках σ_m ($m=1, \dots, n-1$) и параметр λ (как было указано выше, $x_n=0$). Подставляя $z_{\Delta}(\sigma_m)$ и $\frac{\partial z_{\Delta}}{\partial \sigma}(\sigma_m)$ при $\sigma=\sigma_m$ ($m=0, \dots, n-1$) в (14) и определив $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ по формулам (3), (4), со-

ставим систему нелинейных уравнений. Также определим масштаб, задав $x_0=1$.

Искомыми также являются значения $\operatorname{Re} f_1(\sigma_m) = f_m$ в узловых точках σ_m

($m=1, \dots, n-1$). (Как было указано выше, $f_0=f_n=0$). Для определения этих параметров составим систему линейных уравнений, потребовав выполнение уравнений (13) при $\sigma=\sigma_m$ ($m=1, \dots, n-1$). Максимальное значение σ_n равно 10.

Тем самым, получим систему $2n-1$ нелинейных уравнений, которая решается методом Ньютона с регулированием шага.

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Результаты решения осесимметричной автомодельной задачи приведены на рис. 3–5 (кривые 1) в сравнении с аналогичным решением плоской задачи (кривые 2). Асимптотический характер зависимости $x \sim y-2$ у плоской формы, $y \sim x-3$. На рис. 3 представлена форма автомодельной поверхности (повернутая на 90° по часовой стрелке). При этом форма плоской автомодельной поверхности получена по формуле [1]

$$z(t) = \frac{1}{2}(t + 2i) \frac{t - i}{t + i}.$$

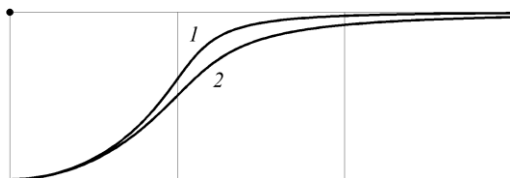


Рис. 3. Формы автомодельных поверхностей: 1 – осесимметричной, 2 – плоской

Видно, что форма осесимметричной автомодельной поверхности близка к соответствующей плоской. При этом абсолютные значения максимальной и минимальной кривизны осесимметричной автомодельной формы несколько выше (рис. 4).

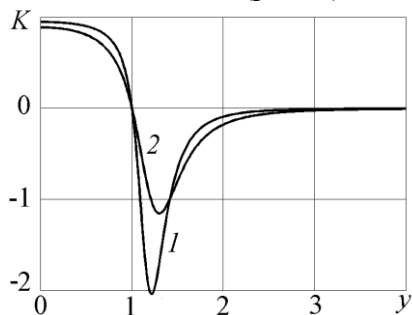


Рис. 4. Кривизна автомодельных поверхностей: 1 – осесимметричной, 2 – плоской

На рис. 5 приведена зависимость модуля напряженности на поверхности от ординаты.

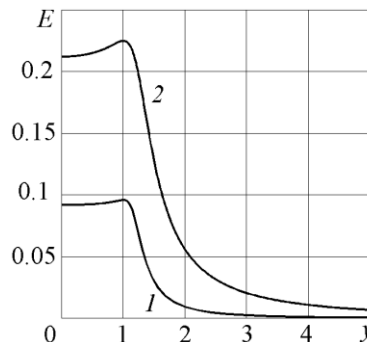


Рис. 5. Напряженность на автомодельных поверхностях: 1 – осесимметричной, 2 – плоской

В табл. 1 даны значения параметров решения ($1/\lambda$, K_D , E_D – кривизна и безразмерная напряженность в точке D , K_{min} – минимальное значение кривизны поверхности, σ_n , x_n , y_n – координаты точки перегиба обрабатываемой поверхности) с оценками погрешности и относительной размытости, соответствующие иллюстрации оценок и фильтрации на рис. 6–9.

Таблица 1

Результаты решения осесимметричной задачи

Параметр	Значение	Оценка погрешности	Размытость
$1/\lambda$	10,884951335035	$\pm 1 \cdot 10^{-11}$	0,1
E_D	0,09186995598055	$\pm 1 \cdot 10^{-13}$	0,1
K_D	0,948474795	$\pm 1 \cdot 10^{-8}$	0,1
K_{min}	-2,0426225	$\pm 2 \cdot 10^{-6}$	0,1
σ_n	0,289716912	$\pm 3 \cdot 10^{-9}$	0,2
x_n	0,4031529	$\pm 4 \cdot 10^{-7}$	0,1
y_n	0,9990055	$\pm 1 \cdot 10^{-7}$	0,1

Следует отметить, что в плоском случае безразмерная напряженность $E_x = \partial\varphi/\partial x$ на расстоянии 1 от одиночного источника равна $1/(2\pi)$; на плоской эквипотенциальной поверхности, расположенной на том же расстоянии от источника, удваивается: $E_x=1/\pi$. В автомодельном решении за счет перераспределения тока от центра к периферии напряженность имеет промежуточное значение $1/(1,5\pi)$. Аналогично, в осесимметричном случае напряженность от изолированного источника на расстоянии 1 равна $1/(4\pi)$, на плоской поверхности $1/(2\pi)$, в ав-

томодельном решении имеет промежуточное значение (приблизительно в 2,31 раза меньше, чем в плоском случае (табл. 1)).

Это видно и из рис. 5. При этом $\frac{1}{\lambda} E_x(1,0) = 1$, так как в силу краевого условия (14) $z dz/dw(1,0) = 1/\lambda$ (поскольку $z(1,0) = 1$, а $\frac{\partial z}{\partial \sigma}(1,0)$ имеет чисто мнимое значение).

Оценка погрешности численного решения проводилась методом фильтрации результатов вычислений [9–12]. На рис. 6–9 результаты фильтрации представлены в логарифмическом масштабе. По оси ординат отмечены десятичные логарифмы абсолютных величин полученных оценок погрешностей $-\lg \Delta$ (точность результатов). По оси абсцисс отложены десятичные логарифмы числа отрезков разбиения n (которое изменялось от 64 до 1339).

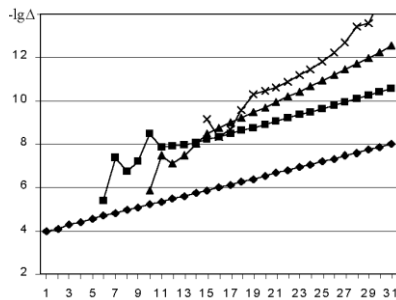


Рис. 6. Оценка относительной погрешности вычисления величины $1/\lambda$

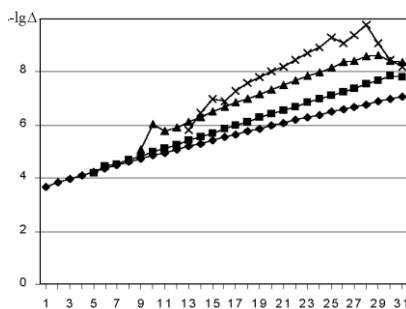


Рис. 7. Оценка относительной погрешности вычисления кривизны в точке D

В качестве оцениваемых параметров на рис. 6, 7 рассмотрены значения $1/\lambda$ и кривизны поверхности K_D в центральной точке D . Цифрой 0 отмечены оценки точности вычисленных данных, цифрами 1, 2, ... результаты первой, второй и т.д. фильтрации. Разность ординат между двумя кривыми

представляет собой логарифм отношения оценок для разных фильтраций. Это отношение называется размытостью оценки. На рис. 8, 9 рассмотрены значения минимальной кривизны и ординаты точки перегиба.

Как видно, в результате фильтрации точность повышается на 3–5 порядков. Результаты численного анализа (рис. 8, 9) показывают, что нерегулярная составляющая погрешности, связанная с переменной положением точек относительно узлов сетки несколько затрудняет проведение фильтрации минимального значения кривизны и координат точки перегиба.

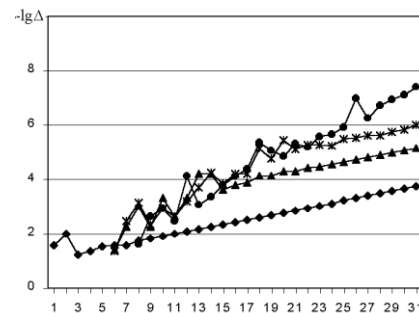


Рис. 8. Оценка относительной погрешности вычисления минимальной кривизны

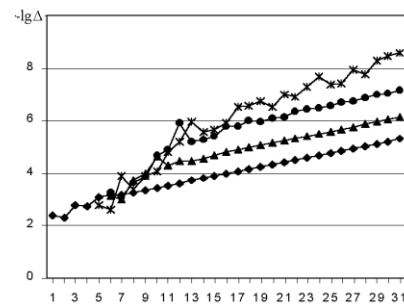


Рис. 9. Оценка относительной погрешности вычисления ординаты точки перегиба

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе на основе закона Фарадея и геометрического условия сохранения подобия найден вид краевого условия автомодельности, удобный для аналитического и численного решения осесимметричных задач.

Предложен метод численного решения задачи автомодельной электрохимической обработки точечным электродом-инструментом в осесимметричной постановке, основанный на интегральных преобразованиях аналитической функции. Численное ре-

шение подтвердило высокую эффективность предложенного метода.

Получены численные значения (с оценкой погрешности) геометрических и физических параметров. Например, значения кривизны границы вычислены с точностью около 7 значащих цифр.

Авторы выражают благодарность д-ру физ.-мат. наук, проф. В. П. Житникову за высказанные замечания и пожелания по улучшению статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Житников В. П., Зиннатуллина О. Р., Федорова Г. И.** Аналитическое решение задачи Римана-Гильберта с условиями, имеющими место в плоских и осесимметричных задачах Хеле-Шоу // Вестник УГАТУ. 2006. Т. 7, № 2 (15). С. 149–154. [V. P. Zhitnikov, O. R. Zinnatullina and G. I. Fedorova, "Analytic solution of Riemann-Gilbert problem for plane and axisymmetric Hele-Shaw problems" (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 7, no. 2 (15), pp. 149-154, 2006.]
- Положий, Г. Н.** Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. Киев: Киев. ун-т, 1965. 442 с. [G. N. Polozhii, *Generalization of the theory of complex variable analytical functions*, (in Russian). Kiev: Kiev. University, 1965.]
- Полубаринова-Кочина П. Я.** Нестационарное движение в теории фильтрации. // ПММ. 1945. Т. 9. С. 79–90. [P. Ya. Polubarinova-Kochina, "Nonstationary moving in filtration theory" (in Russian), in *PMM*, vol. 9, pp. 79-90, 1945.]
- Галин Л. А.** Нестационарная фильтрация со свободными границами // ДАН СССР. Т. 47, 1945. С. 246–249. [L. A. Galin, "Nonstationary filtration with free boundaries" (in Russian), in *DAN SSSR*, vol. 47, pp. 246-249, 1945.]
- Zhitnikov V. P., Fedorova G. I., Sherykhalina N. M., Urakov A. R.** Numerical investigation of non-stationary electrochemical shaping based on an analytical solution of the Hele-Shaw problem // *Journ. Eng. Math.*, Vol. 55, 2006. P. 255–276. [V. P. Zhitnikov, G. I. Fedorova, N. M. Sherykhalina and A. R. Urakov, "Numerical investigation of non-stationary electrochemical shaping based on an analytical solution of the Hele-Shaw problem," in *Journ. Eng. Math.*, vol. 55, pp. 255-276, 2006.]
- Житников В. П., Зиннатуллина О. Р., Поречный С. С., Шерыхалина Н. М.** Особенности установления предельных решений нестационарных осесимметричных задач Хеле-Шоу // ПМТФ. 2009. Т. 50, №4. С. 87–99. [V. P. Zhitnikov, O. R. Zinnatullina, S. S. Porechniy, N. M. Sheryhalina, "Features of relaxation of limit solutions of Hele-Shaw axisymmetric problems" (in Russian), in *PMTF*, vol. 50, no. 4, pp. 87-99, 2009.]
- Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с. [M. A. Lavrentiev, B. V. Shabat, *Methods of the theory of functions of a complex variable*, (in Russian). M.: Nauka, 1973.]
- Житников В. П., Зиннатуллина О. Р., Житникова Н. И.** Модификация методов численного интегрирования для решения осесимметричных задач // Вестник УГАТУ. 2015. Т. 19, № 2 (68). С. 179–182. [V. P. Zhitnikov, O. R. Zinnatullina, and N. I. Zhitnikova, "Modification of integration methods for axisymmetric problems solution" (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 19, no. 2 (68), pp. 179-182, 2015.]
- Житников В. П., Шерыхалина Н. М.** Методы верификации математических моделей в условиях неопределенности // Вестник УГАТУ. 2000. № 2. С. 53–60. [V. P. Zhitnikov, N. M. Sheryhalina, "Verification methods of mathematical models in uncertainty conditions" (in Russian), in *Vestnik UGATU*, no. 2, pp. 53-60, 2000.]
- Житников В. П., Шерыхалина Н. М.** Обоснование методов фильтрации результатов численного эксперимента // Вестник УГАТУ, 2007. Т. 9, № 3 (21). С. 71–79. [V. P. Zhitnikov, N. M. Sheryhalina, "Arguments of filtration methods of numerical experiment results" (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 9, no. 3 (21), pp. 71-79, 2007.]
- Житников В. П., Шерыхалина Н. М., Поречный С. С.** Об одном подходе к практической оценке погрешностей численных результатов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2009. №3 (80), С. 105–110. [V. P. Zhitnikov, N. M. Sheryhalina, and S. S. Porechniy, "One approach to practical error estimation of numerical results" (in Russian), in *Nauchno-tekhicheskie ведомosti SPbGPU*, no. 3(80), pp. 105-110, 2009.]
- Zhitnikov V. P., Sherykhalina N. M., Sokolova A. A.** Problem of Reliability Justification of Computation Error Estimates // *Mediterranean Journal of Social Sciences*, 2015, Vol. 6, No. 2. P. 65–78. [V. P. Zhitnikov, N. M. Sherykhalina and A. A. Sokolova, "Numerical investigation of non-stationary electrochemical shaping based on an analytical solution of the Hele-Shaw problem," in *Mediterranean Journal of Social Sciences*, vol. 6, no. 2, pp. 65-78, 2015.]

ОБ АВТОРАХ

ЗИННАТУЛЛИНА Ольга Рифовна, доц. каф. ВМиК. Дипл. инж.-системотехн. (УГАТУ, 2002). Канд. физ.-мат. наук по механ. жидкости, газа и плазмы (УГАТУ 2006). Иссл. в обл. электрохимического формообразования, разработки числ.-аналит. методов.

ШЕРЫХАЛИНА Наталия Михайловна, проф. каф. ВМиК. Дипл. инж.-системотехн. (УГАТУ, 1993). Д-р техн. наук по мат. моделированию, числ. методам и комплексам программ (УГАТУ 2012). Иссл. в обл. волновых течений жидкости, разработки числ.-аналит. методов, методов оценки погрешности и достоверности числ. результатов.

ЖИТНИКОВА Наталья Ивановна, доц. каф. ВМиК. Дипл. инж.-мех (УАИ, 1972). Канд. техн. наук по динамике и прочности машин, приборов и аппаратуры (УГАТУ, 1994). Иссл. в обл. механики оболочек, числ. методов.

METADATA

Title: Self-similar axisymmetric electrochemical machining simulation

Authors: O. R. Zinnatullina¹, N. M. Sherykhalina¹, N. I. Zhitnikova³

Affiliation:

Ufa State Aviation Technical University (UGATU), Russia.

Email: ¹olga_zr@mail.ru, ²n_sher@mail.ru, ³zhitnikova_ni@mail.ru

Language: Russian.

Source: Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 21, no. 4 (78), pp. 32-40, 2017. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

Abstract: The problem of self-similar shaping simulation and boundary conditions are formulated accordingly Faraday's law. The problem is reducing to the solution of a boundary problem for determination of analytical function of a complex variable. Unlike a plane problem for determination of potential, stream function and intensity, the integral transformations of analytical function are used. Interpolation by a spline functions is made, the method of the solution of self-similar axisymmetric problem differing from known by the accuracy is described. Results of the numerical solution are presented.

Key words: axisymmetric problem; complex variables; integral transformations; self-similar solution.

About authors:

ZINNATULLINA, Olga Rifovna, Doc., Dept. of computer science and robotics. Dipl. Engineer-system master (UGATU, 2002). Cand. of Phys.-Math. Sci. (BGU, 2006).

SHERYKHALINA, Nataliya Mikhailovna, Prof., Dept. of computer science and robotics. Dipl. Engineer-system master (UGATU, 1993). Cand. of Phys.-Math. Sci. (BGU, 1996), Dr. of Tech. Sci. (UGATU, 2012).

ZHITNIKOVA, Natalya Ivanovna, Doc., Dept. of computer science and robotics. Dipl. Engineer-mech. (UAI, 1972). Cand. of Techn. Sci. (UGATU, 1994).