

УДК 539.37

ВОЗМОЖНОСТИ МЕТОДА СПЛАЙНОВ И МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧЕ О БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ ТОНКОГО УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

В. П. Павлов¹, В. М. Кудоярова²

¹victor.pavlov.51@yandex.ru, ²kudoyarova@inbox.ru

ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

Поступила в редакцию 17.09.2018

Аннотация. В инженерной практике находят широкое применение гибкие упругие стержни, работающие при больших перемещениях. Для ряда частных случаев известны аналитические решения, но существуют гибкие стержни, для которых точных решений нет. В таких случаях применяются численные методы, и наиболее известный из них – метод конечных элементов. В данной статье разработан новый численный метод, базирующийся на сплайнах степени 2 дефекта 1, позволяющий с высокой точностью решать линейаризованные нелинейные уравнения, описывающие большие перемещения тонкого упругого стержня. Эффективность метода оценивается на тестовой задаче о чистом изгибе тонкого упругого стержня, и показывается, что при достаточно густой сетке узлов метод обеспечивает точность расчетов с относительной погрешностью, не превышающей $1 \cdot 10^{-6}$.

Ключевые слова: сплайны; математическое моделирование; численные методы; большие перемещения; деформация стержня.

ВВЕДЕНИЕ

В технике много конструкций, в которых стержень или тонкая полоска сильно изгибаются при работе материала в пределах упругости. Примерами могут служить [1, 2] различного рода плоские и ленточные пружины, гибкие упругие связи, механические датчики нелинейных зависимостей и др. Подобные задачи имеют место и при создании космических объектов. В связи с этим весьма актуальной является задача определения больших перемещений при изгибе, когда в процессе изгиба тонкой детали сильно изменяется ее первоначальная конфигурация и наблюдается существенная нелинейная зависимость больших перемещений от внешних сил, хотя деформации остаются малыми и материал работает

упруго. Задачи такого вида не могут быть изучены даже качественно с помощью обычной линейной теории изгиба.

Интерес к подобным задачам существует давно, и на первом этапе их решения записывались нелинейные дифференциальные уравнения равновесия, которые были решены аналитически только для некоторых частных задач [1–5]. Развитие вычислительной техники позволило применить численные методы, основным из которых в настоящее время является метод конечных элементов (МКЭ), реализованный в пакетах ANSYS, SolidWorks и др. [6–9].

В данной статье развивается метод сплайнов, который на разнообразных задачах показывает более высокую эффективность по сравнению с МКЭ [10–19].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В статье ставится задача разработать новый численный метод расчета деформированного состояния тонких упругих стержней при больших перемещениях и оценить его эффективность при решении тестовой задачи, имеющей точное решение.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ИЗГИБ СТЕРЖНЯ ПРИ БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Форму изогнутой оси бруса, или, как говорят, форму упругой линии можно определить при помощи двух уравнений [3–5]:

$$\chi = \frac{1}{EI_z} M_z, \quad \varepsilon = \frac{1}{EA} N, \quad (1)$$

где $\chi = 1/\rho$ – кривизна изогнутой оси балки; ρ – радиус кривизны изогнутой оси балки; E – модуль упругости материала балки; I_z – осевой момент инерции; A – площадь поперечного сечения стержня; M_z – внутренний изгибающий момент; N – внутренняя продольная сила.

КРИВИЗНА ОСЕВОЙ ЛИНИИ ГИБКОГО СТЕРЖНЯ

Для описания геометрии оси изогнутого стержня применим параметрический способ, т.е. введем вспомогательную переменную p – параметр ($p \in [0, 1]$), через который выразим абсциссы x и ординаты y точек оси в момент времени t :

$$x = x(p, t), \quad y = y(p, t), \quad p \in [0, 1]. \quad (2)$$

В этом случае в начальном состоянии декартовы координаты оси стержня определяются выражениями $x^{(0)} = lp$, $y^{(0)} = 0$, где l – длина оси стержня.

Введем обозначения для первых и вторых частных производных функций $x(p, t)$ и $y(p, t)$ по параметру p :

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial p}, \quad \dot{y} = \frac{\partial y}{\partial p}, \quad \ddot{x} = \frac{\partial^2 x}{\partial p^2}, \quad \ddot{y} = \frac{\partial^2 y}{\partial p^2}. \quad (3)$$

Запишем выражение для вычисления кривизны осевой линии стержня, заданной в параметрической форме [20]:

$$\chi = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}. \quad (4)$$

ПРОДОЛЬНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ОСЕВОЙ ЛИНИИ ГИБКОГО СТЕРЖНЯ

Рассмотрим в момент времени t на осевой линии две близкие точки, идентифицируемые параметрами p и $p' = p + dp$ и определим координаты рассматриваемых точек:

$$\begin{aligned} x &= x(p, t), \\ x' &= x(p + dp, t) = x + \frac{\partial x}{\partial p} dp = x + \dot{x} dp, \\ y &= y(p, t), \\ y' &= y(p + dp, t) = y + \frac{\partial y}{\partial p} dp = y + \dot{y} dp. \end{aligned} \quad (5)$$

Дифференциал длины дуги в произвольный момент времени t определяется выражением [7]:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dp. \quad (6)$$

В начальный момент времени $\tilde{t}_0 = 0$ на прямой оси не нагруженного стержня длина дуги между рассматриваемыми точками:

$$d\tilde{s}_0 = l dp. \quad (7)$$

Определим деформацию ε осевой линии стержня в рассматриваемой точке в момент времени t как функцию двух переменных

$$\varepsilon = \varepsilon(\dot{x}, \dot{y}) = \frac{ds - d\tilde{s}_0}{d\tilde{s}_0} = \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{l} - 1. \quad (8)$$

Вычислим на основе (4) производные:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial \dot{x}} &= \frac{\ddot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} - 3 \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{5/2}} \dot{x} \\ \frac{\partial \chi}{\partial \dot{y}} &= -\frac{\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} - 3 \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{5/2}} \dot{y} \\ \frac{\partial \chi}{\partial \ddot{x}} &= -\frac{\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial \ddot{y}} = \frac{\dot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}. \end{aligned} \right. \quad (9)$$

Вычислим на основе (8) производные:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{l} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial \dot{y}} = \frac{1}{l} \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}. \quad (10)$$

МЕТОД ДИСКРЕТИЗАЦИИ РАСЧЕТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Для однозначного решения нелинейных задач будем рассматривать последовательные состояния деформированной оси стержня. При этом считаем, что в некоторый момент времени t_0 нам известны функции $x_0(p) = x(p, t_0)$, $y_0(p) = y(p, t_0)$ и их частные производные $\dot{x}_0(p)$, $\dot{y}_0(p)$, $\ddot{x}_0(p)$, $\ddot{y}_0(p)$ по параметру p .

Запишем функции $x(p)$, $y(p)$ координат точек оси стержня и их производные $\dot{x}(p)$, $\dot{y}(p)$, $\ddot{x}(p)$, $\ddot{y}(p)$ для достаточно близкого к t_0 момента времени $t = t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \rightarrow 0$ в виде сумм:

$$\begin{cases} x = x_0 + \Delta x, & \dot{x} = \dot{x}_0 + \Delta \dot{x}, & \ddot{x} = \ddot{x}_0 + \Delta \ddot{x}, \\ y = y_0 + \Delta y, & \dot{y} = \dot{y}_0 + \Delta \dot{y}, & \ddot{y} = \ddot{y}_0 + \Delta \ddot{y}. \end{cases} \quad (11)$$

При обозначениях $u = \Delta x$, $v = \Delta y$ соотношения (11) принимают вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + u, \\ \dot{x} = \dot{x}_0 + \frac{du}{dp} = \dot{x}_0 + \dot{u}, \\ \ddot{x} = \ddot{x}_0 + \frac{d^2u}{dp^2} = \ddot{x}_0 + \ddot{u}, \\ y = y_0 + v, \\ \dot{y} = \dot{y}_0 + \frac{dv}{dp} = \dot{y}_0 + \dot{v}, \\ \ddot{y} = \ddot{y}_0 + \frac{d^2v}{dp^2} = \ddot{y}_0 + \ddot{v}. \end{cases} \quad (12)$$

Представим выражение (4) для кривизны стержня с учетом (12) в виде ряда Тейлора с удержанием слагаемых только первого порядка малости:

$$\begin{aligned} \chi &= \chi(\dot{x}_0 + \dot{u}, \dot{y}_0 + \dot{v}, \ddot{x}_0 + \ddot{u}, \ddot{y}_0 + \ddot{v}) = \\ &= \chi_0 + \frac{\partial \chi_0}{\partial \dot{x}} \dot{u} + \frac{\partial \chi_0}{\partial \dot{y}} \dot{v} + \frac{\partial \chi_0}{\partial \ddot{x}} \ddot{u} + \frac{\partial \chi_0}{\partial \ddot{y}} \ddot{v}. \end{aligned} \quad (13)$$

Представим выражение для деформации оси стержня (8) с учетом (12) в виде ряда Тейлора с удержанием слагаемых только первого порядка малости

$$\varepsilon = \varepsilon(\dot{x}_0 + \dot{u}, \dot{y}_0 + \dot{v}) = \varepsilon_0 + \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \dot{x}} \dot{u} + \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \dot{y}} \dot{v}. \quad (14)$$

Коэффициенты, входящие в соотношения (13) и (14) величины с индексами «0» вычисляются по соотношениям (9) и (10) по уже известным на данном этапе функциям $x_0(p) = x(p, t_0)$ и $y_0(p) = y(p, t_0)$.

Подставив (13) и (14) в (1), получаем систему из двух линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \chi_0 + \frac{\partial \chi_0}{\partial \dot{x}} \dot{u} + \frac{\partial \chi_0}{\partial \dot{y}} \dot{v} + \frac{\partial \chi_0}{\partial \ddot{x}} \ddot{u} + \frac{\partial \chi_0}{\partial \ddot{y}} \ddot{v} = \\ = \frac{1}{EI} M_z, \\ \varepsilon_0 + \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \dot{x}} \dot{u} + \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \dot{y}} \dot{v} = \frac{1}{EA} N, \end{cases} \quad (15)$$

из решения которой находим функции $u = u(p)$, $v = v(p)$, на основе которых по соотношениям (12) определим функции $x = x(p)$ и $y = y(p)$ в момент времени t .

Поступая подобным образом в последовательные моменты времени мы можем найти все последовательные состояния стержня при любых больших перемещениях, но для этого необходим эффективный численный метод решения системы дифференциальных уравнений (15).

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ СПЛАЙНОВ СТЕПЕНИ 2 ДЕФЕКТА 1

Для решения построенной системы дифференциальных уравнений применим метод сплайнов степени 2 дефекта 1, близкий по свойствам к сплайнам третьей и пятой степеней, эффективно применяющихся в работах [10–19].

При построении сплайна степени 5 дефекта 1 [15] на отрезке $[0, 1]$ формируется сетка $\Delta: 0 = p_1 < p_2 < \dots < p_N = 1$, имеющая N узлов. На данной сетке строится сплайн-функция $W_{2,1}(p)$ степени 2 дефекта 1, имеющая $N_s = N + 1$ степеней свободы.

В пределах каждого отрезка $[p_i, p_{i+1}]$, $i = 1, N - 1$ сплайн-функция $W_{2,1}(x)$ является многочленом пятой степени

$$\mathbf{W}_{2,1}(p) = \sum_{\alpha=0}^2 a_{\alpha}^{(i)} (p - p_i)^{\alpha}, \quad (16)$$

$$p \in [p_i, p_{i+1}], \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Согласно [15] параметры, определяющие сплайн, сведены в вектор-столбец \mathbf{Q} из $N_s = N + 1$ параметров сплайна $\mathbf{Q} = (q_k, k = \overline{1, N+1})^T$, где:

$$\begin{cases} q_1 = \mathbf{W}_{2,1}(p_1), \\ q_{i+1} = \frac{d\mathbf{W}_{2,1}(p_i)}{dx}, \quad i = \overline{1, N-1}. \end{cases} \quad (17)$$

В узлах сетки Δ рассматриваются значения сплайн-функции $\mathbf{W}_{2,1}(p)$ и ее производных до второго порядка включительно:

$$\begin{cases} f_i^{(0)} = \mathbf{W}_{2,1}(p_i), \\ f_i^{(1)} = d\mathbf{W}_{2,1}(p_i) / dp, \\ f_i^{(2)} = d^2\mathbf{W}_{2,1}(p_i) / dp^2, \\ i = \overline{1, N-1}. \end{cases} \quad (18)$$

Из них формируются векторы-столбцы:

$$\mathbf{V}_{dsf} = (f_i^{(s)}, i = \overline{1, N})^T, \quad s = 0, 1, 2. \quad (19)$$

Векторы узловых значений сплайн-функции $\mathbf{W}_{2,1}(p)$ и ее производных определим согласно [15] матричными выражениями:

$$\mathbf{V}_{dsf} = \mathbf{M}_{dsf} \mathbf{Q}, \quad s = 0, 1, 2, \quad (20)$$

где \mathbf{M}_{dsf} , $s = 0, 1, 2$ – прямоугольные матрицы размера $N \times (N+1)$, формируемые по методике, изложенной в [15].

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ НА ОСНОВЕ СПЛАЙНА СТЕПЕНИ 2 ДЕФЕКТА 1

Для численного решения системы уравнений (15) введем для каждой из функций $u = u(p)$ и $v = v(p)$ соответствующие им два сплайна: $\mathbf{W}_{2,1}^{(u)}(p)$ и $\mathbf{W}_{2,1}^{(v)}(p)$, определяемые соответствующими им векторами параметров \mathbf{Q}_u и \mathbf{Q}_v с компонентами вида (17).

Значения искомых функций $u = u(p)$, $v = v(p)$ и их производных в узлах сплайна p_i , $i = \overline{1, N}$ сведем в векторы

$$\begin{cases} \mathbf{U}_s = (\frac{d^s u(p_i)}{dp^s}, i = \overline{1, N})^T, \\ \mathbf{V}_s = (\frac{d^s v(p_i)}{dp^s}, i = \overline{1, N})^T, \quad s = 0, 1, 2, \end{cases} \quad (21)$$

которые определим с учетом (20) матричными соотношениями:

$$\begin{cases} \mathbf{U}_0 = \mathbf{M}_{d0f} \mathbf{Q}_u, \quad \mathbf{U}_1 = \mathbf{M}_{d1f} \mathbf{Q}_u, \\ \mathbf{U}_2 = \mathbf{M}_{d2f} \mathbf{Q}_u, \quad \mathbf{V}_0 = \mathbf{M}_{d0f} \mathbf{Q}_v, \\ \mathbf{V}_1 = \mathbf{M}_{d1f} \mathbf{Q}_v, \quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{M}_{d2f} \mathbf{Q}_v. \end{cases} \quad (22)$$

Введем в рассмотрение матрицы коэффициентов в уравнениях системы (15):

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{\partial\chi\partial dx} = (M_{k,n}^{\partial\chi\partial dx}, k = \overline{1, N}, n = \overline{1, N}), \\ \mathbf{M}_{\partial\chi\partial d 2x} = (M_{k,n}^{\partial\chi\partial d 2x}, k = \overline{1, N}, n = \overline{1, N}), \\ \mathbf{M}_{\partial\chi\partial dy} = (M_{k,n}^{\partial\chi\partial dy}, k = \overline{1, N}, n = \overline{1, N}), \\ \mathbf{M}_{\partial\chi\partial d 2y} = (M_{k,n}^{\partial\chi\partial d 2y}, k = \overline{1, N}, n = \overline{1, N}), \\ \mathbf{M}_{\partial\varepsilon\partial dx} = (M_{k,n}^{\partial\varepsilon\partial dx}, k = \overline{1, N}, n = \overline{1, N}), \\ \mathbf{M}_{\partial\varepsilon\partial dy} = (M_{k,n}^{\partial\varepsilon\partial dy}, k = \overline{1, N}, n = \overline{1, N}), \end{cases} \quad (23)$$

Все компоненты матриц (23) являются нулевыми за исключением расположенных на главных диагоналях:

$$\begin{cases} M_{k,k}^{\partial\chi\partial dx} = \frac{\partial\chi_0(p_k)}{\partial\dot{x}}, \quad M_{k,k}^{\partial\chi\partial d 2x} = \frac{\partial\chi_0(p_k)}{\partial\ddot{x}}, \\ M_{k,k}^{\partial\chi\partial dy} = \frac{\partial\chi_0(p_k)}{\partial\dot{y}}, \quad M_{k,k}^{\partial\chi\partial d 2y} = \frac{\partial\chi_0(p_k)}{\partial\ddot{y}}, \\ M_{k,k}^{\partial\varepsilon\partial dx} = \frac{\partial\varepsilon(p_k)}{\partial\dot{x}}, \quad M_{k,k}^{\partial\varepsilon\partial dy} = \frac{\partial\varepsilon(p_k)}{\partial\dot{y}}. \end{cases} \quad (24)$$

Введем также векторы из числовых величин, имеющих место в системе уравнений (15).

$$\begin{cases} \mathbf{V}_{\chi} = (\frac{1}{EI_z} M_z(p_k) - \chi_0(p_k), k = \overline{1, N})^T, \\ \mathbf{V}_{\varepsilon} = (\frac{1}{EA} N(p_k) - \varepsilon_0(p_k), k = \overline{1, N})^T, \end{cases} \quad (25)$$

На основе (21), (23)–(25) запишем дискретный аналог системы дифференциальных уравнений (15):

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{\partial\chi\partial dx} \mathbf{U}_1 + \mathbf{M}_{\partial\chi\partial dy} \mathbf{V}_1 + \\ + \mathbf{M}_{\partial\chi\partial d 2x} \mathbf{U}_2 + \mathbf{M}_{\partial\chi\partial d 2y} \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_{\chi}, \\ \mathbf{M}_{\partial\varepsilon\partial dx} \mathbf{U}_1 + \mathbf{M}_{\partial\varepsilon\partial dy} \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{\varepsilon}, \end{cases} \quad (26)$$

или с учетом (22):

$$\begin{cases} (M_{\partial\chi\partial dx} M_{d1f} + M_{\partial\chi\partial d2x} M_{d2f}) Q_u + \\ + (M_{\partial\chi\partial dy} M_{d1f} + M_{\partial\chi\partial d2y} M_{d2f}) Q_v = V_\chi, \\ M_{\partial\varepsilon\partial dx} M_{d1f} Q_u + M_{\partial\varepsilon\partial dy} M_{d1f} Q_v = V_\varepsilon. \end{cases} \quad (27)$$

Исключим из (27) последнее уравнение из первой группы уравнений, учитывающих изгибающий момент M_ε , и в итоге получим систему линейных алгебраических уравнений из $2N-1$ уравнений с $2N+2$ неизвестными. Затем добавим к ним недостающие 3 уравнения граничных условий, учитывающие защемление на левом конце стержня. В итоге получим систему из $2N+2$ уравнений, из которой определяем векторы Q_u и Q_v .

Далее в рассматриваемых узлах p_k , $k = \overline{1, N}$ по формулам (22) вычисляем значения u , du/dp , d^2u/dp^2 , v , dv/dp , d^2v/dp^2 , которые подставляем в выражения (12), и в итоге находим значения x , dx/dp , d^2x/dp^2 , y , dy/dp , d^2y/dp^2 для момента времени t . Затем по изложенной выше схеме переходим к следующему расчетному моменту времени с другими значениями внутренних изгибающего момента M_ε и продольной силы N .

В итоге мы получаем параметры оси деформированного стержня в течение всего процесса нагружения, что очень важно при анализе деформации реальных конструкций.

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СПЛАЙН СТЕПЕНИ 3 ДЕФЕКТА 1 И ЕГО ПРОИЗВОДНЫЕ

В методике расчета 2 для решения системы дифференциальных уравнений (15) применим метод сплайнов степени 3 дефекта 1.

При построении сплайна степени 3 дефекта 1 [15] на отрезке $[0, 1]$ формируется сетка $\Delta: 0 = p_1 < p_2 < \dots < p_N = 1$, имеющая N узлов. На данной сетке строится сплайн-функция $W_{3,1}(p)$ степени 3 дефекта 1, имеющая $N_s = N + 2$ степеней свободы.

В пределах каждого отрезка $[p_i, p_{i+1}]$, $i = \overline{1, N-1}$ сплайн-функция $W_{3,1}(x)$ является многочленом третьей степени

$$W_{3,1}(p) = \sum_{\alpha=0}^3 a_\alpha^{(i)} (p - p_i)^\alpha, \quad (28)$$

$$p \in [p_i, p_{i+1}], \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Согласно [12] параметры, определяющие сплайн, сведены в вектор-столбец Q из $N_s = N + 2$ параметров сплайна $Q = (q_k, k = \overline{1, N+2})^T$, где:

$$\begin{cases} q_1 = W_{3,1}(p_1), \quad q_2 = \frac{dW_{3,1}(p_1)}{dp} p \\ q_{i+2} = \frac{d^2W_{3,1}(p_i)}{dp^2}, \quad i = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (29)$$

В узлах сетки Δ рассматриваются значения сплайн-функции $W_{3,1}(p)$ и ее производных до третьего порядка включительно:

$$\begin{cases} f_i^{(0)} = W_{3,1}(p_i), \quad f_i^{(1)} = \frac{dW_{3,1}(p_i)}{dp}, \\ f_i^{(2)} = \frac{d^2W_{3,1}(p_i)}{dp^2}, \quad f_i^{(3)} = \frac{d^3W_{3,1}(p_i)}{dp^3}, \\ i = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (30)$$

Из них формируются векторы-столбцы:

$$V_{dsf} = (f_i^{(s)}, i = \overline{1, N})^T, \quad s = 0, 1, 2, 3, \quad (31)$$

Векторы узловых значений сплайн-функции $W_{3,1}(p)$ и ее производных определим согласно [15] матричными выражениями:

$$V_{dsf} = M_{dsf} Q, \quad s = 0, 1, 2, \quad (32)$$

где M_{dsf} , $s = 0, 1, 2, 3$ – прямоугольные матрицы размера $N \times (N+1)$, формируемые по методике, изложенной в [15].

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ НА ОСНОВЕ СПЛАЙНА СТЕПЕНИ 3 ДЕФЕКТА 1

Для численного решения системы уравнений (15) введем для каждой из функций $u = u(p)$ и $v = v(p)$ соответствующие им два сплайна: $W_{3,1}^{(u)}(p)$ и $W_{3,1}^{(v)}(p)$, определяемые соответствующими им векторами параметров Q_u и Q_v с компонентами вида (29).

Значения искомых функций $u = u(p)$, $v = v(p)$ и их производных в узлах сплайна p_i , $i = \overline{1, N}$ сведем в векторы

$$\begin{cases} \mathbf{U}_s = \left(\frac{d^s u(p_i)}{dp^s}, i = \overline{1, N} \right)^T, \\ \mathbf{V}_s = \left(\frac{d^s v(p_i)}{dp^s}, i = \overline{1, N} \right)^T, \quad s = 0, 1, 2, \end{cases} \quad (33)$$

которые определим с учетом (32) матричными соотношениями:

$$\begin{cases} \mathbf{U}_0 = \mathbf{M}_{dof} \mathbf{Q}_u, \quad \mathbf{U}_1 = \mathbf{M}_{dlf} \mathbf{Q}_u, \\ \mathbf{U}_2 = \mathbf{M}_{d2f} \mathbf{Q}_u, \quad \mathbf{V}_0 = \mathbf{M}_{dof} \mathbf{Q}_v, \\ \mathbf{V}_1 = \mathbf{M}_{dlf} \mathbf{Q}_v, \quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{M}_{d2f} \mathbf{Q}_v. \end{cases} \quad (34)$$

Введем в рассмотрение матрицы коэффициентов в уравнениях системы (15):

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{\partial\chi\partial dx} = (M_{k,n}^{\partial\chi\partial dx}, k = \overline{1, N}, n = \overline{1, N}), \\ \mathbf{M}_{\partial\chi\partial d2x} = (M_{k,n}^{\partial\chi\partial d2x}, k = \overline{1, N}, n = \overline{1, N}), \\ \mathbf{M}_{\partial\chi\partial dy} = (M_{k,n}^{\partial\chi\partial dy}, k = \overline{1, N}, n = \overline{1, N}), \\ \mathbf{M}_{\partial\chi\partial d2y} = (M_{k,n}^{\partial\chi\partial d2y}, k = \overline{1, N}, n = \overline{1, N}), \\ \mathbf{M}_{\partial\varepsilon\partial dx} = (M_{k,n}^{\partial\varepsilon\partial dx}, k = \overline{1, N}, n = \overline{1, N}), \\ \mathbf{M}_{\partial\varepsilon\partial dy} = (M_{k,n}^{\partial\varepsilon\partial dy}, k = \overline{1, N}, n = \overline{1, N}), \end{cases} \quad (35)$$

Все компоненты матриц (35) являются нулевыми за исключением расположенных на главных диагоналях:

$$\begin{cases} M_{k,k}^{\partial\chi\partial dx} = \frac{\partial\chi_0(p_k)}{\partial\dot{x}}, \quad M_{k,k}^{\partial\chi\partial d2x} = \frac{\partial\chi_0(p_k)}{\partial\ddot{x}}, \\ M_{k,k}^{\partial\chi\partial dy} = \frac{\partial\chi_0(p_k)}{\partial\dot{y}}, \quad M_{k,k}^{\partial\chi\partial d2y} = \frac{\partial\chi_0(p_k)}{\partial\ddot{y}}, \\ M_{k,k}^{\partial\varepsilon\partial dx} = \frac{\partial\varepsilon(p_k)}{\partial\dot{x}}, \quad M_{k,k}^{\partial\varepsilon\partial dy} = \frac{\partial\varepsilon(p_k)}{\partial\dot{y}}. \end{cases} \quad (36)$$

Введем также векторы из числовых величин, имеющих место в системе уравнений (15).

$$\begin{cases} \mathbf{V}_\chi = \left(\frac{1}{EI_z} M_z(p_k) - \chi_0(p_k), k = \overline{1, N} \right)^T, \\ \mathbf{V}_\varepsilon = \left(\frac{1}{EA} N(p_k) - \varepsilon_0(p_k), k = \overline{1, N} \right)^T, \end{cases} \quad (37)$$

На основе (33)–(37) запишем дискретный аналог системы дифференциальных уравнений (15):

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{\partial\chi\partial dx} \mathbf{U}_1 + \mathbf{M}_{\partial\chi\partial dy} \mathbf{V}_1 + \\ + \mathbf{M}_{\partial\chi\partial d2x} \mathbf{U}_2 + \mathbf{M}_{\partial\chi\partial d2y} \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_\chi, \\ \mathbf{M}_{\partial\varepsilon\partial dx} \mathbf{U}_1 + \mathbf{M}_{\partial\varepsilon\partial dy} \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_\varepsilon, \end{cases} \quad (38)$$

или с учетом (34):

$$\begin{cases} (\mathbf{M}_{\partial\chi\partial dx} \mathbf{M}_{d1f} + \mathbf{M}_{\partial\chi\partial d2x} \mathbf{M}_{d2f}) \mathbf{Q}_u + \\ + (\mathbf{M}_{\partial\chi\partial dy} \mathbf{M}_{d1f} + \mathbf{M}_{\partial\chi\partial d2y} \mathbf{M}_{d2f}) \mathbf{Q}_v = \mathbf{V}_\chi, \\ \mathbf{M}_{\partial\varepsilon\partial dx} \mathbf{M}_{d1f} \mathbf{Q}_u + \mathbf{M}_{\partial\varepsilon\partial dy} \mathbf{M}_{d1f} \mathbf{Q}_v = \mathbf{V}_\varepsilon. \end{cases} \quad (39)$$

В итоге получим систему линейных алгебраических уравнений из $2N$ уравнений с $2N + 4$ неизвестными. Затем добавим к ним недостающие 4 уравнения граничных условий, учитывающие заземление на левом конце стержня. Окончательно получим систему, имеющую $2N + 4$ уравнений, из которой определяем векторы \mathbf{Q}_u и \mathbf{Q}_v .

Далее в рассматриваемых узлах p_k , $k = \overline{1, N}$ по формулам (34) вычисляем значения u , du/dp , d^2u/dp^2 , v , dv/dp , d^2v/dp^2 , которые подставляем в выражения (12), и в итоге находим значения x , dx/dp , d^2x/dp^2 , y , dy/dp , d^2y/dp^2 для момента времени t . Затем по изложенной выше схеме переходим к следующему расчетному моменту времени с другими значениями внутренних изгибающего момента M_z и продольной силы N .

В итоге мы получаем параметры оси деформированного стержня в течение всего процесса нагружения, что очень важно при анализе деформации реальных конструкций.

ЭТАЛОННАЯ ЗАДАЧА, ИМЕЮЩАЯ ТОЧНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Для оценки точности разработанного численного метода решения задач о деформировании стержней при больших перемещениях рассматривается первоначально прямой стержень BC длиной $l = 0,3$ м, заземленный на левом конце и нагруженный на правом конце парой сил с моментом M (рис. 1). Стержень имеет прямоугольное поперечное сечение шириной $b = 6$ мм и высотой $h = 1$ мм (рис. 1), модуль упругости материала стержня $E = 1 \cdot 10^{11}$ Па.

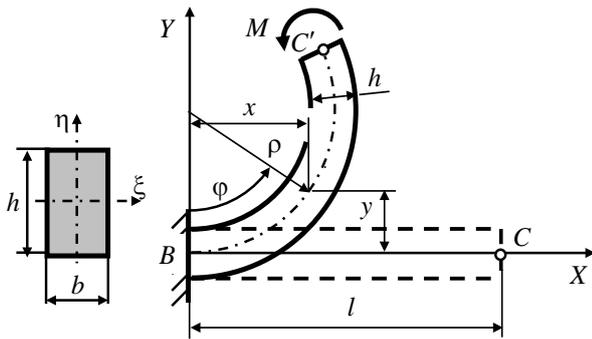


Рис. 1. Закрепленный стержень нагруженный парой сил

При изгибе стержня парой сил с изменяющимся во времени t моментом $M = M(t)$ имеет место равенство $M_z = M$, и согласно (1) ось стержня изогнется по дуге окружности BC' постоянной кривизны с изменяющимся во времени радиусом $\rho = \rho(t)$. При этом точки оси стержня будут иметь координаты (рис. 1).

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi = \rho \sin \left(\frac{l}{\rho} p \right), \\ y = \rho - \rho \cos \phi = \rho - \rho \cos \left(\frac{l}{\rho} p \right). \end{cases} \quad (40)$$

Принимая для конечного значения времени t_N ось стержня в форме дуги окружности, получаем угол ϕ в конечном состоянии равным $\phi_N = 2\pi$ и вычисляем радиус кривизны стержня ρ_N в конечном состоянии:

$$\rho_N = l / (2\pi). \quad (41)$$

Учитывая, что при чистом изгибе $M_z = M$, на основе (1) и (41) рассчитаем величину момента M в конечном состоянии для конкретно рассматриваемого стержня:

$$\begin{aligned} M_N = M_{\max} &= EI_z / \rho_N = \\ &= 2EI_z \pi / l = 2E \frac{bh^3}{12} \pi / l. \end{aligned} \quad (42)$$

Рассмотрим стержень в одиннадцати деформированных состояниях при изгибающих моментах

$$M_k = k \cdot M_{\max} / 10, \quad k = 0, 1, \dots, 10 \quad (43)$$

Точные изображения изогнутой оси стержня при различных значениях k показаны сплошными линиями на рис. 2. Точками на рис. 2 показаны расчетные положения точек оси стержня, вычисленные на основе метода сплайнов степени 2. Видно, что визуально они идеально совпадают с точными положениями.

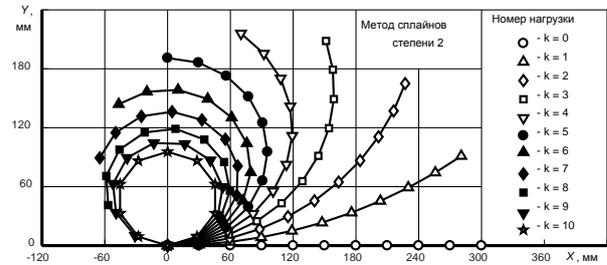


Рис. 2. Изогнутая ось стержня при различных значениях k

ЧИСЛОВЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

В результате численных расчетов методом сплайнов и методом конечных элементов определяются координаты $x_n^{(m)}, y_n^{(m)}$ точек осевой линии стержня в узлах $p_n, n = \overline{1, N}$ сетки Δ_p для всех расчетных моментов времени $t_m, m = \overline{1, M}$.

Зная точные и расчетные координаты точек осевой линии стержня, вычислим расстояния Δ_n^m между точными и расчетными положениями рассматриваемых точек

$$\Delta_n^m = \sqrt{(x_n^{T,m} - x_n^m)^2 + (y_n^{T,m} - y_n^m)^2} \quad (44)$$

и по их величине оценим погрешность численного метода.

Оценка 1, учитывающая влияние числа узлов M временной сетки на погрешности расчетов.

Рассматривая результаты расчетов при различных значениях параметров N и M , вычислим десятичные логарифмы от максимальных абсолютных величин нормированных расстояний между точками точного и численного решений:

$$\lg \left| \frac{\Delta}{l} \right| = \log_{10} \left(\max_{m=1, M; n=1, N} \left| \frac{\Delta_n^m}{l} \right| \right), \quad (45)$$

где l – длина стержня.

Результаты расчетов величины $\lg \left| \frac{\Delta}{l} \right|$

для метода сплайнов степени 2 представлены на рис. 3.

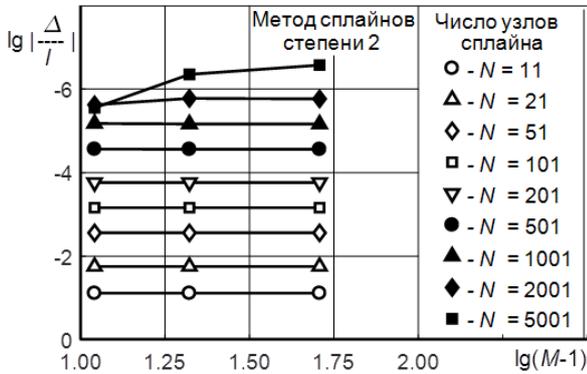


Рис. 3. Результаты расчетов для метода сплайнов степени 2

Результаты расчетов величины $\lg \left| \frac{\Delta}{l} \right|$

для метода сплайнов степени 3 представлены на рис. 4.

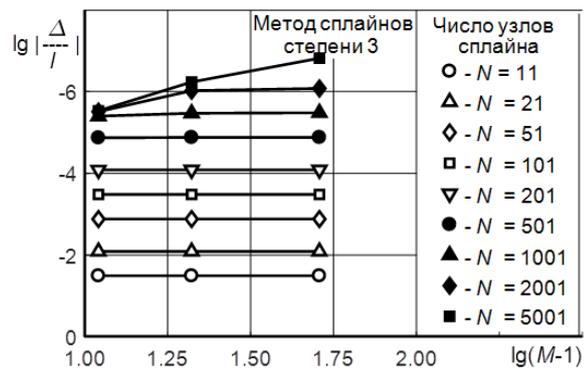


Рис. 4. Результаты расчетов для метода сплайнов степени 3

Анализ рис. 3 и рис. 4 показывает, что для сплайна степени 3 ошибки расчетов несколько меньше чем для сплайна степени 2, но различие между результатами весьма малы. Также из рис. 3 и рис. 4 видно, что при числе узлов пространственной сетки $N \leq 2001$ нет особого смысла увеличивать количество M узлов временной сетки свыше 21, так как при $M = 21$ и $M = 51$ погрешности расчетов практически одинаковы.

Оценка 2, учитывающая влияние числа узлов N пространственной сетки на погрешности расчетов.

Для оценки влияния числа узлов N пространственной сетки рассмотрим результаты расчетов перемещений концевой точки стержня при $p = 1$, определяемых при различных значениях параметров N для изгибающих моментов M_k , вычисляемых по формуле (43). Погрешность расчетов оценим десятичными логарифмами от абсолютных величин нормированных расстояний между точками точного и численного решений $\lg \left| \frac{\Delta_N^k}{l} \right|$.

Графики зависимостей $\lg \left| \frac{\Delta_N^k}{l} \right|$ от N

при фиксированных значениях k для сплайна степени 2 представлены на рис. 5, а для сплайна степени 3 – на рис. 6.

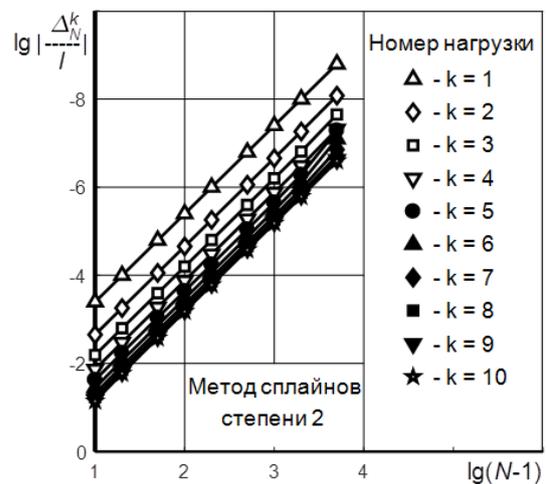


Рис. 5. Результаты расчетов для метода сплайнов степени 2

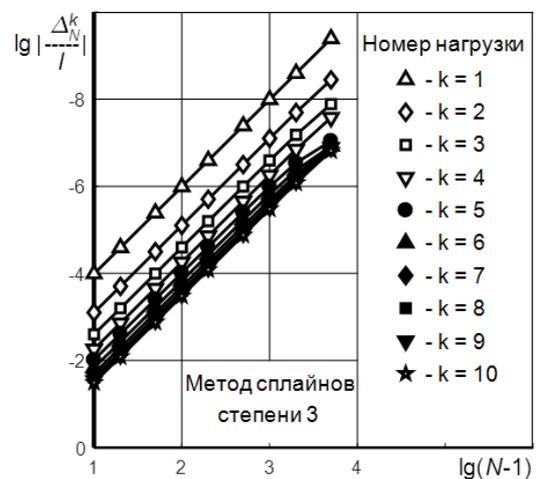


Рис. 6. Результаты расчетов для метода сплайнов степени 3

Из рис. 5 и рис. 6 следует, что для сплайна степени 3 ошибки расчетов несколько меньше чем для сплайна степени 2, но различие между результатами весьма незначительны. В обоих случаях наблюдается сходимость второго порядка.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ МЕТОДОМ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА СРЕДСТВАМИ ПАКЕТА ANSYS

При расчете защемленного стержня, нагруженного парой сил с моментом M в пакете конечно-элементного анализа ANSYS, использовался трехмерный линейный балочный элемент Beam188, позволяющий решать нелинейные задачи с большими поворотами и большими деформациями.

Данный элемент предназначен для моделирования прямых балочных конструкций, имеющих умеренное соотношение длины и толщины. Элемент Beam188 построен на основе балки Тимошенко и имеет 2 узла с шестью степенями свободы в каждом узле.

При моделировании в ANSYS данной задачи для выбранного элемента использовалась опция, где в качестве признака схемы интерполяции задавались линейные формы перемещений.

Расчеты проводились при количестве узлов $N=11, 21, 51, 101, 201, 501, 1001, 2001, 5001$ и одиннадцати деформированных состояниях при изгибающих моментах $M_k = k \cdot M_{\max} / 10$ при $k=0, 1, \dots, 10$ для прямоугольного сечения стержня шириной $b=6$ мм и высотой $h=1$ мм, где момент M_{\max} в конечном состоянии для конкретно рассматриваемого стержня рассчитывался согласно (42).

Здесь необходимо изложить методику и особенности расчета в пакете ANSYS.

Графики зависимостей $\lg \left| \frac{\Delta_N^k}{l} \right|$ от N при фиксированных значениях k для метода конечных элементов (МКЭ), реализованного в пакете ANSYS, представлены на рис. 7.

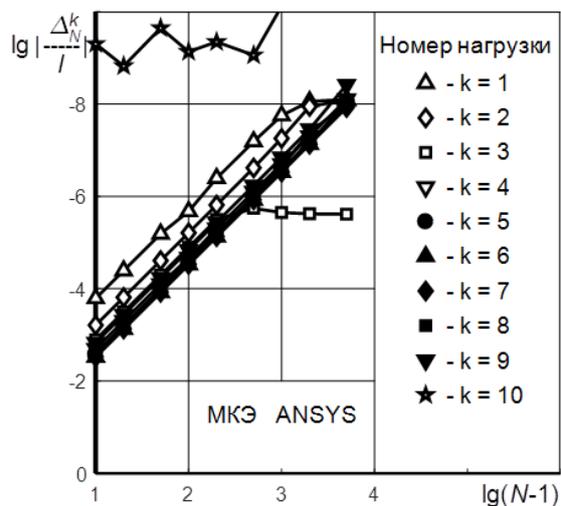


Рис. 7. Результаты расчетов для метода сплайнов и метода конечных элементов, реализованного в пакете ANSYS

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Сопоставляя результаты расчетов методами сплайнов (рис. 5 и 6) и методом конечных элементов в реализации ANSYS, видим, что порядки сходимости во всех трех случаях одинаковы и равны двум.

В основном МКЭ демонстрирует меньшую погрешность, но есть некоторая нестабильность результатов, заключающаяся, например при $k=3$ (рис. 7), где при $N \geq 501$ прекращается снижение погрешности с ростом N . Для метода сплайнов таких нестабильностей не наблюдается (рис. 5, 6).

Для реализованного метода сплайнов степени 2 и степени 3 на основе рис. 5 и 6 можно утверждать, что при всех значениях изгибающего момента M_k погрешность расчетов монотонно убывает со вторым порядком сходимости [15] и при числе узлов $N = 5001$ относительная погрешность расчетов не превышает величины $1 \cdot 10^{-6}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработана методика построения дискретного аналога нелинейных уравнений, описывающих деформирование тонкого упругого стержня при больших перемещениях.

2. Предложены и реализованы численные методы сплайнов второй и третьей степеней дефекта 1 для решения линеаризованных нелинейных уравнений, описывающих деформирование стержня при больших перемещениях.

3. Методы сплайнов апробированы на решении тестовой задачи о чистом изгибе при больших перемещениях, и показано, что при реальных расчетах он обеспечивает точность с относительной погрешностью не выше $1 \cdot 10^{-6}$, что вполне достаточно для практических расчетов многих конструкций.

4. Тестовая задача о чистом изгибе стержня решена методом конечных элементов в пакете ANSYS, и оценена точность данного метода при различных параметрах пространственной сетки.

5. Проведено сопоставление погрешностей расчета методом сплайнов и методом конечного элемента. Выяснено, что в целом оба метода дают достаточно близкие по точности результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Попов Е. П.** Нелинейные задачи статики тонких стержней. М.: Гостехиздат, 1948. 170 с. [Е. П. Попов, *Non-linear problems of the thin rods statics*, (in Russian). Moscow: Gostekhizdat, 1948.]
2. **Попов Е. П.** Теория и расчет гибких стержней. М.: Наука, 1986. 296 с. [Е. П. Попов, *Theory and calculation of flexible rods*, (in Russian). Moscow: Nauka, 1986.]
3. **Феодосьев В. И.** Сопротивление материалов. М.: Наука, 1979. 560 с. [В. И. Feodos'ev, *Strength of materials*, (in Russian). Moscow: Nauka, 1979.]
4. **Тимошенко С. П., Гере Дж.** Механика материалов. СПб.: Лань, 2002. 672 с. [Stephen P. Timoshenko, James M. Gere, *Mechanics of materials*, (in Russian). St. Petersburg: Lan, 2002.]
5. **Stephen P. Timoshenko, James M. Gere** Theory of elastic stability. New York: McGraw-Hill, 1961. 541 с.
6. **Кудоярова В. М., Кишалов А. Е.** Решение прикладных задач теплообмена и гидрогазодинамики в пакете ANSYS [Электронный ресурс]. URL: http://e-library.ufa-rb.ru/dl/lib_net_r/Kudoyarova_Resh_prik_zadach_tep_l_i_gidgaz_v_pak_ANSYS_2016.pdf (дата обращения 09.12.2016). [V. M. Kudoyarova, A. E. Kishalov (2016, Dec. 09). *Solution of applied heat transfer and gas dynamics problems in ANSYS* [Online]. Available: http://e-library.ufa-rb.ru/dl/lib_net_r/Kudoyarova_Resh_prik_zadach_tep_l_i_gidgaz_v_pak_ANSYS_2016.pdf]
7. **Басов К. А.** CATIA и ANSYS. Твердотельное моделирование. М.: ДМК-Пресс, 2011. 240 с. [К. А. Basov, *CATIA and ANSYS. Solid state simulation*, (in Russian). Moscow: DMK Press, 2011.]
8. **Каплун А. Б., Морозов Е. М., Олферьева М. А.** ANSYS в руках инженера. М.: УПСС, 2003. 269 с. [А. В. Kaplun, E. M. Morozov, M. A. Olfer'eva., *ANSYS in the engineer's hands*, (in Russian). Moscow: URSS, 2003.]
9. **Басов К. А.** Графический интерфейс комплекса ANSYS. Саратов.: Профобразование, 2017. 239 с. [К. А. Basov, *Graphic interface of ANSYS*, (in Russian). Saratov: Profobrazovanie, 2017.]
10. **Павлов В. П.** Анализ спектра частот собственных колебаний стержня методом сплайнов // Вестник УГАТУ. 2016. Т. 20, № 4(74). С. 16–22. [V. P. Pavlov, "Analysis of the spectrum of frequencies of own fluctuations of a rod by the method of splines," (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 20, no. 4(74). pp. 16-22, 2016.]
11. **Павлов В. П.** Поперечные колебания стержня с переменным поперечным сечением и вычисление его собственных частот методом сплайнов // Вестник УГАТУ. 2017. Т. 21, № 2(76). С. 3–16. [V. P. Pavlov, "Transverse vibrations of a rod with variable cross sections and calculation of its eigenfrequencies by the method of spline," (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 21, no. 2(76), pp. 3-16, 2017.]
12. **Zhernakov V. S., Pavlov V. P., Kudoyarova V. M.** The Enhanced Spline-Method for Numerical Results of Natural Frequencies of Beams // Procedia Engineering, 2017, vol. 176. P. 438–450.
13. **Павлов В. П.** Метод сплайнов в расчетах стержней на устойчивость // Вестник УГАТУ. 2016. Т. 20, № 4 (74). С. 45–53. [V. P. Pavlov, "The method of splines in the calculation of the studs for stability," (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 20, no. 4(74), pp. 45-53, 2016.]
14. **Kudoyarova V. M., Pavlov V. P.** The Spline Method for the Solution of the Transient Heat Conduction Problem with Nonlinear Initial and Boundary Conditions for a Plate // Procedia Engineering. 2016. Vol. 150. P. 1419–1426.
15. **Павлов В. П.** Метод сплайнов и другие численные методы решения одномерных задач механики деформируемых твердых тел. Уфа: Уфимск. Гос. Авиац. техн. ун-т Уфа. 2003. 197 с. [V. P. Pavlov, *Spline-methods and other numerical methods for solving one-dimensional problems of deformable solids mechanics* (in Russian). Ufa: UGATU, 2003.]
16. **Абдрахманова А. А., Павлов В. П.** Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния стеклопластикового стержня при различных жесткостях опор // Вестник УГАТУ. 2007. Т. 9, № 5(23). С. 87–92. [А. А. Abdrakhmanova, V. P. Pavlov, "Mathematical modeling of the stress-strain state of glass-plastic beam with different stiffnesses of supports," (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 9, no. 5(23), pp. 87-92, 2007.]
17. **Павлов В. П., Абдрахманова А. А., Абдрахманова Р. П.** Задача расчета стержней одномерным сплайном пятой степени дефекта два // Математические заметки ЯГУ. 2013. Т. 20, вып.1. С. 50–59. [V. P. Pavlov, A. A. Abdrakhmanova, R. P. Abdrakhmanova, "The problem of calculating beams by one-dimensional spline fifth degree of the defect two," (in Russian), in *Matematicheskie zametki JaGU*, vol. 20, no. 1, pp. 50-59, 2013.]
18. **Zhernakov V. S., Pavlov V. P., Kudoyarova V. M.** The Spline-Method for Numerical Calculation of the Natural-Vibration Frequency of a Beam with Variable Cross-Section // Procedia Engineering. 2017. Vol. 206. P. 710–715.
19. **Pavlov V. P., Kudoyarova V. M.,** Numerical Method Based on Spline for Solution Heat Conduction Nonlinear Problems // Procedia Engineering. 2017. Vol. 206. P. 704–709.

20. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики. М.: Гос. из-во техн. теор. лит-ры, 1956. 480 с. [V. I. Smirnov, *Course of Higher Mathematics*, (in Russian). Moscow: Gos. iz-vo tekhn. teor. lit-ry, 1956.]

ОБ АВТОРАХ

ПАВЛОВ Виктор Павлович, проф. каф. сопротивления материалов. Дипл. инж. по авиац. двигателям (УАИ, 1973). Д-р техн. наук по динамике и прочности (УГАТУ, 2005). Иссл. в обл. динамики и прочности конструкций из композиционных материалов.

КУДОЯРОВА Вилина Маратовна, доц. каф. авиационной теплотехники и теплоэнергетики. Дипл. инж. по авиационной и ракетно-космической теплотехнике (УГАТУ, 2001). Канд. техн. наук по математическому моделированию, численным методам и комплексам программ (УГАТУ, 2005). Иссл. в обл. тепловых процессов внутри теплозащитных полимерных композиционных материалов при высоких температурах.

METADATA

Title: Spline-functions method for solving thermal conductivity problems.

Authors: V. P. Pavlov¹, V. M. Kudoyarova¹

Affiliation:

Ufa State Aviation Technical University (UGATU), Russia.

Email: ¹victor.pavlov.51@yandex.ru, ²kudoyarova@inbox.ru

Language: Russian.

Source: Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 22, no. 4 (82), pp. 30-40, 2018. ISSN 2225-2789, ISSN 1992-6502.

Abstract: There are many cases in engineering practice when it is necessary to know the transient temperature field in a flat plate. At that, temperature distribution is studied experimentally or by calculation. However, the obtained calculation results do not always provide the required accuracy. This paper obtains the spline-method grade 3 defect 1, which allows simulating the process of thermal conductivity for the infinitely extended plate: at temperature-dependent thermophysical material properties and at nonlinear initial and boundary conditions of the first kind on the plate sides. For accuracy evaluation of the solution of the heat conduction equation by using spline-method the standard problems are created for one-dimensional infinite flat plane that have the exact analytical solutions. This paper shows the use of spline method for the solution of transient heat conduction problem gives an error of no more than $1 \cdot 10^{-5}$, which satisfies an obtaining of the sufficient accuracy to solve many practical problems.

Key words: splines; modeling; numerical methods; transient heat conduction; nonlinear differential heat equations.

About authors:

PAVLOV, Victor Pavlovich, Prof., Dept. of Strength of Materials. Dipl. Engineer for Aircraft Engines (Ufa Aviation Inst., 1973). Dr. of Tech. Sci. (UGATU, 2005).

KUDOYAROVA, Vilina Maratovna, Associate Prof., Dept. of Aviation Heat and Power Engineering. Dipl. Engineer for Aviation and Rocket-Space Heat Engineering (UGATU, 2001). Cand. of Tech. Sci. (UGATU, 2005).