

УДК 629.7

## ОПИСАНИЕ ГЕОМЕТРИИ НАРУЖНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПЕРА РАБОЧЕЙ ЛОПАТКИ ОСЕВОГО КОМПРЕССОРА ГТД ДВУМЕРНЫМИ СПЛАЙНАМИ СТЕПЕНИ 2 ДЕФЕКТА 1

В. П. Павлов

[victor.pavlov.51@yandex.ru](mailto:victor.pavlov.51@yandex.ru)

ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

Поступила в редакцию 15.10.2017

**Аннотация.** Разработан алгоритм построения в матричной форме двумерных сплайнов степени 2 дефекта 1. На его основе разработана методика описания наружной поверхности рабочей лопатки осевого компрессора ГТД и построена математическая модель наружной поверхности перьевой части конкретной рабочей лопатки, позволяющая определить координаты любой точки на ее наружной поверхности. Данное исследование является основой для создания методики применения двумерных сплайнов степени 2 при математическом описании схемы укладки слоев композиционных материалов в композитной рабочей лопатке осевого компрессора ГТД и последующем применении модели укладки слоев при расчетах на прочность, жесткость и колебания.

**Ключевые слова:** ГТД; осевой компрессор; рабочая лопатка; геометрия поверхности; сплайны; математическое моделирование.

### ВВЕДЕНИЕ

При проектировании и расчете на прочность, жесткость и колебания рабочей лопатки компрессора газотурбинного двигателя (ГТД) необходима математическая модель ее наружной поверхности. Представляется перспективным построение такой модели на основе сплайнов [1].

Наиболее простым является сплайн первой степени, при котором между любой парой соседних узлов сплайна аппроксимируемая кривая линия рассматривается как отрезок прямой линии. Поэтому в узловых точках первая производная сплайна первой степени имеет разрыв.

Следующим по сложности является сплайн второй степени дефекта 1, у которого между любой парой соседних узлов

сплайна аппроксимирующая кривая рассматривается как многочлен второй степени. При этом неразрывными являются как сами значения рассматриваемой функции, так и первые производные данной функции по пространственной координате.

В настоящее время в литературе очень часто для аппроксимации поверхностей применяются сплайны третьей степени. Однако сплайны третьей и более высоких степеней имеют склонность к осцилляции и работа с ними требует высокой осторожности.

В связи с этим в данной работе разработана методика построения одномерных и двумерных сплайнов степени 2 дефекта 1, ориентированных на аппроксимацию кривых линий и поверхностей рабочей лопатки компрессора ГТД.

Следует отметить, что в общедоступной литературе не рассматриваются возможности применения двумерных сплайнов вто-

---

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Башкортостан в рамках научного проекта №\_17-48-020824\_p\_a.*

рой степени для аппроксимации поверхностей лопатки ГТД. Поэтому представляется полезным в данной статье детально изложить методику описания наружной поверхности лопаток ГТД двумерным сплайном степени 2 с тем, чтобы заинтересованные читатели могли ее применить в своих исследованиях.

### ОДНОМЕРНЫЙ СПЛАЙН ВТОРОЙ СТЕПЕНИ ДЕФЕКТА 1

#### Общая характеристика одномерного сплайна второй степени дефекта 1

Рассмотрим алгоритм построения сплайна степени 2 дефекта 1, используя общие подходы к построению полиномиальных сплайнов, изложенные в работах [2–12].

В начале на отрезке  $[a, b]$  зададим разбиение

$$\Delta: a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b, \quad (1)$$

где  $N$  – число узлов точек.

Следуя [2], введем в рассмотрение функцию  $W_{2,1}(x)$ , которую будем называть сплайном степени 2 дефекта 1 с узлами на сетке  $\Delta$  и которая характеризуется тем, что на каждом из отрезков  $[x_i, x_{i+1}]$  функция  $W_{2,1}(x)$  является многочленом степени 2, т.е.

$$W_{2,1}(x) = \sum_{\alpha=0}^2 a_{\alpha}^{(i)} (x - x_i)^{\alpha}, \quad (2)$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = \overline{1, N-1};$$

и при этом

$$W_{2,1}(x) \in C^1[a, b], \quad (3)$$

где  $C^1[a, b]$  – множество один раз непрерывно дифференцируемых на отрезке  $[a, b]$  функций.

Согласно (2) сплайн  $W_{2,1}(x)$  однозначно определяется коэффициентами  $a_{\alpha}^{(i)}$ , общее количество которых

$$N_a = 3(N-1) = 3N-3. \quad (4)$$

Введем обозначения для производных от сплайн-функции

$$\left\{ \begin{aligned} W_{2,1}^{(s)} &= \frac{d^s W_{2,1}(x)}{dx^s} = \\ &= \sum_{\alpha=s}^2 \frac{\alpha!}{(\alpha-s)!} a_{\alpha}^{(i)} (x-x_i)^{\alpha-s}, \quad (5) \\ x &\in [x_i, x_{i+1}], \\ i &= \overline{1, N-1}, \quad s = 0, 1, 2. \end{aligned} \right.$$

Рассмотрим узлы с координатами  $x_j$ ,  $j = \overline{2, N-1}$ , являющимися местами «склейки» соседних квадратных трехчленов.

Условие непрерывности сплайна (3) в данных точках задают

$$N_{\text{огр}} = 2(N-2) = 2N-4 \quad (6)$$

ограничительных линейных равенств

$$\left\{ \begin{aligned} W_{2,1}^{(0)}(x_j-0) &= W_{2,1}^{(0)}(x_j+0), \\ W_{2,1}^{(1)}(x_j-0) &= W_{2,1}^{(1)}(x_j+0), \quad (7) \\ j &= \overline{2, N-1}. \end{aligned} \right.$$

Таким образом, число степеней свободы сплайна  $W_{2,1}(x)$  с учетом (4) и (6) равно

$$N_s = N_a - N_{\text{огр}} = (3N-3) - (2N-4) = N+1, \quad (8)$$

Удобным является задание сплайна  $W_{2,1}(x)$  совокупностью коэффициентов его многочленов

$$a_{\alpha}^{(i)}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad \alpha = 0, 1, 2, \quad (9)$$

которые сведем в векторы-столбцы

$$\mathbf{A}_{\alpha} = (a_{\alpha}^{(i)}, \quad i = \overline{1, N-1})^T, \quad (10)$$

$$\alpha = 0, 1, 2.$$

Общее количество коэффициентов  $a_{\alpha}^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, N-1}$ ,  $\alpha = 0, 1, 2$  в итоге равно  $N_a = 3(N-1)$ , что на

$$N_a - N_s = 3(N-1) - (N+1) = 2N-4 \quad (11)$$

превышает число степеней свободы сплайна.

С целью уменьшения числа параметров, определяющих сплайн, введем в рассмотрение вектор столбец

$$\mathbf{P} = (P_k, \quad k = \overline{1, 2N})^T, \quad (12)$$

имеющий компоненты

$$\begin{cases} P_j = \mathbf{W}_{2,1}(x_i), & j = 2i - 1, \\ P_m = \mathbf{W}_{2,1}^{(1)}(x_i), & m = i, \\ & i = \overline{1, N} \end{cases} \quad (13)$$

и вектор-столбец

$$\mathbf{Q} = (Q_k, \quad k = \overline{1, N+1})^T, \quad (14)$$

имеющий компоненты

$$\begin{cases} Q_1 = \mathbf{W}_{2,1}^{(1)}(x_1), \\ Q_{i+1} = \mathbf{W}_{2,1}(x_i), & i = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (15)$$

Отметим, что вектор  $\mathbf{P}$  имеет на  $(N-1)$  больше параметров, чем степеней свободы сплайна, а число компонентов вектора  $\mathbf{Q}$  точно соответствует числу степеней свободы сплайна, равному  $(N+1)$ .

Векторы  $\mathbf{A}_\alpha$ ,  $\alpha = 0, 1, 2$  коэффициентов локальных многочленов сплайна зависят от векторов  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$ .

#### Соотношения связи между векторами $\mathbf{A}_\alpha$ и $\mathbf{P}$

Для узловых точек сплайна введем обозначения

$$\begin{cases} f_i = W_{2,1}(x_i), \\ f_i^{(1)} = W_{2,1}^{(1)}(x_i), & i = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (16)$$

Для отрезка  $[x_i, x_{i+1}]$  с учетом (2) и (5) запишем

$$\begin{cases} f_i = a_o^{(i)}, \\ f_i^{(1)} = a_1^{(i)}, \\ f_{i+1} = a_o^{(i)} + a_1^{(i)} h_i + a_2^{(i)} h_i^2, \\ h_i = x_{i+1} - x_i, \\ i = \overline{1, N-1}. \end{cases} \quad (17)$$

Решив систему (17) относительно  $a_o^{(i)}, a_1^{(i)}, a_2^{(i)}$ , получаем

$$\begin{cases} a_o^{(i)} = f_i, \\ a_1^{(i)} = f_i^{(1)}, \\ a_2^{(i)} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i^2} - \frac{f_i^{(1)}}{h_i}, \\ h_i = x_{i+1} - x_i, & i = \overline{1, N-1}. \end{cases} \quad (18)$$

Соотношения (18) с учетом (10) и (12) запишем в матричной форме

$$\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{L}_\alpha \mathbf{P}, \quad \alpha = 0, 1, 2, \quad (19)$$

где использованы матрицы

$$\begin{cases} \mathbf{L}_\alpha = (L_{i,j}^{(\alpha)}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{1, 2N}), \\ \alpha = 0, 1, 2, \end{cases} \quad (20)$$

формируемые по следующему алгоритму:

- вначале обнуляются все элементы матриц  $\mathbf{L}_\alpha$ ,  $\alpha = 0, 1, 2$

$$\begin{cases} L_{i,j}^{(\alpha)} = 0, & \alpha = 0, 1, 2, \\ i = \overline{1, N-1}, & j = \overline{1, 2N}, \end{cases} \quad (21)$$

- затем задаются ненулевые элементы матриц  $\mathbf{L}_\alpha$ :

$$\begin{cases} L_{i,j}^{(0)} = 1, \\ i = \overline{1, N-1}, \quad j = 2i - 1, \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} L_{i,j}^{(1)} = 1, \\ i = \overline{1, N-1}, \quad j = 2i, \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} L_{i,j}^{(2)} = -\frac{1}{h_i^2}, & j = 2i - 1; \\ L_{i,k}^{(2)} = \frac{1}{h_i^2}, & k = 2i + 1, \\ L_{i,m}^{(2)} = -\frac{1}{h_i}, & m = 2i, \\ h_i = x_{i+1} - x_i, & i = \overline{1, N-1}. \end{cases} \quad (24)$$

Задание сплайна вектором  $\mathbf{P}$  автоматически обеспечивает условие «гладкости» сплайна до первой производной включительно.

### Соотношения связи между векторами $\mathbf{A}_\alpha$ и $\mathbf{Q}$

Запишем условия гладкости (7) для первой производной сплайна в точках  $x_i$ ,  $i = \overline{2, N-1}$ , используя (5)

$$\begin{cases} a_1^{(i-1)} + 2a_2^{(i-1)}h_{i-1} = a_1^{(i)}, \\ h_{i-1} = x_i - x_{i-1}, \quad i = \overline{2, N-1}. \end{cases} \quad (25)$$

С учетом (18) система (25) принимает вид

$$\begin{cases} 2 \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} - f_{i-1}^{(1)} = f_i^{(1)}, \\ h_{i-1} = x_i - x_{i-1}, \quad i = \overline{2, N-1}. \end{cases} \quad (26)$$

Добавим к системе линейных уравнений (26) два очевидных тождества

$$\begin{cases} f_1^{(1)} = f_1^{(1)}, \\ f_N = f_N, \end{cases} \quad (27)$$

и после ряда преобразований приведем полученную систему к виду

$$\begin{cases} f_1^{(1)} = f_1^{(1)}, \\ \begin{cases} f_{i-1}^{(1)} + f_i^{(1)} = -\frac{2}{h_{i-1}}f_{i-1} + \frac{2}{h_{i-1}}f_i, \\ h_{i-1} = x_i - x_{i-1}, \quad i = \overline{2, N-1}, \end{cases} \\ f_N = f_N. \end{cases} \quad (28)$$

Представим систему уравнений (28) в матричной форме

$$\mathbf{B}\mathbf{Q} = \mathbf{D}\mathbf{Q}. \quad (29)$$

При этом компоненты матриц  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{D}$

$$\mathbf{B} = \| B_{i,j}, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, N} \|, \quad (30)$$

и

$$\mathbf{D} = \| D_{i,j}, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, N+1} \|, \quad (31)$$

являются нулевыми:

$$\begin{cases} B_{i,j} = 0, \\ i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (32)$$

$$\begin{cases} D_{i,j} = 0, \\ i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, N+1}, \end{cases} \quad (33)$$

за исключением тех из них, которые определяются по формулам

$$\begin{cases} B_{1,1} = 1, \\ \begin{cases} B_{i,i-1} = 1, \\ B_{i,i} = 1, \\ h_{i-1} = x_i - x_{i-1}, \quad i = \overline{2, N-1}, \end{cases} \\ B_{N,N} = 1, \end{cases} \quad (34)$$

$$\begin{cases} D_{1,1} = 1, \\ \begin{cases} D_{i,i} = -\frac{2}{h_{i-1}}, \\ D_{i,i+1} = \frac{2}{h_{i-1}}, \\ h_{i-1} = x_i - x_{i-1}, \quad i = \overline{2, N-1}, \end{cases} \\ D_{N,N+1} = 1. \end{cases} \quad (35)$$

Введенный в матричное уравнение (29) вектор

$$\mathbf{Q} = (\omega_k, \quad k = \overline{1, N})^T \quad (36)$$

имеет согласно (28) следующие компоненты

$$\begin{cases} \omega_k = f_k^{(1)}, \quad k = \overline{1, N-1}, \\ \omega_N = f_N. \end{cases} \quad (37)$$

Умножим равенство (29) на матрицу  $\mathbf{B}^{-1}$ , обратную к  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{Q}. \quad (38)$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$\mathbf{C} = \| C_{i,j}, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, N+1} \|, \quad (39)$$

определяемую векторным произведением

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}. \quad (40)$$

С учетом (40) матричное выражение (38) принимает вид

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C}\mathbf{Q}. \quad (41)$$

В соответствии с формулами (18) на основе равенства (41) выразим векторы  $\mathbf{A}_\alpha$ ,  $\alpha = 0, 1, 2$  через вектор  $\mathbf{Q}$  посредством матричных равенств

$$\begin{cases} \mathbf{A}_\alpha = \mathbf{C}_\alpha \mathbf{Q}, \\ \alpha = 0, 1, 2. \end{cases} \quad (42)$$

Здесь введены матрицы

$$\left\{ \mathbf{C}_\alpha = \| C_{i,j}^{(\alpha)}, i = \overline{1, N-1}, j = \overline{1, N+1} \|, \quad (43) \right. \\ \left. \alpha = 0, 1, 2. \right.$$

Компоненты матрицы  $\mathbf{C}_0$  в соответствии с (15) и (18) определим соотношениями

$$\left\{ C_{i,j}^{(0)} = \begin{cases} 1 & \text{при } j = i + 1, \\ 0 & \text{при } j \neq i + 1, \end{cases} \quad (44) \right. \\ \left. i = \overline{1, N-1}, j = \overline{1, N+1}. \right.$$

Компоненты матрицы  $\mathbf{C}_1$  определяем с учетом (36), (37) и (41) соотношениями

$$\left\{ C_{i,j}^{(1)} = C_{i,j}, \quad (45) \right. \\ \left. i = \overline{1, N-1}, j = \overline{1, N+1}. \right.$$

Выражения для определения компонентов матрицы  $\mathbf{C}_2$  построим на основе соотношений (18), выполняя при этом два шага.

На первом шаге согласно (18) запишем

$$\left\{ C_{i,j}^{(0)} = \begin{cases} -\frac{1}{h_i^2} & \text{при } j = i + 1, \\ \frac{1}{h_i^2} & \text{при } j = i + 2, \\ 0 & \text{при } j \neq i + 1, j \neq i + 2, \end{cases} \quad (46) \right. \\ \left. h_i = x_{i+1} - x_i, \right. \\ \left. i = \overline{1, N-1}, j = \overline{1, N+1}, \right.$$

а затем компоненты матрицы  $\mathbf{C}_2$  доопределим соотношениями

$$\left\{ C_{i,j}^{(2)} = C_{i,j}^{(1)} - \frac{1}{h_i} C_{i,j}^{(0)}, \quad (47) \right. \\ \left. h_i = x_{i+1} - x_i, \right. \\ \left. i = \overline{1, N-1}, j = \overline{1, N+1}. \right.$$

### ДВУМЕРНЫЙ СПЛАЙН ВТОРОЙ СТЕПЕНИ ДЕФЕКТА 1

#### Общая характеристика сплайна

Рассмотрим методику построения сплайна второй степени двух переменных на прямоугольной сетке.

Ограничимся областью задания в форме прямоугольника (рис. 1)

$$\Omega = [a, b] \times [c, d], \quad (48)$$

с прямоугольной сеткой линий на нем

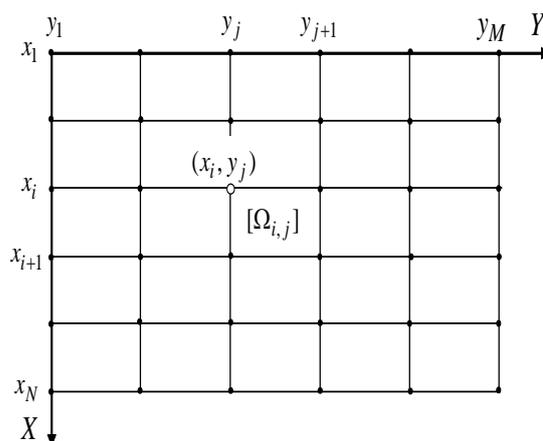
$$\Delta = \Delta_x \times \Delta_y, \quad (49)$$

где

$$\left\{ \Delta_x : a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b, \quad (50) \right. \\ \left. \Delta_y : c = y_1 < y_2 < \dots < y_M = d. \right.$$

Сетка  $\Delta$  расчленяет (рис. 1) область  $\Omega$  на прямоугольные ячейки

$$\left\{ \Omega_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}], \quad (51) \right. \\ \left. i = \overline{1, N-1}, j = \overline{1, M-1}. \right.$$



**Рис. 1.** Сетка узлов  $(x_i, y_j)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $j = \overline{1, M}$  и ячейки  $\Omega_{i,j}$ ,  $i = \overline{1, N-1}$ ,  $j = \overline{1, M-1}$  на прямоугольной области задания сплайна  $\Omega = [a, b] \times [c, d]$

Следуя [1], через  $C^{1,1}[\Omega]$  обозначено множество непрерывных на  $\Omega$  функций  $f(x, y)$ , имеющих непрерывные частные и смешанные производные  $D^{r,s} f(x, y)$ ,  $r \leq 1, s \leq 1$ .

Согласно [1] функция  $W_{2,2,1,1}(x, y)$  называется сплайном двух переменных степени 2 дефекта 1 по  $x$  и степени 2 дефекта 1 по  $y$  с линиями склейки на сетке  $\Delta$  в том случае, если она удовлетворяет двум условиям:

*Условие 1.* В каждой ячейке  $\Omega_{i,j}$  функция  $W_{2,2,1,1}(x, y)$  является многочленом степени 2 по  $x$  и степени 2 по  $y$ , т.е.

$$\left\{ W_{2,2,1,1}(x, y) = \right. \\ \left. = \sum_{\alpha=0}^2 \sum_{\beta=0}^2 a_{\alpha,\beta}^{(i,j)} (x - x_i)^\alpha (y - y_j)^\beta, \quad (52) \right. \\ \left. i = \overline{1, N-1}, j = \overline{1, M-1}; \right.$$

Условие 2.

$$W_{2,2,1,1}(x, y) \in C^{1,1}[\Omega]. \quad (53)$$

Множество сплайнов, удовлетворяющих данному определению, согласно [1] обозначается через  $W_{2,2,1,1}(\Delta)$ .

Следуя работе [1], считаем, что пространство сплайнов двух переменных  $W_{2,2,1,1}(\Delta)$  совпадает с тензорным произведением двух пространств сплайнов одной переменной  $W_{2,1}(\Delta_x)$  и  $W_{2,1}(\Delta_y)$ :

$$W_{2,2,1,1}(\Delta) = W_{2,1}(\Delta_x) \otimes W_{2,1}(\Delta_y). \quad (54)$$

В нашем случае пространства одномерных сплайнов  $W_{2,1}(\Delta_x)$  и  $W_{2,1}(\Delta_y)$  имеют размерности  $N+1$  и  $M+1$  соответственно, а значит, размерность пространства  $W_{2,2,1,1}(\Delta)$  будет равна  $(N+1) \times (M+1)$ .

#### АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ДВУМЕРНОГО СПЛАЙНА ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

Строящийся сплайн задавался прямоугольной матрицей  $\mathbf{Q}$  обобщенных параметров сплайна, имеющей размерность  $(N+1) \times (M+1)$

$$\mathbf{Q} = \left\| q_{i,j}, \quad i = \overline{1, N+1}, \quad j = \overline{1, M+1} \right\| \quad (55)$$

и заполняемой по схеме, представленной на рис. 2.

$$\mathbf{Q} = \left\| \begin{array}{cccccc} W_{1,1}^{(1,1)} & W_{1,1}^{(1,0)} & \dots & W_{1,j}^{(1,0)} & \dots & W_{1,M}^{(1,0)} \\ W_{1,1}^{(0,1)} & W_{1,1}^{(0,0)} & \dots & W_{1,j}^{(0,0)} & \dots & W_{1,M}^{(0,0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{i,1}^{(0,1)} & W_{i,1}^{(0,0)} & \dots & W_{i,j}^{(0,0)} & \dots & W_{i,M}^{(0,0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{N,1}^{(0,1)} & W_{N,1}^{(0,0)} & \dots & W_{N,j}^{(0,0)} & \dots & W_{N,M}^{(0,0)} \end{array} \right\|$$

Рис. 2. Матрица обобщенных параметров сплайна второй степени

Элементами матрицы  $\mathbf{Q}$  (рис. 2) являются значения сплайна во всех узловых точках сетки и некоторые из частных и

смешанных производных в контурных точках

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{i,j}^{(\alpha,\beta)} = \frac{\partial^{(\alpha+\beta)} W_{2,2,1,1}(x_i, y_j)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}, \\ i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M, \\ \alpha = 0, \dots, 2, \quad \beta = 0, \dots, 2, \end{array} \right. \quad (56)$$

где  $i$  и  $j$  – нижние индексы, определяющие координаты рассматриваемой узловой точки  $(x_i, y_j)$ ;  $\alpha$  и  $\beta$  – верхние индексы, задающие порядок производных от сплайна соответственно по координатам  $x$  и  $y$ .

Для восстановления сплайна по элементам матрицы  $\mathbf{Q}$  вначале рассматривались одномерные сетки узлов  $\Delta_x: x_i, i = \overline{1, N}$  в отдельности для каждой из координатных линий  $y = y_j = \text{const}, j = \overline{1, M}$  (рис. 1).

Для всех координатных линий  $y = y_j = \text{const}, j = \overline{1, M}$  (рис. 1) в соответствии с (49) и (50) сетки узлов  $\Delta_x: x_i, i = \overline{1, N}$  одинаковы, и поэтому были введены для них дифференцирующие матрицы  $\mathbf{C}_\alpha^{(x)}$ , имеющие размерность  $N \times (N+1)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{C}_\alpha^{(x)} = \left\| C_{i,j}^{(x,\alpha)}, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, N+1} \right\|, \\ \alpha = 0, 1, 2, \end{array} \right. \quad (57)$$

аналогичные по выполняемым действиям и внутренней структуре матрицам  $\mathbf{C}_\alpha$ ,  $\alpha = 0, 1, 2$ , введенным ранее соотношениями (43)–(47).

Верхний индекс  $x$  в матрицах  $\mathbf{C}_\alpha^{(x)}$ ,  $\alpha = 0, 1, 2$  указывает на то, что данные матрицы строятся на сетке узлов, отложенных вдоль оси  $X$ .

Далее введены в рассмотрение матрицы  $\mathbf{Q}_\alpha$ ,  $\alpha = 0, 1, 2$ , имеющие размерность  $N \times (M+1)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Q}_\alpha = \left\| q_{i,j}^{(\alpha)}, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M+1} \right\|, \\ \alpha = 0, 1, 2. \end{array} \right. \quad (58)$$

Развернутая форма матриц  $\mathbf{Q}_\alpha$  представлена на рис. 3.

Матрицы  $\mathbf{Q}_\alpha$ ,  $\alpha = 0, 1, 2$  определяются матричным произведением

$$\left\{ \mathbf{Q}_\alpha = \mathbf{C}_\alpha^{(x)} \mathbf{Q}, \quad \alpha = 0, 1, 2. \quad (59) \right.$$

Затем рассмотрены сетки узлов  $\Delta_y : y_k, k = \overline{1, M}$  вдоль координатных линий  $x = x_i = \text{const}, i = \overline{1, N}$  (рис. 1) и по ним строились матрицы  $\mathbf{C}_\beta^{(y)}$ ,  $\beta = 0, 1, 2$ , имеющие размерность  $M \times (M + 1)$

$$\left\{ \mathbf{C}_\beta^{(y)} = \| C_{k,j}^{(\alpha,\beta)}, \quad k = \overline{1, M}, \quad j = \overline{1, M+1}, \quad \beta = 0, 1, 2. \quad (60) \right.$$

Матрицы  $\mathbf{C}_\beta^{(y)}$ ,  $\beta = 0, 1, 2$  аналогичны по структуре матрицам  $\mathbf{C}_\alpha^{(x)}$ ,  $\alpha = 0, 1, 2$ , но предназначены они для матричной операции дифференцирования вдоль координатной оси  $y$ .

Матрицы  $\mathbf{C}_\alpha^{(x)}$ ,  $\alpha = 0, 1, 2$  и  $\mathbf{C}_\beta^{(y)}$ ,  $\beta = 0, 1, 2$  строятся по формулам, подобным (43)–(47).

Затем введены в рассмотрение матрицы  $\mathbf{Q}_{\alpha,\beta}$ ,  $\alpha = 0, 1, 2$ ,  $\beta = 0, 1, 2$ , имеющие размерность  $N \times M$

$$\left\{ \mathbf{Q}_{\alpha,\beta} = \| q_{i,j}^{(\alpha,\beta)}, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M}, \quad \alpha = 0, 1, 2, \quad \beta = 0, 1, 2. \quad (61) \right.$$

Элементы матриц  $\mathbf{Q}_{\alpha,\beta}$ ,  $\alpha, \beta = 0, 1, 2$  определяются по формулам

$$\left\{ \begin{aligned} q_{i,j}^{(\alpha,\beta)} = W_{i,j}^{(\alpha,\beta)} = \frac{\partial^{(\alpha+\beta)} W_{2,2,1,1}(x_i, y_j)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}, \\ \alpha = 0, 1, 2, \quad \beta = 0, 1, 2, \\ i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M}. \end{aligned} \quad (62) \right.$$

Развернутая форма матриц  $\mathbf{Q}_{\alpha,\beta}$  представлена на рис. 4.

Матрицы  $\mathbf{Q}_{\alpha,\beta}$  определяются матричным выражением

$$\left\{ \mathbf{Q}_{\alpha,\beta} = \mathbf{Q}_\alpha (\mathbf{C}_\beta^{(y)})^T = \mathbf{C}_\alpha^{(x)} \mathbf{Q} (\mathbf{C}_\beta^{(y)})^T, \quad \alpha = 0, 1, 2, \quad \beta = 0, 1, 2. \quad (63) \right.$$

На следующем этапе введены в рассмотрение матрицы  $\mathbf{A}_{\alpha,\beta}$ ,  $\alpha = 0, 1, 2$ ,  $\beta = 0, 1, 2$ , имеющие размерность  $(N - 1) \times (M - 1)$ , и составленные из коэффициентов локальных полиномов (52) сплайн-функции  $W_{2,2,1,1}(x, y)$

$$\left\{ \mathbf{A}_{\alpha,\beta} = \| a_{i,j}^{(\alpha,\beta)}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{1, M-1}, \quad \alpha = 0, 1, 2, \quad \beta = 0, 1, 2. \quad (64) \right.$$

$$\mathbf{Q}_\alpha = \left\| \begin{array}{cccccc} W_{1,1}^{(\alpha,1)} & W_{1,1}^{(\alpha,0)} & \dots & W_{1,j}^{(\alpha,0)} & \dots & W_{1,M}^{(\alpha,0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{i,1}^{(\alpha,1)} & W_{i,1}^{(\alpha,0)} & \dots & W_{i,j}^{(\alpha,0)} & \dots & W_{i,M}^{(\alpha,0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{N,1}^{(\alpha,1)} & W_{N,1}^{(\alpha,0)} & \dots & W_{N,j}^{(\alpha,0)} & \dots & W_{N,M}^{(\alpha,0)} \end{array} \right\|$$

Рис. 3. Матрица из частных и смешанных производных степени  $\alpha = 0, 1, 2$  по координате  $x$  от сплайна в узловых точках

$$\mathbf{Q}_{\alpha,\beta} = \left\| \begin{array}{cccc} W_{1,1}^{(\alpha,\beta)} & \dots & W_{1,j}^{(\alpha,\beta)} & \dots & W_{1,M}^{(\alpha,\beta)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{i,1}^{(\alpha,\beta)} & \dots & W_{i,j}^{(\alpha,\beta)} & \dots & W_{i,M}^{(\alpha,\beta)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{N,1}^{(\alpha,\beta)} & \dots & W_{N,j}^{(\alpha,\beta)} & \dots & W_{N,M}^{(\alpha,\beta)} \end{array} \right\|$$

Рис. 4. Структура матрицы  $\mathbf{Q}_{\alpha,\beta}$ ,  $\alpha = 0, 1, 2$ ,  $\beta = 0, 1, 2$

Для определения компонент матриц  $\mathbf{A}_{\alpha,\beta}$  выражения (52) подставлены в (62), и для узловых точек с координатами  $(x_i, y_j)$ ,  $i = \overline{1, \dots, N-1}$ ,  $j = \overline{1, \dots, M-1}$  получено

$$\left\{ \begin{aligned} W_{i,j}^{(\alpha,\beta)} = \alpha! \beta! a_{i,j}^{(\alpha,\beta)}, \\ \alpha = 0, 1, 2, \quad \beta = 0, 1, 2, \\ i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{1, M-1}. \end{aligned} \quad (65) \right.$$

С учетом (62) из (65) получены соотношения

$$\left\{ \begin{aligned} a_{i,j}^{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{\alpha!} \frac{1}{\beta!} W_{i,j}^{(\alpha,\beta)}, \\ \alpha = 0, 1, 2, \quad \beta = 0, 1, 2, \\ i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{1, M-1}. \end{aligned} \quad (66) \right.$$

которые однозначно определяют через компоненты матриц  $A_{\alpha,\beta}$ ,  $\alpha = 0, 1, 2$ ,  $\beta = 0, 1, 2$  все коэффициенты полиномов (52).

Для определения производных от рассматриваемой сплайн-функции в произвольной точке с координатами  $(x, y)$

$$\begin{cases} W^{(s,r)}(x, y) = \frac{\partial^{(s+r)} W_{2,2,1,1}(x, y)}{\partial x^s \partial y^r}, \\ s = 0, 1, 2, \quad r = 0, 1, 2, \\ a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d \end{cases} \quad (67)$$

необходимо установить ячейку  $\Omega_{n,m}$ , содержащую рассматриваемую точку.

Фактически это выражается в определении значений индексов  $n$  и  $m$  по функциям

$$n = \hat{n}(x), \quad m = \hat{m}(y), \quad (68)$$

где

$$\begin{cases} \hat{n}(x) = \begin{cases} S & \text{при } x_s \leq x < x_{s+1}, \\ N-1 & \text{при } x \geq x_N; \end{cases} \\ \hat{m}(y) = \begin{cases} r & \text{при } y_r \leq y < y_{r+1}, \\ M-1 & \text{при } y \geq y_M. \end{cases} \end{cases} \quad (69)$$

При известных  $n$  и  $m$  значения искомого производных  $W^{(s,r)}(x, y)$  в заданной точке  $(x, y)$  определяются формулой

$$\begin{cases} W^{(s,r)}(x, y) = \\ = \sum_{\alpha=s}^2 \sum_{\beta=r}^2 \frac{\alpha!}{(\alpha-s)!} \frac{\beta!}{(\beta-r)!} a_{n,m}^{(\alpha,\beta)} (x - x_n)^{(\alpha-s)} (y - y_n)^{(\beta-r)}, \\ n = \hat{n}(x), \quad m = \hat{m}(y), \\ s = 0, 1, 2, \quad r = 0, 1, 2, \end{cases} \quad (70)$$

или на основе компонент матриц  $Q_{\alpha,\beta}$  в несколько иной форме

$$\begin{cases} W^{(s,r)}(x, y) = \\ = \sum_{\alpha=s}^2 \sum_{\beta=r}^2 \frac{1}{(\alpha-s)!} \frac{1}{(\beta-r)!} q_{n,m}^{(\alpha,\beta)} (x - x_n)^{(\alpha-s)} (y - y_n)^{(\beta-r)}, \\ n = \hat{n}(x), \quad m = \hat{m}(y), \\ s = 0, 1, 2, \quad r = 0, 1, 2. \end{cases} \quad (71)$$

Формулы (70) и (71) применимы при условии, что известны числовые значения всех компонент матрицы обобщенных параметров сплайна  $Q$ .

При решении двумерных задач механики, как правило, матрица  $Q$  не известна и ее рассматривают как искомое решение.

### Алгоритм определения матрицы $Q$

Вначале из элементов матрицы  $Q$  формируется вектор обобщенных параметров сплайна  $P$

$$P = (p_k, k = \overline{1, (N+1)(M+1)})^T, \quad (72)$$

воспользовавшись следующими соотношениями связи

$$\begin{cases} p_k = q_{i,j}, \\ k = (i-1)(M+1) + j, \\ i = \overline{1, N+1}, \quad j = \overline{1, M+1}. \end{cases} \quad (73)$$

Затем вводятся в рассмотрение прямоугольные матрицы  $E_{i,j}$ , имеющие размерность  $(N+1) \times (M+1)$

$$\begin{cases} E_{i,j} = \| e_{s,r}^{(i,j)}, s = \overline{1, N+1}, r = \overline{1, M+1} \|, \\ i = \overline{1, N+1}, \quad j = \overline{1, M+1}, \end{cases} \quad (74)$$

где

$$e_{s,r}^{(i,j)} = \begin{cases} 1 & \text{при } s = i \text{ и } r = j, \\ 0 & \text{при } s \neq i \text{ или } r \neq j. \end{cases} \quad (75)$$

На основе матриц  $E_{i,j}$  с учетом (55) записывается

$$Q = \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{M+1} E_{i,j} q_{i,j}. \quad (76)$$

Подстановкой (76) в (63) получается

$$\begin{cases} Q_{\alpha,\beta} = \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{M+1} [C_{\alpha}^{(x)} E_{i,j} (C_{\beta}^{(y)})^T] q_{i,j} \\ \alpha = 0, 1, 2, \\ \beta = 0, 1, 2. \end{cases} \quad (77)$$

Введем в рассмотрение прямоугольные  $N \times M$  – матрицы

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B}_{\alpha,\beta}^{(i,j)} = \| b_{s,r}^{(\alpha,\beta,i,j)}, s = \overline{1, N}, r = \overline{1, M} \|, \\ \alpha = 0, 1, 2, \quad \beta = 0, 1, 2, \\ i = \overline{1, N+1}, \quad j = \overline{1, M+1}, \end{array} \right. \quad (78)$$

определяемые матричными выражениями

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B}_{\alpha,\beta}^{(i,j)} = \mathbf{C}_\alpha^{(x)} \mathbf{E}_{i,j} (\mathbf{C}_\beta^{(y)})^T, \\ \alpha = 0, 1, 2, \quad \beta = 0, 1, 2, \\ i = \overline{1, N+1}, \quad j = \overline{1, M+1}. \end{array} \right. \quad (79)$$

С учетом (79) выражение (77) принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Q}_{\alpha,\beta} = \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{M+1} \mathbf{B}_{\alpha,\beta}^{(i,j)} q_{i,j} \\ \alpha = 0, 1, 2, \\ \beta = 0, 1, 2. \end{array} \right. \quad (80)$$

Матрицы  $\mathbf{Q}_{\alpha,\beta}$ ,  $\alpha = 0, 1, 2$ ,  $\beta = 0, 1, 2$  развертываются в векторы  $\mathbf{T}_{\alpha,\beta}$ , имеющие размерность  $NM$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T}_{\alpha,\beta} = (t_k^{(\alpha,\beta)}, k = \overline{1, NM})^T, \\ \alpha = 0, 1, 2, \\ \beta = 0, 1, 2, \end{array} \right. \quad (81)$$

при следующих условиях соответствия элементов матриц  $\mathbf{Q}_{\alpha,\beta}$  и векторов  $\mathbf{T}_{\alpha,\beta}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} t_k^{(\alpha,\beta)} = q_{i,j}^{(\alpha,\beta)}, \\ k = (i-1)M + j, \\ i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M}, \\ \alpha = 0, 1, 2, \quad \beta = 0, 1, 2. \end{array} \right. \quad (82)$$

Затем формируются прямоугольные матрицы размерностью  $NM \times [(N+1)(M+1)]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D}_{\alpha,\beta} = \| d_{k,l}^{(\alpha,\beta)}, k = \overline{1, NM}, \\ l = \overline{1, (N+4)(M+4)} \|, \\ \alpha = 0, 1, 2, \\ \beta = 0, 1, 2. \end{array} \right. \quad (83)$$

Компоненты матриц  $\mathbf{D}_{\alpha,\beta}$  определяются выражениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{k,l}^{(\alpha,\beta)} = b_{s,r}^{(\alpha,\beta,i,j)}, \\ k = (s-1)M + r, \\ l = (i-1)(M+4) + j, \\ s = \overline{1, N}, \quad r = \overline{1, M}, \\ i = \overline{1, N+1}, \quad j = \overline{1, M+1}, \\ \alpha = 0, 1, 2, \quad \beta = 0, 1, 2. \end{array} \right. \quad (84)$$

В итоге соотношения связи между компонентами матриц  $\mathbf{Q}_{\alpha,\beta}$  и  $\mathbf{Q}$ , выражаемые соотношениями (63), заменяются матричными равенствами

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T}_{\alpha,\beta} = \mathbf{D}_{\alpha,\beta} \mathbf{P}, \\ \alpha = 0, 1, 2, \\ \beta = 0, 1, 2. \end{array} \right. \quad (85)$$

Для определения значений сплайна и производных от него в произвольной точке с координатами  $(x, y)$  из области определения  $\Omega$  вводятся в рассмотрение векторы размерностью  $NM$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_{i,j} = (f_k^{(i,j)}, k = \overline{1, NM})^T, \\ i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M}, \end{array} \right. \quad (86)$$

с компонентами

$$\left\{ \begin{array}{l} f_k^{(i,j)} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = (i-1)M + j, \\ 0 & \text{при } k \neq (i-1)M + j, \end{cases} \\ k = (s-1)M + r, \\ s = \overline{1, N}, \quad r = \overline{1, M}, \\ i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M}. \end{array} \right. \quad (87)$$

С использованием векторов  $\mathbf{F}_{i,j}$  записывается

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{i,j}^{(\alpha,\beta)} = (\mathbf{F}_{i,j})^T \mathbf{T}_{\alpha,\beta} = (\mathbf{F}_{i,j})^T \mathbf{D}_{\alpha,\beta} \mathbf{P}, \\ \alpha = 0, 1, 2, \quad \beta = 0, 1, 2, \\ i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M}. \end{array} \right. \quad (88)$$

В итоге мы получили в виде (88) выражения согласно (62) для вычисления производных сплайн-функции в узлах сплайна.

### АПРОКСИМАЦИЯ НАРУЖНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПЕРЬЕВОЙ ЧАСТИ ЛОПАТКИ КОМПРЕССОРА

Поверхность лопатки задана координатами точек на «спинке» и «корытце» профилей для девяти сечений с радиусами

$$R_n, \quad n = \overline{1, 9}. \quad (89)$$

Профиль «спинки» задан координатами ее точек  $x_i^{(c)(n)}, y_i^{(c)(n)}$ :

$$x_i^{(c)(n)}, y_i^{(c)(n)}, \quad i = \overline{1, N_n^{(c)}}, \quad n = \overline{1, 9} \quad (90)$$

где  $i$  – порядковый номер точки «спинки» для профиля, имеющего номер  $n$ ;  $N_n^{(c)}$  – число заданных точек на «спинке» профиля, имеющего номер  $n$ .

Профиль «корытца» задан координатами его точек  $x_i^{(k)(n)}, y_i^{(k)(n)}$ :

$$x_i^{(k)(n)}, y_i^{(k)(n)}, \quad i = \overline{1, N_n^{(k)}}, \quad n = \overline{1, 9}, \quad (91)$$

где  $i$  – порядковый номер точки «корытца» для профиля с номером  $n$ ;  $N_n^{(k)}$  – число заданных точек на «корытце» профиля с номером  $n$ .

При задании контуров сечений лопатки на чертежах указывается, что кромки лопатки должны скругляться на входе и выходе рабочего колеса радиусами  $R_1$ .

Профили заданы в координатной системе  $X_n Y_n$ , специально создаваемой для задание координат точек профилей сечений (рис. 5).



Рис. 5. Заданные профили лопатки для трех сечений

На рис. 5 точками показаны профили трех сечений лопатки при  $R = 0,185$  м,  $R = 0,280$  м и  $R = 0,375$  м. На рис. 5 видно, что входные и выходные кромки профилей при таком их задании не определены.

Для полного заданных профилей были сформированы передние и задние сопрягающие кромки по заданным радиусам  $R_1 = 0,260$  мм. При их построении решалась задача плавной состыковки различных участков профилей. Достроенные базовые девять профилей показаны на рис. 6.

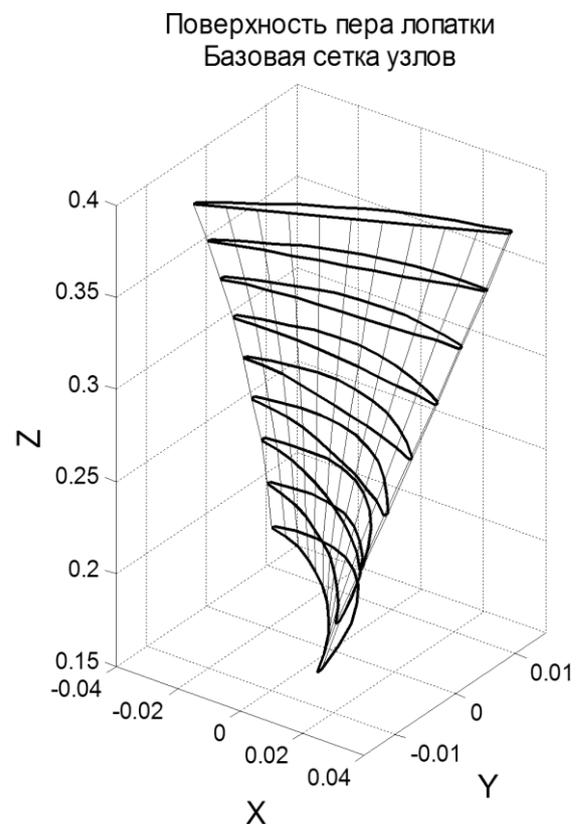


Рис. 6. Аксонометрическое изображение поверхности пера лопатки компрессора при базовой сетке узлов

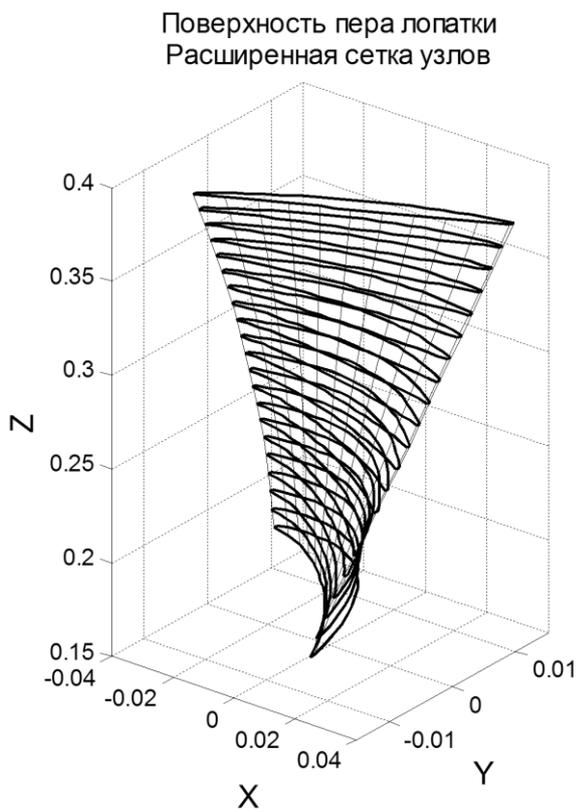
На основе координат точек достроенных профилей определены двумерные сплайны отдельно для трех декартовых координат  $x, y, z$  точек наружной поверхности пера лопатки:

$$\left\{ \begin{aligned} W_{2,2,1,1}^{(X)}(\alpha_1, \alpha_2) &= \sum_{\alpha=0}^2 \sum_{\beta=0}^2 a_{\alpha,\beta}^{(n,m)} (\alpha_1 - \\ &- \alpha_n^{(1)})^\alpha (\alpha_2 - \alpha_m^{(2)})^\beta, \\ n &= \overline{1, N-1}, \quad m = \overline{1, M-1}; \end{aligned} \right. \quad (92)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{2,2,1,1}^{(Y)}(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{\alpha=0}^2 \sum_{\beta=0}^2 \beta_{\alpha,\beta}^{(n,m)} (\alpha_1 - \\ - \alpha_n^{(1)})^\alpha (\alpha_2 - \alpha_m^{(2)})^\beta, \\ n = \overline{1, N-1}, \quad m = \overline{1, M-1}; \end{array} \right. \quad (93)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{2,2,1,1}^{(Z)}(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{\alpha=0}^2 \sum_{\beta=0}^2 \gamma_{\alpha,\beta}^{(n,m)} (\alpha_1 - \\ - \alpha_n^{(1)})^\alpha (\alpha_2 - \alpha_m^{(2)})^\beta, \\ n = \overline{1, N-1}, \quad m = \overline{1, M-1}. \end{array} \right. \quad (94)$$

Данные сплайны позволяют определять наружные контуры поперечного сечения пера лопатки для любого радиуса. В качестве примера на рис. 7 показано аксонометрическое изображение наружной поверхности перьевой части компрессорной лопатки, выполненное на основе сплайновой аппроксимации с применением расширенной сетки узлов, обеспечивающей информацию о двадцати одном поперечном сечении лопатки:



**Рис. 7.** Аксонометрическое изображение поверхности пера лопатки компрессора при расширенной сетке узлов, построенное на основе сплайнов

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Предложена методика построения расчетных соотношений одномерного сплайна второй степени дефекта 1. Разработан алгоритм формирования в матричной форме всех необходимых соотношений и уравнений, обеспечивающих практическую реализацию построения одномерного сплайна второй степени дефекта 1 на современных вычислительных машинах.

2. Предложена методика построения расчетных соотношений двумерного сплайна второй степени дефекта 1. Разработан алгоритм формирования в матричной форме всех необходимых соотношений и уравнений, обеспечивающих практическую реализацию построения двумерного сплайна второй степени дефекта 1 на современных вычислительных машинах.

3. Построена математическая модель наружной поверхности перьевой части рабочей лопатки осевого компрессора ГТД на основе двумерного сплайна второй степени дефекта 1, позволяющая определить координаты любой точки наружной поверхности рабочей лопатки компрессора. Показаны возможности данного сплайна при аксонометрическом изображении наружной поверхности рабочей лопатки компрессора.

4. Предлагается данную методику применить для математического описания внутренней геометрии слоистых лопаток ГТД, представителями которых являются лопатки, изготавливаемые из слоистых композиционных материалов.

5. Дальнейшие исследования планируется продолжить в направлении применения двумерных сплайнов степени 2 дефекта 1 для описания схемы укладки армирующих слоев в рабочих и статорных лопаток осевого компрессора ГТД, изготавливаемых из композиционных материалов. Построенная на основе сплайнов математическая модель структуры слоистой композиционной лопатки позволит построить более совершенные методики ее численного расчета на прочность, жесткость и колебания, учитывающие особенности напряженно-деформированного состояния в каждом из слоев композита.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Метод сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с. [Yu. S. Zaviyalov, B. I. Kvasov, V. L. Miroshnichenko, *Method of spline-functions*. M.: Nauka, 1980. ]

2. Павлов В. П. Анализ спектра частот собственных колебаний стержня методом сплайнов // Вестник УГАТУ. 2016. Т. 20, № 4 (74). С. 16–22. [V. P. Pavlov, "Analysis of the spectrum of frequencies of own fluctuations of a rod by the method of splines", (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 20, no. 4 (74), pp. 16-22, 2016. ]

3. Павлов В. П. Поперечные колебания стержня с переменным поперечным сечением и вычисление его собственных частот методом сплайнов // Вестник УГАТУ. 2017. Т. 21, № 2 (76). С. 3–16. [V. P. Pavlov, "Transverse vibrations of a rod with variable cross sections and calculation of its eigenfrequencies by the method of splines", (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 21, no. 2 (76), pp. 3-16, 2017. ]

4. Zhernakov V. S., Pavlov V. P., Kudoyarova V. M. The Enhanced Spline-Method for Numerical Results of Natural Frequencies of Beams // Proc. Engineering. 2017, Vol. 176C, pp. 438–450. [V. S. Zhernakov, V. P. Pavlov, V. M. Kudoyarova, "The Enhanced Spline-Method for Numerical Results of Natural Frequencies of Beams", in *Proc. Engineering*, Vol. 176C, pp. 438-450, 2017. ]

5. Павлов В. П. Метод сплайнов в расчетах стержней на устойчивость // Вестник УГАТУ. 2016. Т.20, № 4 (74). С. 45–53. [V. P. Pavlov, "The method of splines in the calculation of the studs for stability", (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 20, no. 4 (74), pp. 45-53, 2016. ]

6. Kudoyarova V. M., Pavlov V. P. The Spline Method for the Solution of the Transient Heat Conduction Problem with Nonlinear Initial and Boundary Conditions for a Plate // Proc. Engineering. 2016, Vol. 150, pp. 1419–1426. [V. M. Kudoyarova, V. P. Pavlov, "The Spline Method for the Solution of the Transient Heat Conduction Problem with Nonlinear Initial and Boundary Conditions for a Plate", in *Proc. Engineering*. Vol. 150, pp. 1419-1426, 2016. ]

7. Павлов В. П. Метод сплайнов и другие численные методы решения одномерных задач механики деформируемых твердых тел. Уфа: Уфимск. Гос. Авиац. техн. ун-т, 2003. 197 с. [V. P. Pavlov, *Method of spline and other numerical me-ODS for solving one-dimensional problems of mechanics deformi-roemah solids*, (in Russian). Ufa: Ufimsk. State. Aviation. techn. un-t, 2003. ]

8. Абдрахманова А. А., Павлов В. П. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния стеклопластикового стержня при различных жесткостях опор // Вестник УГАТУ. 2007. Т. 9. № 5 (23). С. 87–92. [A. A. Abdrakhmanova, V. P. Pavlov, "Mathematical modeling of stress-strain state of a fiberglass core with different stiffness of the supports", (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 9, no. 5 (23), pp. 87-92, 2007. ]

9. Павлов В. П., Абдрахманова А. А., Абдрахманова Р. П. Задача расчета стержней одномерным сплайном пятой степени дефекта два // Математические заметки ЯГУ. Т. 20, вып. 1, Якутск, 2013. С. 50–59. [V. P. Pavlov, A. A. Abdrakhmanov, R. P. Abdrakhmanova, "The task of calculating the one-dimensional rods with a spline of the fifth degree of the defect two", in *Mathematical notes Yaga, Yakutsk*, vol. 20, issue. 1, pp. 50-59, 2013. ]

10. Zhernakov V. S., Pavlov V. P., Kudoyarova V. M. The Spline-Method for Numerical Calculation of the Natural-

Vibration Frequency of a Beam with Variable Cross-Section // Proc. Engineering. 2017, Vol. 206C, pp. 710–715. [V. S. Zhernakov, V. P. Pavlov, V. M. Kudoyarova, "The Spline-Method for Numerical Calculation of the Natural-Vibration Frequency of a Beam with Variable Cross-Section", in *Proc. Engineering*, Vol. 206C, pp. 710-715, 2017. ]

11. Pavlov V. P., Kudoyarova V. M. A Numerical Method Based on Spline for Solution Heat Conduction Nonlinear Problems // Proc. Engineering. 2017, Vol. 206C, pp. 704–710. [V. P. Pavlov, V. M. Kudoyarova, "A Numerical Method Based on Spline for Solution Heat Conduction Nonlinear Problems", in *Proc. Engineering*, Vol. 206C, pp. 704-709, 2017. ]

12. Pavlov V. P., Kudoyarova V. M., Philippov A. A. Simulation of Boron and Carbon Fiber Composite Characteristics of the Elasticity // MATEC Web of Conferences, 2017, Vol. 129, 02009 (2017), pp. 1-4. [V. P. Pavlov, V. M. Kudoyarova, A. A. Philippov, "Simulation of Boron and Carbon Fiber Composite Characteristics of the Elasticity", in *MATEC Web of Conferences*, Vol. 129, 02009, (2017) pp. 1-4, 2017. ]

## ОБ АВТОРЕ

**ПАВЛОВ Виктор Павлович**, проф. каф. сопротивления материалов. Дипл. инж. по авиац. двигателям (УАИ, 1973). Д-р техн. наук по динамике и прочности (УГАТУ, 2005). Иссл. в обл. динамики и прочности конструкций из композиционных материалов.

## METADATA

**Title:** Description of the geometry of the outer surface the pen of the working blades of the axial compressor GTE two-dimensional splines of degree 2 defect 1.

**Author:** V. P. Pavlov

**Affiliation:**

Ufa State Aviation Technical University (UGATU), Russia.

**Email:** victor.pavlov.51@yandex.ru

**Language:** Russian.

**Source:** Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 21, no. 4 (78), pp. 57-68, 2017. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

**Abstract:** The algorithm for the construction of the matrix in the form of two splines of degree 2 and defect 1. On the basis of the developed method of description of the outer surface of the operation the vanes of the axial compressor GTE and built a mathematical model of the outer screen surface of the concrete of the rotor blade, which allows to determine the coordinates of any point on its outer surface. This study is the basis for creating techniques of using two-dimensional splines of degree 2 in the mathematical description of the scheme of stacking of layers of composite materials composite in the working blade of the axial compressor GTE and the subsequent use of the model of stacking of layers in the calculations for strength, stiffness and vibrations.

**Key words:** GTE; axial compressor; a rotor blade; surface geometry; splines; mathematical modeling.

**About author:**

**PAVLOV, Victor Pavlovich**, Prof., Dept. of Strength of Materials. Dipl. Engineer for Aircraft Engines (Ufa Aviation Inst., 1973). Dr. of Tech. Sci. (UGATU, 2005).