

УДК 621.9.047

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ В УСЛОВИЯХ НЕМОНОТОННОЙ ЗАВИСИМОСТИ АНОДНОГО ПОТЕНЦИАЛА ОТ ПЛОТНОСТИ ТОКА

В. П. ЖИТНИКОВ¹, Н. М. ШЕРЫХАЛИНА², А. А. ЗАРИПОВ³

¹zhitik@mail.ru, ²n_sher@mail.ru, ³jacud@yandex.ru

ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

Поступила в редакцию 23.10.2017

Аннотация. Решается задача моделирования начального этапа электрохимической обработки электрод-инструментом круглой формы. Для моделирования используется немонотонная зависимость плотности тока от анодного потенциала, характерная для обработки в пассивирующих электролитах. При этом обрабатываемая поверхность разделяется на три участка: активного растворения, отсутствия растворения (на падающей части зависимости) и слабого растворения при малых плотностях тока. Разработан численно-аналитический метод решения задачи с применением теории функций комплексного переменного, позволивший использовать для моделирования экспериментальные данные.

Ключевые слова: электрохимическая обработка; анодный потенциал; немонотонная зависимость; комплексный потенциал.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим плоскую задачу о распределении электрического поля между круглым электродом-инструментом (ЭИ) и плоским анодом (рис. 1, а).

Электрическое поле считается стационарным, потенциальным и соленоидальным, поэтому для решения задачи можно использовать методы теории функций комплексного переменного.

Примем во внимание, что электродный потенциал анода зависит от плотности тока, т.е. $\Phi_a = \Phi(J)$. При этом на плоскости комплексного потенциала $W = \Phi + i\Psi$ (Φ – электрический потенциал, Ψ – функция тока) областью, соответствующей межэлектродному пространству (МЭП), является криволинейный четырехугольник ширины U (напряжение на электродах) и высоты $2\psi_0 = I/k$, где I – ток, протекающий в ячейке единичной толщины, k – электропроводность электролита (рис. 1, б).

Аналогичные задачи с монотонной зависимостью $\Phi_a(J)$ решались в [1–3] для двугранного и криволинейного бесконечного анода, при этом требование монотонности (и однозначности) этой зависимости было существенно для предложенных методов решения задач. В [4–6] при решении задач с немонотонной зависимостью $J = F(\Phi_a)$ применялись степенные ряды, условие сходимости которых существенно ограничивает вид краевого условия. Вследствие этого в [4–6] использовалась упрощенная зависимость анодного потенциала от плотности тока, далекая от зависимости, аппроксимирующей экспериментальные данные [7–9].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Выберем в качестве области изменения параметрической переменной прямоугольник плоскости χ (рис. 1, в). Конформное отображение χ на физическую плоскость Z осуществляется функцией

$$Z(\chi) = -\sqrt{h^2 - R^2} \operatorname{ctg} \chi = l_0 z(\chi), \quad l_0 = \sqrt{h^2 - R^2}. \quad (1)$$

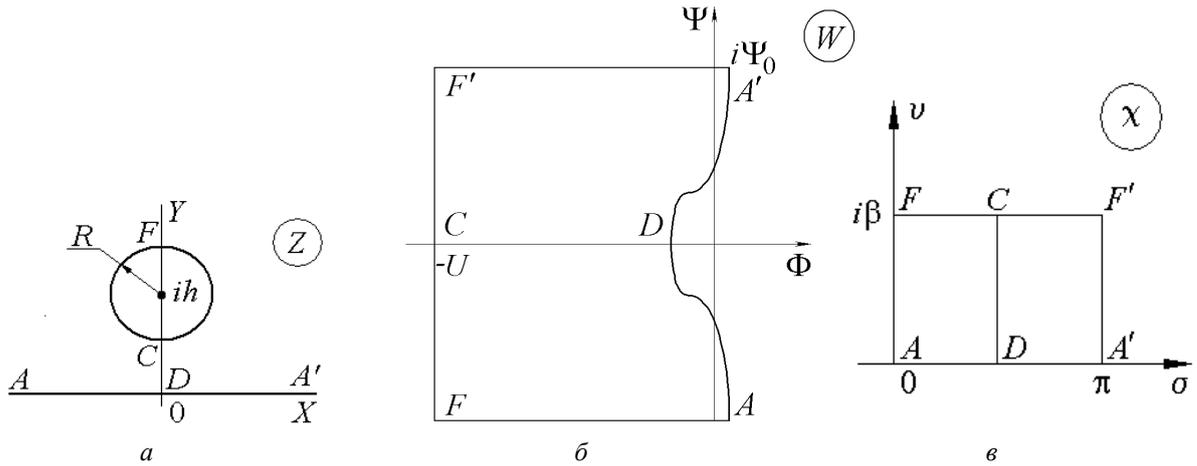


Рис. 1. Формы области на плоскостях:
a – физической; *б* – комплексного потенциала; *в* – параметрической плоскости

При этом $\beta = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{h^2 - R^2} + h}{R}$. Производная

$$\frac{dz}{d\chi} = \frac{1}{l_0} \frac{dZ}{d\chi} = \frac{1}{\sin^2 \chi}. \quad (2)$$

Конформное отображение χ на W должно удовлетворять следующим условиям:

- на FA и $F'A'$ $\text{Im}W = \mp \frac{I}{2k}$;
- на FCF' $\text{Re}W = -U$;
- на ADA' $\Phi_a = \Phi(J)$, на ADA' $\Phi_a = \Phi(J)$. (3)

Конформное отображение $w(\chi) = W/U$ будем искать в виде суммы

$$w(\chi) = i \frac{\gamma}{\beta} \chi + w_1(\chi),$$

где первое слагаемое производит отображение прямоугольника χ на прямоугольник, второе слагаемое используется для учета зависимости анодного потенциала. Отметим, что $w_1(\chi, \tau)$ – периодическая (с периодом π) в смысле ТФКП функция χ . Для эквипотенциального анода выполняется равенство $U = \beta I/k$.

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Некоторая аналитическая функция $f(\chi)$ может быть определена по краевым условиям, которые представляются равенствами

$$\text{Im} f(\sigma + i0) = \varphi_1(\sigma), \quad (4)$$

$$\text{Im} f(\sigma + i\beta) = \varphi_2(\sigma). \quad (5)$$

При условиях (4), (5) аналитическая внутри прямоугольника и непрерывная в его замыкании периодическая (с периодом π) функция $f(\chi)$ определяется при решении задачи Шварца [10]. Это решение может быть получено по формуле [11]

$$f(\chi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi_1(u) \left[\frac{\vartheta'_1(u-\chi)}{\vartheta_1(u-\chi)} - \frac{\vartheta'_1(u)}{\vartheta_1(u)} \right] du - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi_2(u) \left[\frac{\vartheta'_4(u-\chi)}{\vartheta_4(u-\chi)} - \frac{\vartheta'_4(u)}{\vartheta_4(u)} \right] du + c_1, \quad (6)$$

где c_1 – произвольная действительная постоянная (для данной задачи $c_1 = 0$).

Логарифмические производные тэта-функций $\vartheta_k(u)$ вычисляются через быстро сходящиеся ряды [12].

Для выполнения условия (5) необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\int_0^\pi \varphi_1(u) du = \int_0^\pi \varphi_2(u) du. \quad (7)$$

Допустим, на аноде задана зависимость

$$\varphi_a(\sigma) = -\mu(\sigma), \quad (8)$$

на катоде $\varphi_c(\sigma) = -1$.

Для учета неравномерности поляризации представим комплексный потенциал $w(\chi)$ с помощью выражения

$$r(\chi) = -iw(\chi) = -i\varphi + \psi = \frac{\gamma}{\beta}\chi + f(\chi).$$

Здесь $f(\chi)$ – функция, определяемая с помощью интеграла Шварца (6), при этом функции $\varphi_1(\sigma)$ и $\varphi_2(\sigma)$ равны

$$\begin{aligned} \varphi_1(\sigma) &= \text{Im} f(\sigma + i0) = \mu(\sigma), \\ \varphi_2(\sigma) &= \text{Im} f(\sigma + i\beta) = \lambda. \end{aligned} \quad (9)$$

В силу (8) справедливы следующие условия

$$\begin{aligned} \text{Im} r(\sigma + i0) &= \mu(\sigma), \\ \text{Im} r(\sigma + i\beta) &= \gamma + \text{Im} f(\sigma + i\beta) = 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Из (9) и (10) следует $\lambda = 1 - \gamma$.

Из условия (7) следует уравнение

$$\int_0^\pi \mu(u) du = \int_0^\pi (1 - \gamma) du = (1 - \gamma)\pi,$$

т.е.
$$\gamma = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mu(u) du. \quad (11)$$

Искомыми параметрами будут значения мнимой части функции $\text{Im} f(\sigma_m + i0) = \varphi_m$ в узловых точках $\chi_m = \sigma_m + i0$, ($m = 1, \dots, n$). При $\sigma = \sigma_0 = 0$ $\text{Im} f(\sigma_0) = 0$. Значения $\text{Im} f(\sigma)$ в промежуточных между узловыми точках найдем с помощью кубического сплайна $S(\sigma)$, имеющего две непрерывные производные.

Полученные с помощью (6) значения $\text{Re} f(\sigma_m)$ в узловых точках $\chi_m = \sigma_m + i0$ интерполируются кубическим сплайном $P(\sigma)$, дважды непрерывно дифференцируемым. При этом коэффициенты сплайна являются значениями первой производной $P'(\sigma_m)$.

Величина, комплексно сопряженная безразмерной напряженности (плотности тока) определяется производной

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w / \partial \sigma}{\partial z / \partial \sigma} = i(\gamma + P'(\sigma) + iS'(\sigma)) \sin^2 \sigma. \quad (12)$$

При переменном анодном потенциале вектор плотности тока на анодной границе имеет как нормальную j_n , так и тангенциальную j_t составляющие. Предполагается, что анодный потенциал зависит только от

нормальной $\varphi_a = \varphi_a(j_n) = -\text{Re} w - \Delta\varphi$, где $\Delta\varphi$ – значение анодного потенциала при отсутствии тока в цепи. Рассмотрим зависимость, аппроксимирующую экспериментальные результаты (рис. 2)

$$\begin{aligned} j_n(\varphi_a) &= 0,025 - 0,692\varphi_a + 1,298\varphi_a^2 - \\ &\quad - 0,965\varphi_a^3 + 0,223\varphi_a^4 + \\ &\quad + 0,17 \text{tg}(0,655\varphi_a) + \frac{0,0143\varphi_a}{\varphi_a^7 + (0,5712)^7}, \quad \varphi_a \geq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Такая немонотонная зависимость характерна для обработки в пассивирующих электролитах [7–9]. Согласно рис. 2 $\Delta\varphi \approx 0,7$.

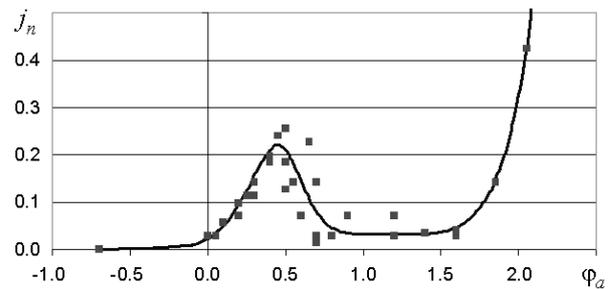


Рис. 2. График аппроксимирующей зависимости (13) в сравнении с результатами эксперимента (φ_a в вольтах, j_n – в а/см^2)

Задача решается методом коллокаций. Условие (13) выполняется в дискретных точках $\chi_m = \sigma_m + i0$, $m = 1, \dots, n$. Полученная таким образом система нелинейных уравнений решается методом Ньютона с регулированием шага.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Задача решается в условно-размерных единицах, чтобы привести значения зависимости (13) к результатам эксперимента [8, 9]. При этом $U = 4,1 + \Delta\varphi$ (В), $R = 7,5$ (мм), $h = 7,8$ (мм),

$$j = \kappa \frac{U}{h} \left(\frac{dw}{dz} \right), \quad \frac{\kappa}{h} = 0,5.$$

Результаты решения приведены на рис. 3–8. На рис. 3, 4 показана расчетная конфигурация на плоскостях z и w : форма МЭП и конфигурация границ области, соответствующей МЭП на плоскости комплексного потенциала.

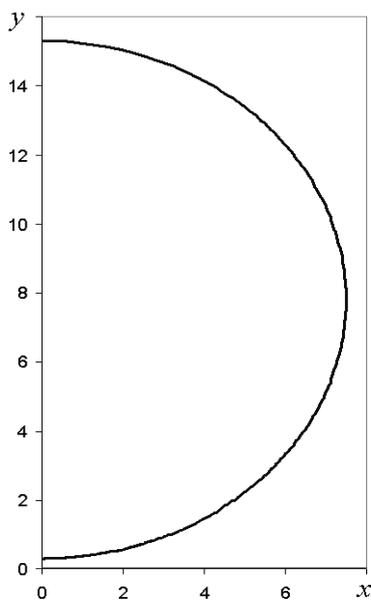


Рис. 3. Форма МЭП

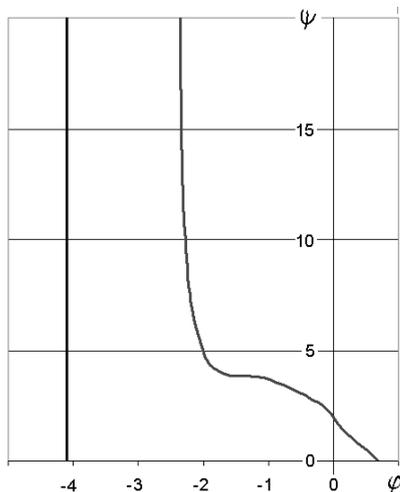


Рис. 4. Форма границ на плоскости комплексного потенциала

На рис. 5 показано распределение потенциала по поверхности анода.

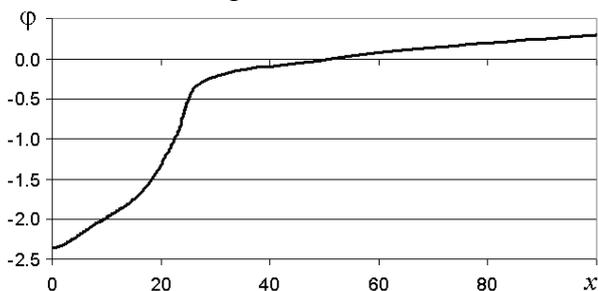


Рис. 5. Распределение потенциала по поверхности анода

На рис. 6 показано распределение тангенциальной составляющей, на рис. 7 – полной плотности тока. На рис. 8 приведено распределение нормальной составляющей плотности тока.

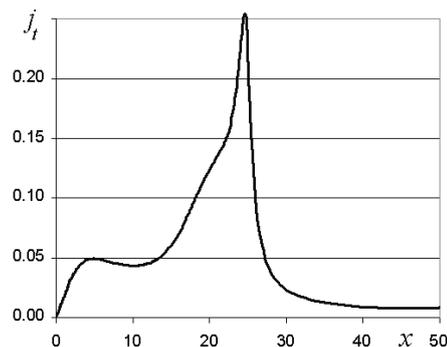


Рис. 6. Распределение тангенциальной составляющей плотности тока по аноду

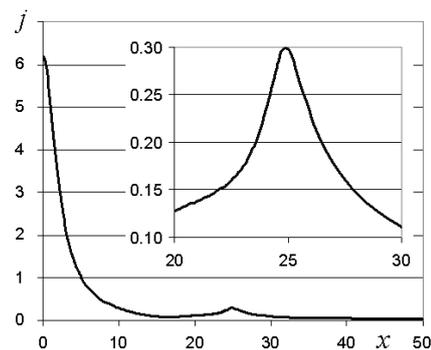


Рис. 7. Распределение полной плотности тока по поверхности анода

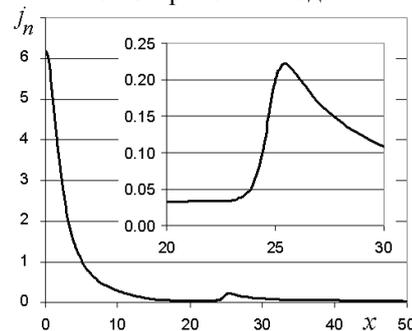


Рис. 8. Распределение нормальной составляющей плотности тока по аноду

На рис. 9 для сравнения приведено распределение плотности тока для эквипотенциального анода. Видно, что уменьшение локальной разности потенциалов может приводить к существенному уменьшению плотности тока вблизи точки D .

Перераспределение тока проиллюстрировано на рис. 10, где показаны величины тока ψ , протекающего на участках анода от точки D ($x=0$) до точки с абсциссой x , отнесенного к полному току, для переменного (1) и постоянного (2) анодного потенциала. Видно, что при постоянном потенциале анода на расстоянии $20l_0$ протекает более 93% тока, при переменном – около 83%.

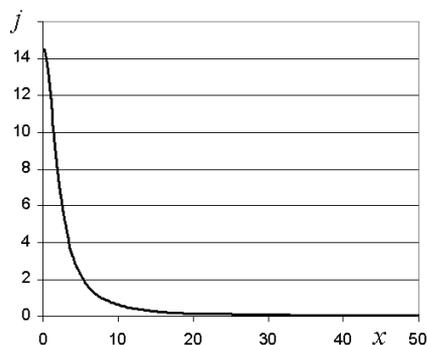


Рис. 9. Распределение плотности тока по анодной поверхности для эквипотенциального анода

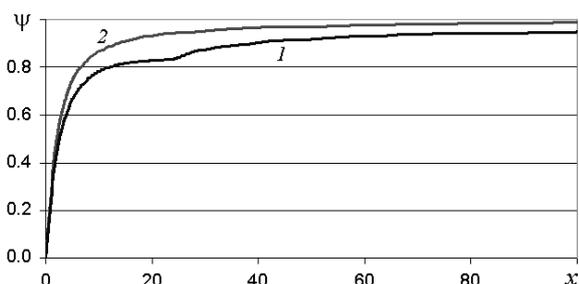


Рис. 10. Распределение функции тока по анодной поверхности

В [8, с. 347] приведена фотография поверхности, полученная при обработке сферическим ЭИ углеродистой стали в водном растворе нитрата натрия. Оптический анализ образца показал, что на его поверхности образовались 3 характерных зоны, находящиеся в области различных значений анодного потенциала и плотностей тока. Зона 1 находится вблизи оси ЭИ, а поверхность катода на минимальном расстоянии от анодной поверхности. Плотность тока для зоны 1 максимальна. Состояние этой зоны соответствует условиям активного растворения. Зона 2 соответствует области пассивного состояния поверхности, о чем свидетельствует отсутствие на ней следов электрохимического воздействия. И, наконец, зона 3 соответствует области слабого анодного растворения. Из сопоставления зависимости (13) (рис. 2), кривых распределения плотностей тока по координате и фотографии общего вида обработанной поверхности можно предположить, что зона 2, где железо находилось в пассивном состоянии и отсутствовало растворение, соответствует падающей части зависимости (13).

Для анализа вычислительных погрешностей применялась численная фильтрация [13–15] зависимостей десятичного логариф-

ма оценок погрешностей (с обратным знаком) от десятичного логарифма числа точек коллокаций n (рис. 7, $n=10, 20, 40, \dots, 640$), основанная на многокомпонентном анализе этих зависимостей и поочередном исключении компонент погрешности. На рис. 11, 12 цифрой 0 обозначены оценки результатов вычислений, цифрой 1 – результаты фильтрации. В результате оценок выяснено, что относительная погрешность вычисленного значения потенциала при $n=640$ имеет значение около 10^{-13} , плотности тока – 10^{-12} .

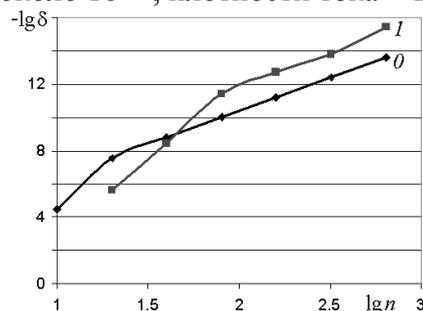


Рис. 11. Оценка относительной погрешности потенциала в точке D

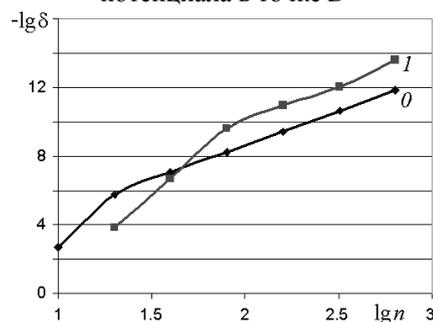


Рис. 12. Оценка относительной погрешности плотности тока в точке D

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложен численно-аналитический метод и решена задача о распределении электрического поля и поля токов между круглым электродом-инструментом и плоским анодом в условии переменности анодного потенциала с немонотонной зависимостью нормальной составляющей плотности тока от анодного потенциала.

Исследования показали, что переменность анодного потенциала приводит к уменьшению плотности тока в зоне активного растворения и вытеснению линий тока на периферию.

Сравнение с натурным экспериментом показало качественное совпадение с полученными расчетными данными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Клоков В. В., Шишкин С. Е.** Стационарное анодное формообразование двугранным катодом при неравномерной поляризации анода // Тр. семин. по краевым задачам: сборник научных трудов. Казань: Казанск. ун-т, 1985. Вып. 22. С. 117–124. [V. V. Klokov, S. E. Shishkin, "Stationary anodic shaping by two-sided cathode under non-uniform anodic polarization" (in Russian), in *Trudy seminara po kraevym zadacham*, vol. 22, pp. 117-124, 1985.]
2. **Газизов Е. Р., Маклаков Д. В.** Анодное формообразование двугранным катодом при неравномерной поляризации анода // Известия вузов. Авиационная техника. 2002. № 4. С. 55–57. [E. R. Gazizov, D. V. Maklakov, "Anodic shaping by two-sided cathode under non-uniform anodic polarization" (in Russian), in *Izvestiya vuzov. Aviatsionnaya tekhnika*, no. 4, pp. 55-57, 2002.]
3. **Газизов Е. Р.** Анодное формообразование криволинейным катодом при неравномерной поляризации анода // Известия КГАСУ. Казань. 2006. № 1 (5). С. 132–135. [E. R. Gazizov, "Anodic shaping by curvilinear cathode under non-uniform anodic polarization" (in Russian), in *Izvestiya KGASU*, no. 1 (15), pp. 132-135, 2006.]
4. **Мукусимова Р. Р., Житников В. П., Зарипов А. А.** Исследование влияния неравномерности потенциала при электрохимической обработке в пассивирующем электролите // Теория и практика современных электрохимических производств: материалы III Междунар. науч.-практ. конф. СПб. 2014. С. 37–38. [R. R. Muksimova, V. P. Zhitnikov, A. A. Zaripov, "Investigation of potential non-uniformity at electrochemical machining in passivating electrolyte" (in Russian), in *Teoriya i praktika sovremennykh elektrokhimicheskikh proizvodstv*, S. Petersburg, pp. 37-38, 2014.]
5. **Зарипов А. А.** Моделирование электрохимической обработки стержневым электрод-инструментом в пассивирующем электролите // Теоретические и прикладные аспекты современной науки: материалы VIII Международной научно-практической конференции. Белгород, 2015. Т. 1. С. 8–14. [A. A. Zaripov, "Modeling of electrochemical machining by rode electrode-tool in passivating electrolyte" (in Russian), in *Teoreticheskie i prikladnye aspekty sovremenniy nauki*, vol. 1, pp. 8-14, 2015.]
6. **Житников В. П., Зарипов А. А.** Учет распределения анодного потенциала при моделировании электрохимической обработки в пассивирующем электролите круглым электрод-инструментом // Мавлютовские чтения: тр. Росс. научн.-техн. конф. Уфа: УГАТУ, 2016. Т. 6. С. 52–57. [V. P. Zhitnikov, A. A. Zaripov, "Consideration of distribution of anodic potential at modeling of electrochemical machining in passivating electrolyte by the round electrode-tool" (in Russian), in *Mavlyutovskie chteniya*, Ufa, YGATU, vol. 6, pp. 52-57, 2016.]
7. **Седыкин Ф. В., Орлов Б. П., Матасов В. Ф.** Исследование анодного тока при электрохимической обработке при постоянном и импульсном напряжении // Технология машиностроения: сб. науч. тр. Тула, 1975, Т. 39. С. 3–10. [F. V. SeDykin, B. P. Orlov, V. F. Mattasov, "Investigation of anodic current under electrochemical machining at uniform and pulse voltage" (in Russian), in *Tekhnologiya mashinostroeniya*, Tula, vol. 39, pp.3-10, 1975.]
8. **Житников В. П., Зайцев А. Н.** Импульсная электрохимическая размерная обработка. М.: Машиностроение, 2008. 407 с. [V. P. Zhitnikov, A. N. Zaytsev, *Pulse electrochemical machining*, (in Russian). М.: Mashinostroenie, 2008.]
9. **Kosarev T. V., Idrisov T. R., Zaitsev A. N., Zhitnikov V. P.** Investigation and Simulation of Topology of Passivity and Active Dissolution Areas on Anode for Electrochemical Machining with Additional Cathode // Proc. of 15th intern. symposium on electromachining ISEM-15. (Pittsburgh, Pennsylvania – USA, April 23-27 2007). P. 305-308. [T. V. Kosarev, T. R. Idrisov, A. N. Zaytsev, V. P. Zhitnikov, "Investigation and Simulation of Topology of Passivity and Active Dissolution Areas on Anode for Electrochemical Machining with Additional Cathode", in *Proc. 15th intern. symposium on electromachining (ISEM-15)*, pp. 177-181, 2007.]
10. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с. [M. A. Lavrentiev, B. V. Shabat, "Methods of the theory of functions of complex variables" (in Russian), М.: Nauka, 1987.]
11. **Терентьев А. Г.** К линейной теории кавитационного обтекания препятствий // Вопр. прикл. матем. и мех.: Сборник научных трудов. Чебоксары: Чуваш. ун-т, 1971. Вып. 1. С. 3–35. [A. G. Terentiev, "On linear theory of cavitation flows about obstacles" (in Russian), in *Voprosy prikladnoy matematiki i mekhaniki*, Cheboksary, vol. 1, pp. 3-35, 1971.]
12. **Гуревич М. И.** Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с. [M. I. Gurevich, "The theory of flows of ideal fluid" (in Russian). М.: Nauka, 1979.]
13. **Житников В. П., Шерыхалина Н. М.** Применение многократной фильтрации при численном решении задач методами теории функций комплексного переменного // Вычислительные технологии. 2013, Т. 18, № 1. С. 15–24. [V. P. Zhitnikov, N. M. Sherykhalina, "Use of the multistage filtration at numerical solution of problems by methods of the theory of functions of complex variables", (in Russian), in *Vychislitel'nye tekhnologii*, vol. 18, no. 1, pp. 15-24, 2013.]
14. **Житников В. П., Шерыхалина Н. М.** Обоснование методов фильтрации результатов численного эксперимента // Вестник УГАТУ. 2007. Т. 9, № 3 (21). С. 71–79. [V. P. Zhitnikov, N. M. Sherykhalina, "Justification of the filtration methods of numerical experiment results", (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 9, no. 3 (21), pp. 71-79, 2007.]
15. **Zhitnikov V. P., Sherykhalina N. M., Sokolova A. A.** Problem of Reliability Justification of Computation Error Estimates // Mediterranean Journal of Social Sciences, 2015, Vol. 6, No. 2, P. 65-78. [V. P. Zhitnikov, N. M. Sherykhalina, A. A. Sokolova, "Problem of Reliability Justification of Computation Error Estimates", in *Mediterranean Journal of Social Sciences*, vol. 6, no. 2, pp. 65-78, 2015.]

ОБ АВТОРАХ

ЖИТНИКОВ Владимир Павлович, проф. каф. выч. мат. и кибернетики. Дипл. инж.-физ. (МФТИ, 1973). Д-р физ.-мат. наук по мех. жидкости, газа и плазмы (Казанск. ун-т, 1993). Засл. деят. науки РБ. Иссл. в обл. волн. течений жидкости, э/хим. формообразования, числ.-аналит. методов.

ШЕРЫХАЛИНА Наталия Михайловна, проф. каф. ВМиК. Дипл. инж.-системотехн. (УГАТУ, 1993). Д-р физ.-мат. наук по мат. моделированию, числ. методам и комплексам программ (УГАТУ 2012). Иссл. в обл. волновых течений жидкости, разработки числ.-аналит. методов, методов оценки погрешности и достоверности числ. результатов.

ЗАРИПОВ Аскар Александрович, аспирант каф. выч. мат. и кибернетики. Дипл. магистр по прикладн. математике и информатике (УГАТУ, 2013). Иссл. в обл. решения задач матем. моделирования физ. процессов.

METADATA

Title: Simulation of electrochemical machining at conditions of non-monotonical dependence of anodic potential on current density.

Authors: V. P. Zhitnikov¹, N. M. Sherykhalina², A. A. Zaripov³

Affiliation:

Ufa State Aviation Technical University (UGATU), Russia.

Email: ¹zhitnik@mail.ru, ²n_sher@mail.ru, ³jacud@yandex.ru

Language: Russian.

Source: Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 21, no. 4 (78), pp. 25-31, 2017. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

Abstract: The problem of modeling of the initial stage of electrochemical machining by the electrode-tool of a round form is solved. For modeling the non-monotonic dependence of current density on anodic potential, characteristic for processing in the passivating electrolytes is used. Thus the processed surface is divided into three regions: active dissolution, lack of dissolution (on the falling part of dependence) and weak dissolution at the small density of current. The numerical and analytical method of the solution of a problem with application of the theory of functions complex variable, allowed to use experimental data for modeling is developed.

Key words: Electrochemical machining; anodic potential; non-monotonic dependence; complex potential.

About authors:

ZHITNIKOV, Vladimir Pavlovich, Prof., Dept. of computer science and robotics. Dipl. Engineer-physicist (Moscow Physical-Technical Inst., 1973). Cand. of Phys.-Math. Sci. (MIPT, 1984), Dr. of Phys.-Math. Sci. (KSU, 1993).

SHERYKHALINA, Nataliya Mikhailovna, Prof., Dept. of computer science and robotics. Dipl. Engineer-system master (UGATU, 1993). Cand. of Phys.-Math. Sci. (BGU, 1996), Dr. of Tech. Sci. (UGATU, 2012).

ZARIPOV, Askar Alexandrovich, postgraduate student., Dept. of computer science and robotics. Master's degree (UGATU, 2013).