Уфа : УГАТУ, 2009 Вестник УГАТУ • Управление, ВТ и И Т.12, № 1(30). С. 156–160

УДК 681.5.03

О. К. БАБКОВ

О НАСЛЕДСТВЕННОСТИ ЛОКАЛЬНО-КОНЕЧНОГО РАДИКАЛА В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ РАСШИРЕНИЙ АЛГЕБР

Исследуется связь между локально-конечными радикалами алгебры R и ее подалгебры B в том случае, когда R является алгебраическим расширением B, при некоторых ограничениях, накладываемых на это расширение. *Локально-конечный радикал ; наследственность ; алгебраическое расширение ; подалгебра*

Пусть F – поле, M – множество многочленов над F от одной переменной без свободного члена. F-алгебру R назовем M-расширением своей подалгебры B, $R\,|_M\, B$, если для каждого элемента $r \in R$ найдется ненулевой многочлен $f \in M$, зависящий от r, такой, что $f(r) \in B$.

В настоящей работе исследуется связь между локально-конечными радикалами алгебр R и B таких, что $R\,|_M\, B$, при некоторых ограничениях, накладываемых на множество многочленов M. Локально-конечный радикал какой-либо алгебры A будет обозначаться через $L(A)$. Определение и свойства этого радикала см. в [2, § 6.4].

Определение 1. *Множество M ненулевых многочленов над полем F от одной переменной без свободного члена назовем A-множеством, если выполнено следующее условие* (A):

(A) каждая F-алгебра, являющаяся M-расширением своей локально-конечной подалгебры, является, в свою очередь, локально-конечной.

Примером A-множества многочленов может служить множество $A(n, F, t)$ ненулевых многочленов без свободного члена над полем F от одной переменной t, имеющих степень не выше n. Согласно теореме А. З. Ананьина [1], существует целочисленная функция $p(n)$, такая, что если характеристика поля F больше $p(n)$ (или равна нулю), то $A(n, F, t)$ является A-множеством.

Контактная информация: (347)273-77-35

Определение A-множества вводится для того, чтобы формулировка основного результата настоящей работы (теорема 2) не зависела от появления новых примеров A-множеств.

Теорема 2. *Пусть F – поле, M – некоторое A-множество многочленов над F от одной переменной без свободного члена, R – алгебра над F, B подалгебра R и $R\,|_M\, B$. Тогда* $L(B) = L(R) \cap B$.

1. ПОЛУПЕРВИЧНЫЕ АЛГЕБРЫ

В этом пункте рассматриваются некоторые общие свойства алгебраических расширений в классе полупервичных алгебр.

Лемма 3. *Пусть Φ – коммутативное кольцо, R – алгебра над Φ, порожденная как Φ-алгебра двумя элементами x, a, для которых выполняются соотношения:*

(1) $a^2 = 0$;

(2) $a(\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n)a = 0$ *для некоторых* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \Phi$;

(3) если $r, s \in R$ *и* $rs = 0$, *то* $ras = 0$.

Тогда справедливы равенства

$$\alpha_{n-i}(xa)^{(n+1)+n+\ldots+(n-i+1)} = 0,\quad i = 0, 1, \ldots, n-1. \qquad (1)$$

Доказательство. Справедливость равенств (1) докажем по индукции. По условию

$$ax \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 x + \ldots + \alpha_n x^{n-1})a = 0. \qquad (2)$$

В силу пункта 3 условий данной леммы отсюда вытекает

$$ax \cdot a \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 x + \ldots + \alpha_n x^{n-1})a = 0.$$

Так как $a^2 = 0$, то

$$ax \cdot ax \cdot (\alpha_2 + \alpha_3 x + \ldots + \alpha_n x^{n-2})a = 0.$$

Продолжая этот процесс, через конечное число шагов получим:

$$\alpha_n a(xa)^{n-1} x \cdot a = 0, \qquad \alpha_n (xa)^{n+1} = 0.$$

Тем самым мы доказали первое из равенств (1).

Допустим теперь, что для некоторого $i = 0,1,\ldots,n$ мы доказали равенства

$$\alpha_n (xa)^{n+1} = 0,\ldots,\alpha_{n-i}(xa)^{(n+1)+n+\ldots+(n-i+1)} = 0. \quad (3)$$

Обозначая $N=(n+1)+n+\ldots+(n-i+1)$, домножим равенство (2) справа на $(xa)^N$. Учитывая равенства (3), справедливые в силу предположений индукции, получаем:

$$ax \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 x + \ldots + \alpha_{n-(i+1)} x^{n-(i+1)})a \cdot (xa)^N = 0.$$

Применим к этому равенству описанный выше процесс использования пункта 3 условий доказываемой леммы и равенства $a^2 = 0$; через $n - i - 2$ шагов находим:

$$\alpha_{n-(i+1)} a \cdot (xa)^{n-i-2} x \cdot a(xa)^N = 0,$$

$$\alpha_{n-(i+1)} (xa)^{(n+1)+n+\ldots+(n-i+1)+(n-i)} = 0.$$

В силу принципа полной индукции равенства (1) доказаны.

Пусть Φ – ассоциативно-коммутативное кольцо, $\Phi[t]$ – кольцо многочленов над Φ от переменной t. Многочлен $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_s t^s \in \Phi[t]$ назовем регулярным относительно Φ-алгебры R, если из равенств $\alpha_0 z = \alpha_1 z = \ldots = \alpha_s z = 0$ для $z \in R$ следует $z = 0$. Множество многочленов $\Lambda \subseteq \Phi[t]$ назовем регулярным относительно алгебры R, если каждый элемент Λ регулярен относительно R. Для многочлена $f(t) \in t\Phi[t]$ положим $f(t) = t\overline{f}(t)$.

Левый идеал L алгебры R назовем левым Λ-идеалом, если он является Λ-расширением своего правого аннулятора: $L\Big|_{\Lambda} r_R(L)$.

Теорема 4. *Пусть R – полупервичная алгебра над коммутативным кольцом Φ, не содержащая односторонних Λ-идеалов, где Λ – семейство многочленов над Φ от одной переменной без свободного члена, регулярное относительно алгебры R. Тогда*

1. *Если $b \in R$, L – левый идеал R и для каждого $x \in L$ найдется многочлен $f_x \in \Lambda$, такой, что $bf_x(x) = 0$, то $bL = 0$.*

2. *Если $a \in R$ и для каждого $x \in R$ найдется многочлен $f_x \in \Lambda$, такой, что $af_x(x)a = 0$, то $a = 0$.*

Доказательство. Докажем первое утверждение теоремы. Введем обозначение

$$B = \{b \in R | (\forall x \in L)(\exists f_x(t) \in \Lambda)\, bf_x(x) = 0\}.$$

Отметим, что для $b \in B$ включение $Rb \subseteq B$ следует из определения.

Доказательство проводится в несколько шагов.

Шаг 1. *Покажем, что если $b \in B$ и $a \in L$ – нильпотентный элемент, то* $ba = 0$. Пусть m – наименьшее целое, такое, что $ba^m = 0$. Предположим, что $m > 1$ и обозначим $c = a^{m-1}$. Тогда $c \in L$, $bc \neq 0$ и $bca = bc^2 = 0$.

Покажем сначала, что $bcr_R(b) = (0)$. Пусть $y \in r_R(b)$ произвольный элемент. Тогда $(c+1)ybc \in L$, и по условию для некоторого $f_y \in \Lambda$ имеем $b\, f_y\, ((c+1)ybc) = 0$. Отсюда, в силу $bc^2 = 0$ и $by = 0$, получаем:

$$0 = bf_y((c+1)ybc) =$$

$$= b(c+1)\overline{f}_y(ybc(c+1))ybc =$$

$$= b(c+1)\, f_y(ybc) = bcf_y(ybc) = f_y(bcy)bc = 0.$$

Последнее равенство означает, что $bcr_R(b) \lhd_l^{\Lambda} R$ – правый Λ-идеал R. Согласно условию доказываемой теоремы $bcr_R(b) = (0)$.

Возьмем теперь произвольный элемент $x \in R$. Поскольку $xbc \in L$, то для некоторого $f_x \in \Lambda$ имеем $bf_x(xbc) = 0$, то есть $f_x(xbc) \in r_R(b)$. По доказанному, отсюда вытекает $bf_x(xbc) = 0$ и $Rbc \lhd_l^{\Lambda} R$. Значит, $Rbc = 0$. Алгебра R полупервична, поэтому $bc = ba^{m-1} = 0$. Это противоречит выбору m и показывает, что $m=1$, то есть $ba = 0$.

Шаг 2. *Покажем, что для любых элементов $b \in B$, $z \in L$ элемент bz нильпотентен.* Пусть $b \in B$, $z \in L$. В силу условий доказываемой теоремы найдется многочлен $f_z(t) = \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_n t^n \in \Lambda$, регулярный относительно R, для которого

$$b(\alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_n z^n) = 0.$$

Получим отсюда с помощью индукции равенства

$$\alpha_1(bz)b = 0,\ldots,\alpha_n(bz)^n b = 0. \qquad (4)$$

Выберем произвольный элемент $y \in R$ и пусть

$$p_1 = \alpha_2 + \alpha_3 z + \ldots + \alpha_n z^{n-2},$$

$$a_1 = (\alpha_1 + zp_1)ybz.$$

Тогда $a_1 \in L$, $a_1 = 0$ и $ba_1 = 0$ согласно шагу 1, то есть $b(\alpha_1 + zp_1)ybz = 0$. В силу произвольности выбора $y \in R$ получаем

$$bzb(\alpha_1 + zp_1)Rbzb(\alpha_1 + zp_1) = 0.$$

Так как алгебра R полупервична, то $bzb(\alpha_1+zp_1) = 0$. Отсюда $R\alpha_1 bzb = R(bz)^2 p_1 \in B \cap \cap L$ и $R\alpha_1 bzb \triangleleft_l^{\Lambda} R$. Согласно условиям теоремы $R\alpha_1 bzb = (0)$ и $\alpha_1 bzb = 0$. Кроме того,

$$(bz)^2 p_1 = (bz)^2(\alpha_2 + \alpha_3 z + \ldots + \alpha_n z^{n-2}) = 0.$$

Предположим, что для некоторого $m < n$ мы доказали равенства

$$\alpha_{m-1}(bz)^{m-1} b = 0,$$
$$(bz)^m(\alpha_m + \alpha_{m+1} z + \ldots + \alpha_n z^{n-m}) = 0.$$

Возьмем произвольный элемент $y \in R$ и положим

$$p_m = \alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} z + \ldots + \alpha_n z^{n-m-1},$$
$$a_m = (\alpha_m + zp_m)y(bz)^m.$$

Тогда $a_m \in L$ и $a^2_m = 0$ по предположению индукции. Как показано выше на шаге 1, отсюда следует $ba_m = 0$. Таким образом, в силу произвольности выбора $y \in R$ имеем

$$(bz)^m b(\alpha_m + zp_m)R(bz)^m b(\alpha_m + zp_m) = 0.$$

Отсюда, как выше, следуют равенства

$$\alpha_m(bz)^m b = 0,$$
$$(bz)^{m+1}(\alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} z + \ldots + \alpha_n z^{n-m-1}) = 0.$$

Согласно принципу полной индукции, получаем соотношения (4).

Из регулярности относительно R многочлена $f_z(t)$ вытекает $(bz)^{n+1} = 0$, то есть bz нильпотентный элемент.

Шаг 3. Пусть $x \in R$, $b \in B$, z_1, $z_2 \in L$ произвольные элементы. Тогда $xb \in B$ и, как показано на шаге 2, элемент xbz_1z_2 нильпотентен, а вместе с ним нильпотентен и элемент z_2xbz_1. Поскольку $z_2xbz_1 \in L$, то $bz_2xbz_1= 0$, см. шаг 1. Это означает, в силу произвольности выбора $x \in R$, z_1, $z_2 \in L$, что $bLRbL = (0)$. Так как алгебра R полупервична, то $bL = 0$.

Докажем теперь второе утверждение теоремы. Для этого обозначим

$$N = \{a \in R | (\forall x \in R)(\exists f_x(t) \in \Lambda)\ af_x(x)a = 0\}.$$

Покажем сначала, что если $a \in N$, то $a^2 = 0$. Действительно, для каждого $x \in R$ найдется $f_x \in \Lambda$ такой, что $af(axa)a = 0$. Отсюда $a^2 f(xa^2) = 0$ и $Ra^2 \triangleleft_l^{\Lambda} R$. В силу условий теоремы имеем $Ra^2 = 0$ и $a^2 = 0$.

Докажем, что если $a \in N$, r, $s \in N$ и $rs = 0$, то $ras = 0$. Пусть $b \in R$, $b^2 = 0$. Возьмем произвольный элемент $x \in R$. Для некоторого $f_x \in \Lambda$ имеет место равенство $af_x(b+axa)a = 0$. Отсюда

$$af_x(b + axab)a = a(b + axab)\overline{f}_x(axab)a =$$
$$= ab\overline{f}_x(axab)a = 0.$$

Умножая это равенство справа на x и перегруппировывая сомножители, получаем $f_x(abax) = 0$. Таким образом, $abaR \triangleleft_l^{\Lambda} R$. Следовательно, $abaR = (0)$ и $aba = 0$ в силу полупервичности R. Пусть $y \in R$ произвольный элемент. Тогда $(syr)^2 = 0$ и по доказанному $asyra = 0$. Отсюда $rasRras = (0)$ и $ras = 0$, так как алгебра R полупервична.

Пусть $a \in N$. Выберем произвольные элементы z, $x \in R$. По условию, для некоторого многочлена $f_x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + + \alpha_n t^n \in \Lambda$ имеет место равенство $af_x(x)a = 0$, откуда

$$aza(\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n)aza = 0.$$

Поскольку $aza \in N$, то в силу доказанных свойств элементов множества N, к элементам $aza \in N$, $x \in R$, входящим в это равенство, возможно применение леммы 3. Имеем:

$$\alpha_1(xaza)^q = \ldots = \alpha_n(xaza)^q = 0,$$

где $q = (n + 1) + n + \ldots + 2$. Из регулярности f_x относительно алгебры R вытекает $(xaza)^q = 0$ и $(axaz)^{q+1} = 0$. Число q, как и число n, зависит только от выбора элементов $a \in N$, $x \in R$ и не зависит от выбора элемента $z \in R$. Так как элемент $z \in R$ выбирался произвольным образом, то в правом идеале $axaR$ алгебры R выполнено тождество $t^{q+1} = 0$. Поскольку алгебра R полупервична, то из теоремы Левицкого [3, лемма 1.1], следует $axaR = 0$ и $axa = 0$. Элемент x выбирался произвольным образом, поэтому $aRa = (0)$ и $a = 0$ в силу полупервичности алгебры R.

2. НАСЛЕДСТВЕННОСТЬ ЛОКАЛЬНО-КОНЕЧНОГО РАДИКАЛА

Лемма 5. *Пусть M – некоторое A-множество многочленов над полем F от одной переменной без свободного члена, R – алгебра* *над F, A – подалгебра R и* $R\big|_M A$. *Тогда из равенства* $L(R) = 0$ *следует равенство* $L(A) = 0$.

Доказательство. Обозначим $G = \{d \in L(A) | d^2 = 0\}$. Пусть $b \in G$, $a \in R$, $a^2 = 0$. Выберем произвольный элемент $r \in R$. По условию, найдется $f \in M$, такой, что $f(arab + ara) \in A$. Для каждого целого числа $q \geq 1$ имеем

$$(arab + ara)^q b =$$
$$(arab)^{q-1}(arab + ara)b = (arab)^q.$$

Поскольку $b \in L(A)$, то $f(arab + ara)b = f(arab) \in L(A)$. Таким образом, алгебра $aRab$ является M-расширением локально-конечной алгебры $aRab \cap L(A)$. По условию, M является A-множеством, следовательно, алгебра $aRab$ локально конечна. Докажем, что алгебра $Raba$ локально конечна. Выберем произвольные элементы $r_1, \ldots, r_n \in R$ и обозначим через Q алгебру, порожденную над F множеством $\{r_i aba | i = 1, \ldots, n\}$, а через T – алгебру, порожденную над полем F множеством $\{ar_i ba | i = 1, \ldots, n\}$. Так как T является подалгеброй локально-конечной алгебры $aRab$, то $[T : F] < \infty$. Пусть $t_1, \ldots, t_N$ базис алгебры T над полем F. Тогда конечное множество $\{r_i abt_j a, r_i aba | \ i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, N\}$ порождает Q как линейное пространство над полем F. Таким образом, $Raba$ – левый локально конечный идеал R. Согласно [2, теорема 6.4.1] $Raba \subseteq L(R) = 0$. Так как алгебра R полупервична, то $aba = 0$, и в силу произвольности выбора $b \in G$ имеем $aGa = 0$ для каждого $a \in R$ такого, что $a^2 = 0$.

Пусть $a, b \in R$ таковы, что $ab = 0$ и $g \in G$. Докажем, что $agb = 0$. Выберем $r \in R$. Поскольку $(bra)^2 = 0$, то, как было показанно ранее, $bra \cdot g \cdot bra = 0$, откуда $(ragb)^3 = 0$. Таким образом, левый идеал $Ragb$ полупервичной алгебры R удовлетворяет тождеству $t^3 = 0$. Согласно [1, лемма 1.1] $Ragb = 0$ и $agb = 0$ в силу полупервичности R.

Пусть $q \in A$ нильпотентный элемент, $q^n = 0$. Если $a \in A$, $b \in G$ произвольные элементы, то $bab \in G$ и по доказанному из равенства $q^n = 0$ последовательно получаем: $qabaq^{n-1} = 0$, $(qbab)^2 q^{n-2} = 0$, …, $(qbab)^n = 0$. Умножая последнее равенство слева на ab и справа на qb, находим $(abqb)^{n+1} = 0$. Поскольку число n в этом равенстве зависит только от выбора элемента $q \in A$ и не зависит от выбора $a \in A$, то левый идеал $Abqb$ алгебры A удовлетворяет тождеству $t^{n+1} = 0$.

С целью применения теоремы **4** рассмотрим правый идеал I алгебры R такой, что $I\big|_M l_I(I)$. Обозначим $J = l_I(I)$. Тогда $J \lhd I$, факторалгебра I/J является M-расширением нулевой алгебры и потому локально-конечна в силу [2, лемма 6.4.1]. Из [2, теорема 6.4.1] вытекает, что $I \subseteq L(R) = 0$.

По теореме **4** алгебра A полупервична. Согласно [3, лемма 1.1] $Abqb = 0$ и $bqb = 0$.

Если $L(A)$ нильалгебра, то для элемента $0 \neq b \in L(A)$ такого, что $b^2 = 0$, получим, как показано выше, $bL(A)b = 0$. Это противоречит полупервичности алгебры $L(A)$, являющейся идеалом полупервичной алгебры A.

Пусть $0 \neq a \in L(A)$ ненильпотентный элемент. Алгебра $L(A)$ является алгебраической F-алгеброй, поэтому для некоторого целого числа $n \geq 1$ и многочлена a с коэффициентами в поле F имеем $a^n = a^{n+1} f(a)$. Обозначая $e = (af(a))^n$, имеем:

$$a^n = a^{n+1} f(a) = a^{n+2}(f(a))^2 = \ldots$$
$$\ldots = a^{2n}(f(a))^n = a^n e.$$

Если $e = 0$, то $a^n = 0$ вопреки выбору a. Умножая полученное равенство $a^n = a^n e$ на $(f(a))^n$, находим $e = e^2$. Так как $e \in L(A) \subseteq A$, то $Re \cap A = Ae$ и $Re\big|_M Ae$. Так как $Ae \subseteq L(A)$, то Ae локально-конечная F-алгебра, и, согласно определению A-множества, алгебра Re локально-конечна. В силу [2, теорема 6.4.1] $Re \subseteq L(R) = 0$ и $e = 0$ вопреки построению. Таким образом, предположение $L(A) \neq 0$ привело к противоречию.

Доказательство теоремы 2. Включение $L(R) \cap B \subseteq L(B)$ очевидно, поэтому достаточно доказать, что $L(B) \subseteq L(R)$. Рассмотрим алгебру $S = R/L(R)$. Пусть $A = B/L(R) \cap B$. Тогда S является M-расширением A. Согласно [2, лемма 6.4.4] $L(S) = 0$. По лемме 5 $L(A) = 0$. Однако $L(B) + L(R)/L(R)$ локально-конечный идеал алгебры A. В силу [2, лемма 6.4.3] $L(B) + L(R)/L(R) \subseteq L(A) = 0$, откуда $L(B) \subseteq L(R)$.

Следствие 6. *Существует целочисленная функция* $p(n)$, *такая, что если* $n \geq 1$ *целое число, F – поле характеристики больше* $p(n)$ *(или* *равной нулю), R – алгебра над R, B– подалгебра R и для каждого $r \in R$ найдется зависящий от r, ненулевой многочлен f над F от одной переменной без свободного члена степени не выше n, такой, что $f(r) \in B$, то* $L(B) = L(R) \cap B$.

Это утверждение вытекает непосредственно из теоремы **2** и теоремы Ананьина [1].

Замечание. Возникающее по аналогии с локально-конечным радикалом предположение о наследственности локально-нильпотентного радикала N в классе алгебраических расширений ограниченной степени опровергается следующим примером. Пусть $n > 1$ – целое число, F поле, R – полная матричная алгебра квадратных $n \times n$ матриц над F, $B \subseteq R$ – ее подалгебра верхнетреугольных матриц. Тогда $N(R) = 0$, в то время как $N(B)$ совпадает с нильпотентной алгеброй верхнетреугольных матриц с нулевой главной диагональю. При этом по теореме Гамильтона-Кэли матричная алгебра R является $A(n, F, t)$ – алгебраическим расширением своего центра, содержащегося в алгебре B.

Тем не менее, справедливо следующее утверждение.

Следствие 7. *Если F – поле, M – некоторое A-множество многочленов над F от одной переменной без свободного члена, R – нильалгебра над F, B – подалгебра R и $R\big|_M B$, то* $N(B) = N(R) \cap B$.

Для доказательства достаточно заметить, что в силу [2, теорема 2.3.1] для каждой нильалгебры A имеет место равенство $N(A) = L(A)$ и применить теорему **2**.

Работа выполнена в инициативном порядке на кафедре математики УГАТУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ананьин, А. З.** Локальная конечность некоторых алгебр / А. З. Ананьев // Алгебра и логика. 1979. Т. 18, № 1. С. 3–8.
2. **Херстейн, И.** Некоммутативные кольца / И. Херстейн. М. : Мир, 1972. 191 с.
3. **Herstein, I. N.** Topics in ring theory / I. N.Herstein. Chicago : Univ. Chicago Press, 1969. 132 p.

ОБ АВТОРЕ

Бабков Олег Константинович, доц. каф. математики. Дипл. математик по математике и прикл. математике (НГУ, 1977). Канд. физ.-мат. наук по алгебре, логике и теории чисел (Кишинев, ин-т математики с ВЦ АН Молд. ССР, 1985). Иссл. в обл. теории колец, алгебраических свойств дифф. уравнений, групповой классификации дифф. уравнений.