Уфа : УГАТУ, 2008 Вестник УГАТУ • Управление, ВТиИ Т. 10, № 2 (27). С. 25–34

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 517.938

А. З. АСАНОВ, Д. Н. ДЕМЬЯНОВ

ФОРМИРОВАНИЕ ЗАДАННОГО СПЕКТРА ПЕРЕДАТОЧНЫХ НУЛЕЙ МНОГОСВЯЗНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассматривается проблема обеспечения заданной совокупности передаточных нулей линейной многосвязной динамической системы с равным числом входов/выходов на основе использования аппарата канонизации матриц. *Многосвязный объект ; синтез систем ; канонизация матриц ; системные нули*

ВВЕДЕНИЕ

Учет структуры системы и ее структурных свойств является необходимым условием при решении различных задач анализа и синтеза многосвязных линейных систем при проектировании качественных систем управления.

Под структурными свойствами принято понимать свойства, определяющие принципиальную возможность реализации в системе заданных статических и/или динамических режимов посредством определенных воздействий на ее входы, а также получения информации об этих режимах по результатам измерений выходных переменных [1]. Информация о структурных свойствах динамической системы позволяет корректно ставить и решать связанные с этими свойствами задачи оценивания, идентификации, управления и адаптации.

К структурным свойствам системы наряду с такими широко рассматриваемыми свойствами, как устойчивость, наблюдаемость, управляемость, относят и нули системы. При этом различают обычные нули и системные нули.

Обычные нули скалярных и матричных передаточных функций представляют собой корни скалярных полиномов, образующих числители передаточных функций/матриц. Это нули передаточных функций, которые характеризуют конкретные каналы между отдельными компонентами входного $u(t)$ и выходного $y(t)$ векторов. Так, в многосвязном случае если пару обычных нулей представить в комплексном виде $p_z = \alpha \pm j\beta$ и $f_j^i(p) = \frac{b_{ij}(p)}{a(p)}$ — элемент матричной передаточной функции — передаточная функция от i-го входа к j-му выходу, то $b_{ij}(p_z) = 0$. На частоте β происходит «замирание» (обнуление) сигнала в канале от от i-го входа к j-му выходу. Причем такое «замирание» не зависит от амплитуды входного сигнала, а зависит только от частоты входного сигнала. Именно совокупность обычных нулей и полюсов системы определяет характер процессов в динамической системе, возникающих при подаче на входы системы тех или иных воздействий. Но обычные нули не влияют на принципиальные возможности решения тех или иных задач анализа и синтеза, т. е. они не характеризуют системные свойства рассматриваемого объекта.

Системные нули и связанные с ними процессы возникают только в многосвязных (много входов — много выходов, MIMO) системах и объектах, где происходят сложные взаимодействия различных начальных условий, внешних сигналов разных каналов управления.

Необходимым и достаточным условием существования конечного системного нуля является условие, что при некоторой комплексной величине p_i^z ранг матрицы Розенброка уменьшается, т. е.

$$\forall p_i^z : \mathrm{rank} \begin{bmatrix} (p_i^z I_n - A) & -B \\ C & 0 \end{bmatrix} < $$
$$< \ \mathrm{norm} \ \ \mathrm{rank} \begin{bmatrix} (pI_n - A) & -B \\ C & 0 \end{bmatrix} =$$
$$= n + \ \min \ \ \mathrm{rank}\ (B, C)\,.$$

В группу системных нулей входят несколько типов нулей: передаточные нули,

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-08-00536)

развязанные нули (по входам, по выходам, по входам и выходам), вырожденные нули. Они-то и формируют, и характеризуют структурные свойства динамической системы. Развязанные нули системы (объекта) связаны с наличием неуправляемых, ненаблюдаемых, неуправляемых и ненаблюдаемых подсистем в рассматриваемой системе. Очевидно, что такие нули возможны и интересны в задачах анализа, но совершенно маловероятны в задачах синтеза систем, поэтому далее здесь не рассматриваются.

Передаточным нулем системы принято называть комплексное число p_i^z, при котором уменьшается ранг передаточной матрицы этой системы

$$F_y^u(p) = C(pI_n - A)^{-1}B\,, \qquad (1)$$

т. е. $q = \mathrm{rank}F_y^u(p) - \mathrm{rank}F_y^u(p_i^z) > 0$.

Уменьшение ранга передаточной матрицы указывает на возникновение линейной зависимостистолбцов (и/или строк) передаточной матрицы $F_y^u(p)$ на частоте $\beta^p = Imp_i^z$. Линейная зависимость столбцов передаточной матрицы означает, что при определенном сочетании ненулевых входных воздействий (может быть даже нескольких входных воздействий), пропорциональных $\exp(p_i^z t)$, вынужденная составляющая выходного сигнала системы равна нулю (происходит запирание системы). При линейной зависимости строк передаточной матрицы в системе на частоте β^p возникают линейно-зависимые выходы. При неучете этих особенностей многосвязных систем могут возникнуть ситуации, когда система не сможет выполнять свои функции. Целесообразно при решении задач синтеза как минимум исследовать нули многосвязной динамической системы (объекта), а как максимум — расположить нули системы требуемым образом.

Как известно, нули системы инвариантны относительно невырожденного преобразования переменных состояния, входов и выходов, действия статической обратной связи по состоянию и выходу. Даже введение динамической обратной связи приводит лишь к добавлению новых нулей к уже имеющимся нулям. Изменить положение системных нулей можно только соответствующим выбором матрицы выхода и/или входа. Впервые возможность управления нулями путем выбора матрицы выхода сформулирована и обоснована в [2]. Тогда трудности в решении различных задач управления, идентификации, адаптации с динамическими объектами с нежелательными нулями можно избежать, если на начальной стадии проектирования, когда существует некоторая свобода в выборе структуры выхода, задать нули синтезируемой системы желаемым образом.

Был предложен ряд способов формирования матрицы выхода, опирающиеся как на итеративные процедуры, так и вычисления собственных чисел специальных матриц и канонических форм [2, 3]. Но все они имеют весьма сложный и трудоемкий характер.

В данной работе предлагается достаточно простой метод формирования желаемого набора передаточных нулей системы на основе применения математического аппарата канонизации матриц [4]. Показывается, что на основе свойств матриц с дефектом ранга возможно построение дополнительных матричных конструкций, позволяющих синтезировать выходную матрицу системы с заданным расположением передаточных нулей. Предложенный метод доведен до уровня инженерной методики и может быть использован при решении задач синтеза многосвязных линейных систем управления.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕТОДА КАНОНИЗАЦИИ МАТРИЦ

Пусть рассматривается система, описываемая в пространстве состояний уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx\,, \end{cases} \qquad (2)$$

где $x \in R^n$, $u \in R^s$, $y \in R^m$ — векторы состояния, управления и выхода, A, B, C — матрицы соответствующих размеров.

Предполагается, что $m = s$, т. е. динамическая система — квадратная, $s < n$, матрица $B_{n\times s}$ — полного столбцового ранга, пара (AB) управляема.

Требуется построить матрицу $C_{m\times n}$ полного ранга такую, чтобы $\mu = n - s$ различных наперед заданных чисел p_i^z являлись нулями заданной системы. При этом полученная система должна быть наблюдаема. Числа p_i^z должны быть действительными, и ни одно из этих чисел не должно совпадать с собственными числами матрицы A — в этом случае выполняется условие наблюдаемости [1].

При решении поставленной задачи используется метод канонизации матриц. В [4] введено, что канонизацией некоторой произвольной матрицы M размера $m \times n$ и ранга r

называется разложение этой матрицы на четверку матриц $\tilde{M}^L_{r,m}$, $\bar{M}^L_{(m-r),m}$, $\tilde{M}^R_{n,r}$, $\bar{M}^R_{n,(n-r)}$, удовлетворяющих следующему равенству

$$\begin{bmatrix} \tilde{M}^L_{r,m} \\ \bar{M}^L_{(m-r),m} \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} \tilde{M}^R_{n,r} & \bar{M}^R_{n,(n-r)} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,(n-r)} \\ 0_{(m-r),r} & 0_{(m-r),(n-r)} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где $\tilde{M}^L_{r,m}$ называется левым канонизатором матрицы M, $\bar{M}^L_{(m-r),m}$ — левым матричным делителем нуля матрицы M, $\tilde{M}^R_{n,r}$ — правым канонизатором матрицы M, $\bar{M}^R_{n,(n-r)}$ — правым матричным делителем нуля матрицы M, I_r — единичная матрица размера $r \times r$.

Левый $\bar{M}^L$ (правый $\bar{M}^R$) делитель нуля максимального ранга характеризует все линейно зависимые комбинации строк (столбцов) исходной матрицы M в соответствии с тождеством

$$\bar{M}^L M = 0_{(m-r),n} \quad \left(M\bar{M}^R = 0_{m,(n-r)}\right). \quad (4)$$

При этом все множество делителей нуля произвольных размеров для матрицы M определяется формулами

$$\left\{\bar{M}^L\right\}_\mu = \mu\bar{M}^L, \quad \left\{\bar{M}^R\right\}_\eta = \bar{M}^R\eta, \quad (5)$$

где μ и η — произвольные матрицы подходящих размеров.

Левый $\tilde{M}^L$ и правый $\tilde{M}^R$ канонизаторы характеризуют все линейно-независимые комбинации строк и столбцов исходной матрицы M в соответствии с тождеством

$$\tilde{M}^L M \tilde{M}^R = I_r, \quad (6)$$

т. е. приводят к представлению исходной матрицы в канонических базисах.

Сводный канонизатор $\tilde{M}$, используемый при решении матричных уравнений, вычисляется по формуле

$$\tilde{M} = \tilde{M}^R \tilde{M}^L \quad (7)$$

и описывает всю совокупность линейно независимых строк и столбцов исходной матрицы.

Введенные конструкции являются по своей сути обобщением ранее использовавшихся и хорошо известных конструкций теории матриц. Так, ранее известная матричная конструкция — псевдообратная матрица (обобщенная обратная матрица Мура–Пенроуза) [5, с. 47] является частным случаем сводного канонизатора. В другом случае, для обратимой матрицы M сводный канонизатор совпадает с обратной матрицей M^{-1}. Очевидно, что у обратимой матрицы нет линейно-зависимых строк и столбцов — формально это подтверждается отсутствием левого и правого делителей нуля такой матрицы.

В случае, когда матрица $M_{m\times n}$ — прямоугольная и, например, имеет полный строчный ранг $\mathrm{rank} M = m$, то левый делитель нуля матрицы отсутствует и его принято считать $\bar{M}^L = 0$, тогда левый канонизатор совпадает с единичной матрицей $\tilde{M}^L = I_m$, а сводный канонизатор — с правым односторонним делителем единицы $\tilde{M} = \tilde{M}^R = M^R$, где M^R — правый односторонний делитель единицы, удовлетворяющий равенству $MM^R = I_m$.

Аналогично в случае прямоугольной матрицы, имеющей полный столбцовый ранг $\mathrm{rank} M = n$, имеют место равенства

$$\bar{M}^R = 0, \quad \tilde{M}^R = I_n, \quad \tilde{M} = \tilde{M}^L = M^L,$$

где M^L — левый односторонний делитель единицы ($M^L M = I_n$).

Введенные конструкции могут вычисляться различными способами — на основе сингулярных преобразований, планшетным методом и др. Существуют и программные реализации этих методов, в частности, планшетного метода [6], которые позволяют автоматизировать процедуру нахождения делителей нуля, канонизаторов и т. д.

В [4] представлены введенные и доказанные условия разрешимости и формулы аналитических решений основных видов линейных матричных уравнений, которые используются в данной работе.

2. АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЕРЕДАТОЧНЫХ НУЛЕЙ СИСТЕМЫ

Существует большое количество определений нулей системы [7] и практически столько же способов их вычисления. Но вычисление системных нулей является далеко нетривиальной задачей и применение этих способов вычисления нулей встречает значительные трудности, связанные с рассмотрением миноров различного порядка, определением минимальных общих делителей этих миноров, введением инвариантных подпространств и т. д.

Приведем здесь еще один, ранее не встречавшийся в литературе, аналитический способ вычисления нулей через параметры модели системы в пространстве состояний, основанный на аппарате канонизации матриц.

Пусть рассматривается многосвязная система, представленная в пространстве состояний матрицами $A_{n,n}$, $B_{n,s}$, $C_{m,n}$ с равным числом входов и выходов ($m = s$). И пусть $\mathrm{rank}B = \mathrm{rank}C = \mathrm{rank}B\mathrm{C} = \mathrm{rank}CB = s$.

В [8] показано, что для решения задачи вычисления нулей системы можно использовать спектральную декомпозицию произведения матриц BC вида

$$BC = U\begin{bmatrix} \Lambda & 0_{s,n-s} \\ 0_{n-s,s} & 0_{n-s,n-s} \end{bmatrix} V\,, \qquad (8)$$

где $\Lambda_{s,s}$ — ненулевая матрица, имеющая в зависимости от структуры BC диагональную или жорданову форму, матрица U составлена из собственных векторов $BC, V = U^{-1}$.

Матрицы U и V в соответствии с приведенным выше разложением могут быть представлены в следующем виде:

$$U = \begin{bmatrix} \ldots & K_{n.n-s} \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \ldots \\ L_{n-s,n} \end{bmatrix}, \qquad (9)$$

где столбцы подматрицы K состоят из собственных векторов, соответствующих нулевым собственным числам BC, а строки подматрицы L состоят из собственных вектор-строк, соответствующих нулевым собственным числам BC. При этом матрицы K и L должны удовлетворять (должны вычисляться) соотношениям

$$LB = 0_{n-s,s}\,, \quad CK = 0_{s,n-s}\,, \quad LK = I_{n-s}\,, \qquad (10)$$

где 0 и I — блочная нулевая и единичная матрицы соответствующих размеров.

Сравнивая соотношения (4) и первые два из (10), нетрудно установить, что подматрицы K и L — суть матричные делители нуля: $L = \bar{B}^L$, $K = \bar{C}^R$. Тогда, учитывая свойства матричных делителей нуля и (5), соотношения (10) вырождаются в следующие соотношения:

$$\mu\overline{B_{n-s,n}}^{L} B_{n,s} = 0_{n-s,s}\,, \quad C_{s,n}\overline{C_{n,n-s}}^{R}\eta = 0\,,$$
$$\mu\bar{B}^L\bar{C}^R\eta = I_{n-s}\,,$$

где μ и η — произвольные матрицы подходящего размера.

Произвольность матриц μ и η можно использовать следующим образом: положить, например, $\mu = I_{n-s}$, а матрицу η использовать для нормирования (или, наоборот, $\eta = I_{n-s}$ и $\mu = (\bar{B}^L\bar{C}^R)^{-1}$).

Тогда, аналогично [8], следуют следующие утверждения (они же и новые определения нулей системы).

Утверждение 1. Нулями системы (2) с равным числом входов и выходов, при условии $\mathrm{rank}CB = s$, являются собственные числа матричной конструкции $\bar{B}^L A\bar{C}^R(\bar{B}^L\bar{C}^R)^{-1}$ порядка $n - s$, т. е.

$$p_i^z = \mathrm{eig}(\bar{B}^L A\bar{C}^R(\bar{B}^L\bar{C}^R)^{-1}) \qquad (11)$$

или корни уравнения

$$\det(pI_{n-s} - \bar{B}^L A\bar{C}^R(\bar{B}^L\bar{C}^R)^{-1}) = 0\,.$$

Утверждение 2. Нулями системы (2) с неравным числом входов и выходов являются комплексные числа p_i^z, при которых уменьшается нормальный ранг матричной конструкции $(p\bar{B}^L\bar{C}^R - \bar{B}^L A\bar{C}^R)$, т. е.

$$\mathrm{rank}(p_i^z\bar{B}^L\bar{C}^R - \bar{B}^L A\bar{C}^R) <$$
$$< \mathrm{rank}(p\bar{B}^L\bar{C}^R - \bar{B}^L A\bar{C}^R) \qquad (12)$$

Следует обратить внимание на то, что результаты, приведенные в утверждении 2, хорошо согласуются с результатами, которые были получены ранее исходя из других соображений — через рассмотрение внутренней связности динамической системы [9] и введение так называемой матрицы связности $N_{(n-\mathrm{rank}B),(n-\mathrm{rank}C)}(p) = \bar{B}^L(pI_n - A)\bar{C}^R$.

Соотношения (11)–(12) можно использовать непосредственно для вычисления нулей динамической системы (2).

3. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ДЕЛИТЕЛЕЙ НУЛЯ ПЕРЕДАТОЧНОЙ МАТРИЦЫ

Условия управляемости и наблюдаемости системы, а именно этот случай наиболее интересен при проектировании систем управления, приводят к тому, что полное множество системных нулей совпадает с множеством передаточных нулей. Поэтому задание системных нулей означает задание передаточных нулей. Как уже указывалось ранее, наличие передаточного нуля системы приводит к уменьшению ранга передаточной матрицы (матричной передаточной функции), что соответствует возникновению линейно зависимых строк (столбцов), а значит, наличию левого (правого) делителя нуля передаточной матрицы на некоторой комплексной частоте p_i^z. Можно констатировать следующие утверждения, дополняющие утверждения из [10].

Утверждение 3. Наличие у передаточной матрицы (1) правого делителя нуля $\overline{F_y^u(p_i^z)}^R$ свидетельствует о том, что некоторые столбцы этой передаточной матрицы на комплексной частоте p_i^z линейно зависимы между собой; при этом правый делитель нуля максимального ранга формализует всю возможную линейную зависимость входов системы.

Следствие 1. Наличие правого делителя нуля $\overline{F_y^u(p_i^z)}^R \neq 0$ передаточной матрицы системы приводит к тому, что часть входных воздействий на комплексной частоте p_i^z или их линейные комбинации не участвуют в формировании выходного сигнала системы.

Для расчетов множества правых делителей нуля передаточной матрицы $F_y^u(p)$ при произвольных матричных блоках $\eta(p)$ и $\rho(p)$ соответствующих размеров можно использовать формулу

$$\left\{\overline{F_y^u(p_i^z)}^R\right\}_{\eta,\rho} = \\ = \left[\tilde{B}(p_i^z I_n - A)\bar{C}^R \overline{\bar{B}^L(p_i^z I_n - A)\bar{C}^R}^R \bar{B}^R\right] \times \\ \times \begin{bmatrix} \eta(p_i^z) \\ \rho(p_i^z) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Утверждение 4. Наличие у передаточной матрицы (1) левого делителя нуля $\overline{F_y^u(p_i^z)}^L$ свидетельствует о том, что некоторые строки этой передаточной матрицы на комплексной частоте p_i^z линейно зависимы между собой; при этом левый делитель нуля максимального ранга формализует всю возможную линейную зависимость компонент выходного вектора системы.

Следствие 2. Наличие левого делителя нуля $\overline{F_y^u(p_i^z)}^L \neq 0$ передаточной матрицы системы приводит к тому, что часть (отдельные компоненты) выходного сигнала на комплексной частоте p_i^z не является линейно-независимой.

Для расчетов множества левых делителей нуля передаточной матрицы $F_y^u(p)$ при произвольных матричных блоках $\pi(p)$ и $\mu(p)$ соответствующих размеров можно использовать формулу

$$\left\{\overline{F_y^u(p_i^z)}^L\right\}_{\pi,\mu} = [\pi(p_i^z)\mu(p_i^z)] \times \\ \times \begin{bmatrix} \overline{\bar{B}^L(p_i^z I_n - A)\bar{C}^R}^L \bar{B}^L(p_i^z I_n - A)\tilde{C}^R \\ \bar{C}^R \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Наличие одновременно левого и правого делителей нуля характеризует оба указанных явления одновременно.

Формулы (13) и (14) могут оказаться полезными при расчете параметров входных сигналов, при которых проявляются свойства, присущие передаточным нулям системы.

4. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Структурные особенности линейных многосвязных систем в виде системных нулей могут привести к таким нежелательным явлениям, как запирание системы при определенном сочетании сигналов на входе системы, независимость выходного сигнала от входных сигналов и т. д. Поэтому на практике при синтезе систем необходимо расположить системные нули в некоторой заданной области, где их отрицательное влияние будет минимальным.

Для решения поставленной задачи используем передаточные матрицы $F_x^u(p)$ от входных воздействий к состоянию системы и $F_y^u(p)$ от входных воздействий к выходу системы:

$$F_x^u(p) = (pI_n - A)^{-1}B\,; \quad (15)$$

$$F_y^u(p) = C(pI_n - A)^{-1}B = CF_x^u(p)\,. \quad (16)$$

Теорема 1. Для уменьшения ранга матричной передаточной функции $F_y^u(p)$ динамической системы (2) достаточно, чтобы

$$C_j = \mu\overline{F_x^u(p_i^z)}^L, \quad (17)$$

где C_j — j-я строка матрицы C, μ — произвольная матрица соответствующего размера.

Доказательство теоремы 1 приведено в приложении.

Рассмотрим произведение двух матриц $M_{r,n}N_{n,r} = P_{r,r}$, где матрицы $M_{r,n}$, $N_{n,r}$ — матрицы полного ранга, $r < n$.

Теорема 2. Если произведение матриц $P = MN$ имеет ранг меньший, чем ранг каждой из матриц-сомножителей $\mathrm{rank}P = l < r$. Учитывая, что M и N — матрицы полного ранга, то левая матрица-сомножитель M может быть представлена в виде

$$M = T\begin{bmatrix} \eta \\ \mu\bar{N}^L \end{bmatrix},$$

где $T_{r,r}$ — матрица преобразования полного ранга, η, μ — произвольные матрицы полного ранга соответствующих размеров.

Доказательство теоремы 2 приведено в приложении.

Используя полученные соотношения и свойства матричных делителей нуля передаточных матриц, можно сформировать следующий алгоритм синтеза выходной матрицы многомерной системы с заданным набором передаточных (системных) нулей.

5. АЛГОРИТМ СИНТЕЗА ВЫХОДНОЙ МАТРИЦЫ

Рассмотрим динамическую систему (2), в которой выбором выходной матрицы необходимо обеспечить заданное расположение $\mu = n - s$ действительных передаточных нулей.

Используем для этих целей передаточные матрицы $F_x^u(p)$ и $F_y^u(p)$, представленные формулами (15) и (16).

Алгоритм синтеза выходной матрицы системы.

5.1. Найдем μ матриц $F_i = F_x^u(p_i^z) = (p_i^z I_n - A)^{-1}B, i = \overline{1,\mu}$.

5.2. Сгруппируем матрицы F_i в блочные матрицы $F_k^* = [F_1 \dots F_l]$ по следующему субалгоритму:

5.2.1. Выбирается матрица F_1. Так как она имеет размер $n \times s$, то у нее всегда будет существовать левый делитель нуля. Обозначим $F_1^* = F_1$.

5.2.2. Формируется блочная матрица $[F_1\, F_2]$. Проверяется наличие левого делителя нуля полученной блочной матрицы. Если делитель нуля существует, то обозначим $F_1^* = [F_1\, F_2]$.

5.2.3. Формируется блочная матрица $[F_1\, F_2\, F_3]$. Проверяется наличие левого делителя нуля полученной блочной матрицы. Если делитель нуля существует, то обозначим $F_1^* = [F_1\, F_2\, F_3]$.

5.2.4. Так продолжается до тех пор, пока не получится блок $F_1^* = [F_1\, \dots\, F_l]$, имеющий левый делитель нуля, присоединение к которому следующей матрицы F_{l+1} приведет к созданию блочной матрицы, не имеющей левого делителя нуля.

5.3. Найдем k левых делителей нуля $\overline{F_k^*}^L$ полученных блочных матриц F_k^*.

5.4. Используя теорему 1, найдем k строк выходной матрицы системы

$$C_j^* = V_j \overline{F_j^*}^L\,, \quad j = \overline{1,k}\,,$$

где V_j — произвольный и неравный тождественно нулю вектор-строка. Используя основные свойства делителей нуля, можно показать, что число таких строк всегда будет $k \leq s$.

5.5. Из полученных строк сформируем первые k строк матрицы C^*, остальные $s - k$ строк выберем произвольно при условии, что они линейно независимы с предыдущими. Кроме того, должно выполняться условие наличия в системе ровно $\mu = n - s$ передаточных нулей. Это значит, что $\det(CB) \neq 0$.

5.6. Искомая матрица выхода будет иметь вид

$$C = \eta C^*\,,$$

где η — произвольная матрица полного ранга соответствующего размера.

Искомая выходная матрица C найдена.

То, что полученная матрица выхода C обеспечивает требуемые нули, достаточно просто проверить, подставив в формулу для матричной передаточной функции (16) значение нуля и выражение для матрицы C

$$F_y^u(p_i^z) = \eta C^*(p_i^z I - A)^{-1}B = \eta \begin{bmatrix} V_1 \overline{F_1^*}^L \\ \dots \\ V_k \overline{F_k^*}^L \\ H_1 \\ \dots \\ H_{s-k} \end{bmatrix} F_x^u(p_i^z)\,.$$

Так как по алгоритму существует хотя бы одна $\overline{F_j^*}^L(p_i^z)$, то хотя бы одна строка полученной матрицы будет обнуляться, что приведет к потере ранга. А значит, система будет иметь нуль при данном значении p_i^z.

Пример 1. Рассмотрим линейную модель турбореактивного двигателя с форсажем (ТРДФ) некоторого летательного аппарата [12], описывающую один из режимов работы двигателя и представленную в пространстве состояний матрицами

$$A = \begin{bmatrix} -0{,}320 & 0 & -1{,}360 & 0 \\ -0{,}018 & 0 & 0{,}225 & -1{,}160 \\ 0 & 0{,}470 & -1{,}930 & -1{,}850 \\ 0{,}030 & 0 & 0{,}385 & -0{,}109 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1{,}840 & 0{,}520 \\ 0{,}850 & -0{,}250 \\ 0 & 0 \\ -0{,}070 & -0{,}420 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1{,}000 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}800 & 0 & 0 & -1{,}000 \end{bmatrix}.$$

Вектор состояний имеет компонентами частоту ротора турбокомпрессора, температуры двигателя в двух различных сечениях и полное давление в турбине. Входной вектор включает в себя такие компоненты, как расход топлива в основной камере, площадь критического сечения сопла. Выходными величинами модели являются частота ротора, степень расширения газа в турбине ТРДФ. Судя по линейной модели ТРДФ, объект вполне устойчив — полюса $\{-1{,}5596, -0{,}4076, -0{,}1959 \pm 0{,}1566j\}$.

Расчет передаточных нулей для данной модели по формуле (11) показывает, что в системе присутствуют два нуля: $p_1^z = -2{,}0329$, $p_2^z = 0{,}1029$. Анализ показывает, что наличие таких нулей и полюсов приведет при входном сигнале $u(t) = [0{,}605\,1]^T \exp(0{,}1029t)$ к обнулению («запиранию») обоих выходов. Кроме того, переходные характеристики анализируемого объекта будут иметь в начальный момент времени заброс в отрицательную сторону. Наличие вышеуказанных нулей, особенно неминимально-фазового нуля p_2^z, приведет к трудностям при синтезе системы управления ТРДФ.

Требуется найти такую выходную матрицу системы, чтобы нули системы были заданными минимально-фазовыми, например, чтобы $p_1^z = -5$ и $p_2^z = -7$.

Решение. Используя инструментальные и программные средства [6, 11] можно получить:

$$F_1 = (pI_4 - A)^{-1}B\big|_{p=-5} = \begin{bmatrix} -0{,}3832 & -0{,}0995 \\ -0{,}1697 & 0{,}0672 \\ 0{,}0344 & 0{,}0399 \\ 0{,}0140 & 0{,}0833 \end{bmatrix};$$

$$F_2 = (pI_4 - A)^{-1}B\big|_{p=-7} = \begin{bmatrix} -0{,}2724 & -0{,}0742 \\ -0{,}1209 & 0{,}0449 \\ 0{,}0150 & 0{,}0178 \\ 0{,}0105 & 0{,}0603 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} -0{,}3832 & -0{,}0995 & -0{,}2724 & -0{,}0742 \\ -0{,}1697 & 0{,}0672 & -0{,}1209 & 0{,}0449 \\ 0{,}0344 & 0{,}0399 & 0{,}0150 & 0{,}0178 \\ 0{,}0140 & 0{,}0833 & 0{,}0105 & 0{,}0603 \end{bmatrix}.$$

Канонизация матрицы $[F_1\, F_2]$ показывает, что у нее левый матричный делитель нуля отсутствует. У матриц F_1 и F_2 левые делители нуля есть:

$$\overline{F_1^*}^L = \overline{F_1}^L = \begin{bmatrix} 0{,}2132 & -0{,}2787 & 1{,}0000 & 0 \\ 0{,}3538 & -0{,}7166 & 0 & 1{,}0000 \end{bmatrix},$$

$$\overline{F_2^*}^L = \overline{F_2}^L = \begin{bmatrix} 0{,}1335 & -0{,}1763 & 1{,}0000 & 0 \\ 0{,}3657 & -0{,}7373 & 0 & 1{,}0000 \end{bmatrix}.$$

Тогда искомая матрица представима в виде

$$C = \begin{bmatrix} 0{,}3538 & -0{,}7166 & 0 & 1{,}0000 \\ 0{,}3657 & -0{,}7373 & 0 & 1{,}0000 \end{bmatrix}.$$

С помощью формулы (11) легко найти, что модель ТРДФ при найденной выходной матрице C имеет пару передаточных нулей$\{-5,\ -7\}$.

Выбор других строк в п. 5.4 алгоритма позволяет получить искомую выходную матрицу в виде

$$C = \begin{bmatrix} 0{,}2132 & -0{,}2787 & 1{,}0000 & 0 \\ 0{,}1335 & -0{,}1763 & 1{,}0000 & 0 \end{bmatrix}.$$

Легко убедиться, что и эта выходная матрица обеспечивает требуемую пару нулей системы.

Если требуется учесть дополнительные условия, например, близость структур исходной и результирующей выходных матриц модели ТРДФ, возможно использование определенной свободы выбора, предоставляемой п. 5.6. Так, при

$$\eta = \begin{bmatrix} 96{,}2963 & -95{,}2963 \\ 58{,}5185 & -57{,}7185 \end{bmatrix}$$

имеем

$$C = \begin{bmatrix} 1{,}0000 & 0 & -798{,}2170 & 0 \\ 0{,}8000 & 0 & -480{,}8884 & -1{,}0000 \end{bmatrix}.$$

Используя п. 5.6 алгоритма, можно получить множество матриц, обеспечивающих требуемую пару нулей. Это обстоятельство может быть использовано для выбора наиболее подходящей выходной матрицы, учитывающей физический смысл реальной задачи и используемых переменных.

Пример 2. Рассмотрим методический пример более сложной динамической системы с матрицами

$$A = \begin{bmatrix} -12 & 4 & -11 & 4 & -7 \\ -15 & 6 & -19 & 6 & -10 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 35 & -22 & 47 & -17 & 25 \\ 17 & -10 & 23 & -8 & 10 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где требуется обеспечить нули $p_1^z = -6, p_2^z = -7, p_3^z = -8$.

Решение. Инструментальными средствами Matlab и программными средствами [6, 11] можно получить:

$$F_1 = \begin{bmatrix} -18{,}3000 & -5{,}3500 \\ -20{,}8667 & -6{,}4833 \\ -2{,}1667 & -0{,}5833 \\ 30{,}9000 & 8{,}5500 \\ 24{,}9667 & 6{,}6833 \end{bmatrix},$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} -6{,}5333 & -1{,}9333 \\ -7{,}7167 & -2{,}6500 \\ -1{,}0500 & -0{,}3167 \\ 13{,}5333 & 3{,}7667 \\ 9{,}7833 & 2{,}5167 \end{bmatrix},$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} -3{,}4167 & -1{,}0119 \\ -4{,}0667 & -1{,}5381 \\ -0{,}6500 & -0{,}2167 \\ 7{,}9167 & 2{,}2262 \\ 5{,}3167 & 1{,}3119 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} -18{,}3000 & -5{,}3500 & -6{,}5333 & -1{,}9333 \\ -20{,}8667 & -6{,}4833 & -7{,}7167 & -2{,}6500 \\ -2{,}1667 & -0{,}5833 & -1{,}0500 & -0{,}3167 \\ 30{,}9000 & 8{,}5500 & 13{,}5333 & 3{,}7667 \\ 24{,}9667 & 6{,}6833 & 9{,}7833 & 2{,}5167 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18{,}3000 & \dots & -1{,}0119 \\ -20{,}8667 & \dots & -1{,}5381 \\ -2{,}1667 & \dots & -0{,}2167 \\ 30{,}9000 & \dots & 2{,}2262 \\ 24{,}9667 & \dots & 1{,}3119 \end{bmatrix}.$$

Канонизация матрицы $[F_1\,F_2\,F_3]$ показывает, что у нее левый матричный делитель нуля отсутствует. У матрицы $[F_1\,F_2]$ он есть: $F_1^* = [F_1\,F_2], F_2^* = F_3$.

$$\overline{F_1^*}^L = \\ = \begin{bmatrix} 2{,}0449 & -1{,}0582 & 3{,}6917 & -0{,}0527 & 1{,}0000 \end{bmatrix};$$

$$\overline{F_2^*}^L = \\ = \begin{bmatrix} -0{,}1041 & -0{,}0724 & 1{,}0000 & 0 & 0 \\ 2{,}7396 & -0{,}3550 & 0 & 1{,}0000 & 0 \\ 2{,}4932 & -0{,}7873 & 0 & 0 & 1{,}0000 \end{bmatrix}.$$

Искомое множество решений:

$$C = \eta_{3\times 3} \begin{bmatrix} k_{11} \cdot \overline{F_1^*}^L \\ \begin{bmatrix} k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{bmatrix} \cdot \overline{F_2^*}^L \end{bmatrix}.$$

Так, например,

$$C = \begin{bmatrix} 2{,}0449 & -1{,}0582 & 3{,}6917 & -0{,}0527 & 1{,}0000 \\ 2{,}7396 & -0{,}3550 & 0 & 1{,}0000 & 0 \end{bmatrix}.$$

Проверка различными методами [3, 8] и формулой (11) дает, что в системе имеются передаточные нули $p_1^z = -6, p_2^z = -7, p_3^z = -8$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение задачи синтеза динамической системы с заданным расположением системных нулей сведено к построению выходной матрицы с использованием аппарата канонизации матриц. Разработан алгоритм построения выходной матрицы при заданном спектре нулей системы. Показана возможность получения множества решений задачи синтеза системы с заданным спектром системных нулей. Предложен простой аналитический способ расчета передаточных нулей динамической системы равным числом входов и выходов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1

Доказательство утверждения может быть осуществлено прямой подстановкой в формулу. Рассмотрим случай, когда одна из строк матрицы выхода определяется по формуле $C_j = \mu\overline{F_x^u(p_i^z)}^L$. Подставим это значение и найдем матричную передаточную функцию на частоте p_i^z

$$F_y^u(p_i^z) = C(p_i^z I - A)^{-1}B = CF_x^u(p_i^z) =$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 \\ \dots \\ C_j \\ \dots \\ C_s \end{bmatrix} F_x^u(p_i^z) = \begin{bmatrix} C_1 F_x^u(p_i^z) \\ \dots \\ C_j F_x^u(p_i^z) \\ \dots \\ C_s F_x^u(p_i^z) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 F_x^u(p_i^z) \\ \dots \\ \mu \overline{F_x^u(p_i^z)}^L F_x^u(p_i^z) \\ \dots \\ C_s F_x^u(p_i^z) \end{bmatrix}.$$

Таким образом, получим, что

$$F_y^u(p_i^z) = \begin{bmatrix} C_1 F_x^u(p_i^z) \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ C_s F_x^u(p_i^z) \end{bmatrix}.$$

А обнуление одной из строк матричной передаточной функции приводит к уменьшению ее ранга.

Доказательство теоремы 2

Рассмотрим произведение двух матриц $M_{r,n} N_{n,r} = P_{r,r}$, где $M_{r,n}$, $N_{n,r}$ — матрицы полного ранга, $r < n$.

Оценим ранг произведения матриц. Выполним тождественные преобразования

$$P_{r,r} = M_{r,n} N_{n,r} =$$

$$= T_{r,r} \begin{bmatrix} \eta_{r-q,n} \\ \mu_{q,n-r} \overline{N}^L_{n-r,n} \end{bmatrix}_{r,n} N_{n,r} =$$

$$= T_{r,r} \begin{bmatrix} \eta_{r-q,n} N_{n,r} \\ \mu_{q,n-r} \overline{N}^L_{n-r,n} N_{n,r} \end{bmatrix}_{r,r} =$$

$$= T_{r,r} \begin{bmatrix} \eta_{r-q,n} N_{n,r} \\ 0_{q,r} \end{bmatrix}_{r,r}.$$

Очевидно, что $\operatorname{rank} \begin{bmatrix} \eta_{r-q,n} N_{n,r} \\ 0_{q,r} \end{bmatrix} = l \le$ $\le r - q$, где q — число строк матрицы μ.

Произведение матриц в соответствии с неравенством Сильвестра [5] имеет ранг меньший или равный минимальному из рангов матриц-сомножителей. Для рассматриваемых матриц, с учетом, что $\operatorname{rank} T = r$, имеем

$$\operatorname{rank} P = \operatorname{rank} \left\{ T_{r,r} \begin{bmatrix} \eta_{r-q,n} N_{n,r} \\ 0_{q,r} \end{bmatrix}_{r,r} \right\} \le$$
$$\le \min(l, r) = l \le r - q.$$

Пусть матрица $P_{r,r} = M_{r,n} N_{n,r}$ имеет ранг $l < r$.

Тогда с помощью невырожденного преобразования матрицу P можно привести к виду:

$$TP = \begin{bmatrix} P^* \\ 0 \end{bmatrix}; \; TMN = TP;$$

$$TMN = \begin{bmatrix} P^* \\ 0 \end{bmatrix}; \; M^* N = \begin{bmatrix} P^* \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Пусть $M^* = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}$. Тогда уравнение $M^* N = \begin{bmatrix} P^* \\ 0 \end{bmatrix}$ равносильно двум уравнениям $\begin{cases} M_1 N = P^* \\ M_2 N = 0 \end{cases}$.

Откуда с использованием аппарата канонизации матриц

$$M_2 = \eta \overline{N}^L, M^* = \begin{bmatrix} M_1 \\ \eta \overline{N}^L \end{bmatrix}, TM = \begin{bmatrix} M_1 \\ \eta \overline{N}^L \end{bmatrix},$$

$$M = T^{-1} \begin{bmatrix} M_1 \\ \eta \overline{N}^L \end{bmatrix}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский, А. А.** Справочник по теории автоматического управления / под ред. А. А. Красовского. М. : Наука, 1987. 712 с.
2. **Rosenbrock, H. H.** State-space and multivariable theory / H. H. Rosenbrock. N. Y. : Wiley, 1970.
3. **Смагина, Е. М.** Вычисление и задание нулей линейной многомерной системы / Е. М. Смагина // Автоматика и телемеханика. 1987. № 12. С. 165-–173.
4. **Буков, В. Н.** Решение матричных уравнений методом канонизации / В. Н. Буков, В. Н. Рябченко, В. В. Косьянчук, Е. Ю. Зыбин // Вестник Киевск. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. Вып. 1. 2002. С. 19—28.
5. **Воеводин, В. В.** Матрицы вычисления / В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов. М. : Наука. 1984. 320 с.

6. **Асанов, А. З.** Канонизация матриц произвольного размера средствами Matlab / А. З. Асанов, И. З. Ахметзянов // Проектирование научных и инженерных приложений в среде Matlab : тр. II Всерос. научн. конф. М. : ИПУ РАН, 2004. С. 798––804.
7. **Смагина, Е. М.** Нули линейных многомерных систем. Определения, классификация, применение (обзор) / Е. М. Смагина // Автоматика и телемеханика. 1985. № 12. С. 5––33.
8. **MacFarlane, A. G.** Geometric approach to analysis and synthesis of system zeros. Pt 1. Square systems. Pt 2. Non-square systems / A. G. MacFarlane, B. Kouvaritakis // Int. J. Control. 1976. V. 23, № 2. P. 149––181.
9. **Буков, В. Н.** Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем / В. Н. Буков. Калуга : изд-во науч. лит. Н. Ф. Бочкаревой, 2006. 720 с.
10. **Бронников, А. М.** Алгебраические особенности динамических систем в виде делителей нуля их передаточных матриц / А. М. Бронников, В. Н. Буков, Н. Е. Зубов, В. Н. Рябченко // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2004. № 3. С. 28––36.
11. **Асанов, А. З.** Вычисление нулей многосвязных систем средствами MATLAB / А. З. Асанов, Д. Н. Демьянов // Проектирование научных и инженерных приложений в среде Matlab : тр. III Всерос. науч. конф. М. : ИПУ РАН, 2007. С. 926––935.
12. **Красильщиков, М. Н.** Основы теории многосвязных систем автоматического управления летательными аппаратами / под ред. М. Н. Красильщикова. М. : изд-во МАИ, 1995. 288 с.

ОБ АВТОРАХ

Асанов Асхат Замилович, проф. каф. мат. и информ. Казанск. гос. ун-та. Дипл. инж. по радиофиз. и эл-ки (там же, 1972). Д-р техн. наук (УГАТУ, 2004). Иссл. в обл. сист. анализа, теор. упр. сложн. дин., многосвязн. и адаптивн. системами.

Демьянов Дмитрий Николаевич, асс. той же каф. Дипл. инж. по автоматиз. технол. проц. и произв. (Камск. гос. политехн. ин-т, 2004). Иссл. в обл. упр. сложн. динамич. объектами.