УДК 533.601.1

Ю. С. КАБАЛЬНОВ, Л. Ю. УРАЗАЕВА

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ КРЫЛА С ГИБКИМ ПРОФИЛЕМ

Рассматриваются колебательные движения гибкого крыла с конечной амплитудой. Для обеспечения гладкого схода следа с задней кромки предложены модели изменения хорды крыла во время движения. Построена схема распределения вихревого следа, состоящего в общем случае из поперечных и продольных вихрей. Выписано уравнение для определения величины полной циркуляции в рамках принятой модели, индуктивных скоростей и сил, действующих на крыло. Проведен численный эксперимент, с помощью которого анализируется влияние параметров крыла на величины сил и циркуляции. *Колебательное движение; несущая поверхность; форма профиля; сход следа с задней кромки*

## ВВЕДЕНИЕ

Одной из актуальных проблем механики сплошной среды является моделирование колебательных движений несущей поверхности. Важнейшей задачей современной аэродинамики является повышение аэродинамической эффективности несущих поверхностей. В связи с этим возрастает интерес к изучению колебательных движений с конечными амплитудами в несжимаемой жидкости. Такое движение широко распространено в природе, примером могут служить волнообразные движения рыб, полет птиц, насекомых.

Предпринятые исследования в данной области [8] свидетельствуют об относительно высокой эффективности подобных систем. В настоящее время на основе композитных материалов появляется возможность практической реализации движения гибких крыльев переменной геометрии с конечными амплитудами. Существующие методы решения задачи о нестационарном движении крыла в основном посвящены случаю бесконечно малых амплитуд, либо представляют собой чисто теоретические подходы, трудоемкие для практического применения, либо ограничиваются частными случаями движения, движением крыла вблизи поверхности. Весьма актуальна в связи с этим разработка метода, позволяющего находить удобное для практического применения и в то же время достаточно обоснованное решение для использования в практических расчетах.

Наибольшие трудности в нестационарных задачах доставляет учет влияния вихревого следа, тянущегося позади крыла. Это связано с тем, что заранее неизвестны ни форма вихревого следа, ни вихревая плотность.

Другой проблемой, возникающей при решении данной задачи, является обеспечение гладкого схода следа с кромок крыла при колебаниях с конечной амплитудой. Эта проблема решается с помощью введения класса крыльев с переменной геометрией путем задания закона изменения профиля крыла во время движения. Крыло предполагается гибким, деформируемым во времени и в пространстве по определенному закону, позволяющему адаптироваться к колебательному движению и обеспечить гладкий сход следа с задней кромки крыла.

Цель работы состоит в изучении нестационарного движения крыла, гармонически колеблющегося с конечными амплитудами. Предлагаются формулы, позволяющие вычислять величины циркуляции для предлагаемых моделей и сил и анализировать влияние изменения параметров движения (числа Струхаля, амплитуды колебаний, относительного удлинения, величины угла атаки) на аэродинамическое качество крыла.

## ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$XYZ$ — абсолютная неподвижная система координат;

$xyz$ — относительная, неизменно связанная с движущейся пластинкой;

$u_0$ — скорость горизонтальная;

$v$ — скорость вертикальная;

$\omega$ — угловая скорость;

$\varphi$ — угол атаки;

$a$ — полухорда;

$l$ — полуразмах крыла;

$\lambda_0 = l/a$ — относительное удлинение (достаточно велико, $\lambda_0 \geqslant 4$);

$\nu$ — частота колебаний;

$V_m$ — амплитуда колебаний;

$\gamma$ — плотность (интенсивность) вихря;

$\gamma_{\text{пр}}$ — интенсивность присоединенных вихрей профиля;

$\gamma_s$ — интенсивность вихрей следа;

$\sigma = \nu a/u_0$ — число Струхаля;

$\Gamma$ — циркуляция полная;

$\Gamma_{\text{кс}}$ — циркуляция квазистационарная;

$\Gamma'$ — циркуляция дополнительная;

$X_s, Y_s$ — проекции силы, вызываемой влиянием вихревого следа;

$I$, $K$ — ядро интегро-дифференциального уравнения для случая крыла бесконечного, конечного размаха.

## 1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Особый интерес представляет систематическое исследование расчетным путем влияния формы профиля несущей поверхности на суммарные гидродинамические характеристики параметров обтекания. Процесс решения той или иной граничной задачи гидроаэродинамики можно характеризовать как результат отображения пространства входных параметров, в том числе геометрических характеристик тела, параметров нестационарного движения на пространство гидроаэродинамических характеристик. При таком отображении решается прямая задача, основная цель которой — определение агрегированных величин типа гидроаэродинамических коэффициентов. Имеет смысл и обратная задача, состоящая в определении геометрических характеристик несущей поверхности, обеспечивающих ее гидродинамические характеристики. При этом, естественно, может ставиться и задача определения оптимальных геометрических или гидродинамических характеристик несущей поверхности.

Прямая задача состоит в определении выходных параметров — циркуляции и сил, действующих на крыло. Обратная задача предполагает определение входных параметров, обеспечивающих достижение при полете необходимых аэродинамических показателей крыла. Усовершенствование формы профиля с целью уменьшения его сопротивления дает целый ряд преимуществ, в том числе повышение аэродинамической эффективности, и в конечном итоге — экономию топлива.

Движение жидкости рассматривается в рамках модели сплошной среды. Жидкость предполагается идеальной и политропной, течение жидкости — изентропичным. Политропность означает, что внутренняя энергия жидкости линейно зависит от температуры, изентропичность — что имеет место адиабатичность и обратимость физических процессов в жидкости. Предполагается отсутствие в жидкости первоначальной завихренности, массовых сил и ударных волн. Для рассматриваемой жидкости справедливы теоремы Гельмгольца о вихрях, о сохранении вихревых линий и интенсивности вихревых трубок, следствием которых является потенциальность той части жидкости, начальная завихренность которой была равна нулю.

Исходя из этих общих положений, рассматривается неустановившееся движение непроницаемой деформируемой поверхности в потоке несжимаемой идеальной жидкости, имеющей на бесконечности постоянную поступательную скорость.

От части кромки непроницаемой поверхности, которую называют задней кромкой, сходит поверхность разрыва скоростей, причем скорость жидкости остается конечной на задней кромке. Постулат о конечности скорости на задней кромке был введен в теорию крыла Жуковским–Куттом. Данное условие отражает влияние вязкости реальных жидкостей в теории крыла в идеальной жидкости. На поверхности крыла выполняется условие отсутствия относительных нормальных скоростей. Это связано с тем, что при движении крыла частицы жидкости, находящиеся на нем, непрерывно соприкасаются с его поверхностью. В зависимости от требования отрывности или безотрывности обтекания передней кромки имеют место разные классы задач. С точки зрения тех видов движения, которые встречаются в природе, наиболее эффективным является безотрывное обтекание передней кромки. Это условие будет выполняться: 1) за счет подбора параметров, обеспечивающих отсутствие отрыва с передней кромки; 2) за счет соответствующего изменения формы профиля крыла, гарантирующего плавный безударный вход. Проблемой является также полный учет влияния вихревого следа. При достаточно плавных движениях, которые как раз и являются объектом изучения в работе, согласно теоретическим и экспериментальным исследованиям влиянием деформации следа можно пренебречь в рамках точности рассматриваемой модели. Таким образом, рассматривается приближенное решение задачи, в котором пренебрегают деформацией следа. Считается, что вихревой след, сходящий с задней кромки, повторяет траекторию задней кромки. Получаемое решение можно уточнить, если в следующем приближении принимать во внимание деформацию следа, взяв за первое приближение полученное решение.

В первом приближении, рассматривая нестационарность поля течения как линейное возмущение по отношению к некоторому стационарному, решение можно выразить в виде двух слагаемых, одно из которых характеризует стационарную часть решения, другое — нестационарную часть, отвечающую за влияние нестационарности, такое представление удобно для анализа полученного решения. Влияние размаха, толщины, среднего угла атаки не может рассматриваться независимо друг от друга, так как к их влияниям нельзя применить принцип суперпозиции согласно результатам экспериментальных данных.

На основе анализа результатов эксперимента можно сделать вывод о возможности применения принципа суперпозиции при расчете нестационарных сил, при наложении определенных ограничений на параметры движения: ограничения на величину рассматриваемого угла атаки. Наиболее распространенным методом разложения решения на нестационарную и стационарную составляющие является метод гармонического анализа [1].

Стационарная часть решения не зависит от времени, нестационарная часть есть комплексная величина, позволяющая учитывать влияние колебательного движения.

Решения для произвольного режима движения профиля (и крыла также), могут быть построены путем суперпозиции решений, соответствующих каждому значению в частном спектре движения.

Особый интерес при изучении движения с конечными колебаниями представляет усовершенствование формы профиля крыла с целью уменьшения сил сопротивления.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

С помощью обобщенного оператора $T(\phi, u)$ краевую задачу гидродинамики можно записать в виде задачи оптимального управления системой с распределенными параметрами [5]:

$$T(\phi, u) = 0,\ g \in \Omega,\ \phi \in E(\Omega),\ u \in E(S); \quad (1)$$

здесь $u$ — вектор допустимых управлений; $\phi$ — вектор пространства состояний; $E(\Omega)$ — пространство состояний системы; $\Omega$ — область, занятая жидкой средой; $S$ — ограниченная поверхность, движущаяся в жидкости.

Операторное уравнение $T(\phi, u) = 0$ представляет собой уравнение гидродинамики идеальной жидкости. В этой задаче $\phi$ имеет смысл потенциала скоростей или потенциала ускорений.

При решении прямой задачи определяются агрегированные аэродинамические характеристики, при решении обратной задачи — геометрические характеристики несущей поверхности при условии постоянства подъемной силы крыла.

В данном случае рассматривается колебательное движение крыла в несжимаемой идеальной жидкости.

Предполагается, что крыло обладает поступательной скоростью $V_{св}$, угловой скоростью вращения ее относительно задней кромки $\omega$, хорда крыла может изгибаться для обеспечения плавного схода следа с задней кромки. Считается, что амплитуда колебаний крыла не превышает 0,2 — таким образом, гарантируется, что обтекание крыла носит безотрывный характер. Относительное удлинение крыла $\lambda_0$, равное отношению $l/a$, берется достаточно большим: $4 \leqslant l/a$, здесь $l$ полуразмах крыла, $a$ — полухорда. Отметим, что в природе удлинения в основном встречаются в диапазоне от 4 до 12 [6, 7].

Пусть $X, Y, Z$ — неподвижная система координат, $xyz$ — система координат, движущаяся с непроницаемой поверхностью. Принимается, что вне крыла и его следа течение является безвихревым и для потенциала возмущенных скоростей $\Phi(x, y, z, t)$ справедливо уравнение Лапласа.

Математическая постановка задачи приводится для случая безотрывного обтекания бесконечно тонкого крыла произвольной формы в плане, совершающего колебательные движения в идеальной несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0; \quad (2)$$

вне несущей поверхности и поверхности вихревого следа, образующегося при нестационарном движении крыла;

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = (u_c - \omega y)\cos(nx) + (v_c + \omega x)\cos(ny)\,; \quad (3)$$

на поверхности несущей поверхности (условие непротекания);

$$p_+ = p, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n}_+ = \frac{d\Phi}{dn} \qquad (4)$$

— условие непрерывности давления и нормальной скорости при переходе через вихревую поверхность;

$$\lim \nabla \Phi = 0, \qquad (5)$$

где $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ при $R \longrightarrow \infty$ — условие отсутствия возмущений в жидкости на бесконечном удалении от крыла;

$$\frac{d\Phi}{dn} < \infty \qquad (6)$$

на задней кромке (постулат Кутта–Жуковского).

Задача является нелинейной и состоит в определении потенциала $\Phi(x, y, z, t)$ при заданных начальных условиях.

### 3. ПРЕДПОЛАГАЕМЫЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ

При решении прямой и обратной задачи встает проблема построения конструктивных моделей и соответствующих численных алгоритмов для решения.

Для исследований в теории крыла в основном применяется вихревой метод, позволяющий наиболее полно отразить влияние вихревого следа, а следовательно, и физическую картину обтекания крыла.

Фактически прямая задача теории крыла сводится к решению интегро-дифференциального уравнения, получаемого из условия непроницаемости.

На основе указанного уравнения определяется циркуляция, а следовательно, и силы, действующие на крыло, анализируется и оценивается влияние входных параметров (формы профиля, амплитуды и частоты колебаний, величины угла атаки) на выходные характеристики крыла (величины циркуляции и силы).

Существующие методы решения прямой задачи в теории несущей поверхности можно разделить на две группы:

- метод дискретных элементов (вихревых или дипольных панелей);
- метод распределенной сингулярности (функций ядра или разложения функций).

Метод дискретных элементов ввиду большей легкости в реализации применяется чаще, но он требует осторожности при применении, так как «по мере приближения контрольной точки к вихревой нити, индуцируемые в ней скорости стремятся к бесконечно большим значениям» [4, с. 74].

Второй способ является более надежным, так как при численных расчетах выделяется сингулярность, но и более трудоемким. Данный подход является распространением исследований *Н. Н. Поляхова* на случай колебаний с конечными амплитудами.

В работе для учета конечности амплитуды колебаний предложена модель распределения вихрей, которая учитывает, что в случае колебаний с конечными амплитудами форма вихревой пелены вначале повторяет форму траектории движения несущей поверхности, затем на некотором расчетном расстоянии от задней кромки вихри начинают сворачиваться и образовывают шахматную дорожку Кармана (промежуток сворачивания следа и параметры дорожки Кармана задаются на основе известных экспериментальных данных).

Вихревая модель крыла конечного размаха рассматривается для относительно больших удлинений (от 4 до 8).

В случае крыла конечного размаха при построении вихревой модели рассматриваются два случая: случай постоянной по размаху циркуляции и переменной по размаху циркуляции. Кроме поперечных вихрей следа в случае конечности размаха, учитываются и продольные вихри, возникающие за счет учета конечности размаха.

В случае крыла с постоянной циркуляцией по размаху используется гипотеза плоских сечений.

Принципиальным вопросом теории крыла является вопрос обеспечения конечности скорости на задней кромке крыла.

В работе предложены следующие модели изменения профиля крыла для обеспечения непрерывного схода следа с задней кромки при движении с конечными амплитудами:

- движение «ныряющей» пластинки;
- движение круговой дуги;
- движение параболической дуги;
- движение профиля переменной формы.

Во всех случаях за счет постоянного изменения положения или формы хорды крыла обеспечивается гладкий сход следа с задней кромки крыла.

#### 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦИРКУЛЯЦИИ И СИЛ

Для описания движения вводятся две системы координат: $XYZ$ — абсолютная неподвижная система и $xyz$ — подвижная система координат, неразрывно связанная с хордой крыла.

Логично начать исследование с рассмотрения случая колебаний с конечными амплитудами бесконечно тонкой пластинки (крыло с бесконечным размахом, т. е. с удлинением больше 8). В этом случае имеем плоскую задачу. Предполагается, что пластинка совершает одновременно поступательное движение со скоростью $V_c = (u_o, v_m \cos \nu t)$ и вращательное движение относительно задней кромки с угловой скоростью $\omega$, которая определяется из кинематических условий. Нестационарное движение с переменной во времени циркуляцией $\Gamma(t)$ сопровождается сходом вихревого следа с задней кромки пластинки. Принимается, что вихри следа располагаются по траектории задней кромки, уравнение траектории имеет вид

$$Y_0 = \frac{v_m}{u_0} \sin \nu \left( \frac{X_0}{u_0} \right). \quad (7)$$

Гладкий сход вихревого следа обеспечивается законом изменения угловой скорости $\omega = \omega(t)$, который обеспечивает в любой момент времени расположение пластинки по касательной к траектории задней кромки(«ныряющая пластинка»).

Уравнение непроницаемости для пластинки запишется в виде

$$V^i_{\text{пр}n} = V_{\text{пл}n} + V^i_{sn},$$

где $V^i_{\text{пр}n}$ — нормальная составляющая скорости, вызываемой присоединенными вихрями пластинки, $V_{\text{пл}n}$ — нормальная составляющая суммы скоростей поступательного и вращательного движений пластинки, $V^i_{sn}$ — нормальная составляющая индуктивной скорости, вызываемой вихрями следа.

На основе вихревой модели выписывается уравнение сохранения циркуляции:

$$\Gamma = 2a \int_0^{\pi} V_{\text{пр}n} (1 - \cos\theta)\, d\theta + \\ + 2a \int_0^{\pi} V_{sn} (1 - \cos\theta)\, d\theta + \gamma_s a. \quad (8)$$

Конечность амплитуды колебаний и изменение положения пластинки учитывается посредством второго слагаемого в правой части.

Для данной модели движения, полагая в первом приближении, что $\Gamma = \Gamma_1 \cos \nu t + \Gamma_2 \sin \nu t$ получим

$$\Gamma_1 = - \left( \frac{\Gamma_0 \sigma (C + \pi (1 - 0{,}25 \left(\frac{Vm}{u_0}\right)^2))}{T} \right); \quad (9)$$

$$\Gamma_2 = \left( \frac{\Gamma_0 (\sigma S + \pi)}{T} \right); \quad (10)$$

$$T = \frac{1}{\pi} \left[ (\sigma S + \pi)^2 + \sigma^2 (C + \pi \left( 1 - 0{,}25 \left( \frac{V_m}{u_0} \right)^2 \right) \right]; \quad (11)$$

$$C = \int_{X0}^{\infty} \cos \frac{\sigma (X - X_0)}{a} I\, dX; \quad (12)$$

$$S = \int_{X0}^{\infty} \sin \frac{\sigma (X - X_0)}{a} I\, dX; \quad (13)$$

$$\Gamma_0 = -\pi a \sigma V_m (1 - 0{,}5 \left( \frac{V_m}{u_0} \right)^2). \quad (14)$$

Очевидно, что если использовать большее число гармоник, то можно более полно учесть влияние конечности амплитуды колебаний.

Ядро $I = I(\rho_0, \varphi)$ для прямолинейной пластинки в случае криволинейного следа является функцией $\rho_0$ — расстояния от задней кромки до вихря следа с координатами $X$, $Y$, $\varphi$ — угла наклона пластинки к оси $OX$, таким образом, в ядре учитывается влияние конечности амплитуды и положения пластинки в текущий момент времени.

Ядро для криволинейной пластинки можно представить в виде:

$$I_{\text{кр}} = I_{\text{пр}} \left( 1 + O \left( \left( \frac{V_m}{u_0} \right)^2 \right) \right), \quad (15)$$

где $I_{\text{пр}}$ — ядро в случае прямолинейного следа, который имеет место при колебаниях с бесконечно малыми амплитудами, дополнительное слагаемое свидетельствует о квадратичной зависимости от величины $\left(\frac{V_m}{u_0}\right)$.

Для пластинки с изменяющимся по времени профилем, аналогом изменяющейся формы тела рыбы при движении, ядро в уравнении сохранения циркуляции будет содержать дополнительно множитель иметь вид: $(1 - \frac{\theta_k}{\pi})$, где $\theta_k$ — координата перехода прямолинейной части профиля в изогнутую, в любой момент времени известную из закона изменения профиля.

Следующим этапом исследования являются исследования крыла конечного размаха при удлинении от 4 до 8, совершающего колебательные движения с конечными амплитудами. В данном случае вихревая система крыла должна отражать конечности размаха крыла, кроме конечности амплитуды колебаний крыла. При исследовании движения с учетом конечных колебаний крыла с постоянной и переменной по размаху циркуляцией при достаточно больших удлинениях строится вихревая схема крыла на основе предложенной *Н. Н. Поляховым* [1]. В вихревую модель кроме поперечных вихрей, вводятся также продольные вихри, являющиеся как бы продолжением присоединенных вихрей. Однако в отличие от случая нестационарного движения с малыми амплитудами, кроме криволинейности формы следа при движении с конечными амплитудами, необходимо учитывать и возросшую нестабильность вихревого следа. В связи с этим, в модели вихревого следа и в расчетах полагается, что на определенном конечном расстоянии от задней кромки вихревой след сворачивается в вихревую шахматную дорожку Кармана.

Для движений крыла конечного размаха с конечными колебаниями уравнение сохранения циркуляции на основе предложенной вихревой модели будет иметь вид

$$\Gamma = 2a\int_0^{\pi}(V_{cn}+V_{sn}-V_{in})\times \\ \times\left(1-\cos\theta+(1-\cos 2\theta)/4\lambda_0^2\right)\,d\theta, \quad (16)$$

здесь $V_{cn}$ — полная скорость крыла, $V_{sn}, V_{in}$ — индуктивные скорости крыла, $\lambda_0$ — относительное удлинение крыла. Члены порядка $\lambda^{-2}$ возникают за счет учета конечности размаха присоединенных крыла и влияния продольных вихрей на участке от передней до задней кромки.

Часть циркуляции, вызываемая влиянием поперечных вихрей следа, имеет вид

$$\Gamma_{\text{поп}} = \int_{-\infty}^{X_0}\gamma\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}(I_{l1}+I_{l2})\,dX'; \quad (17)$$

$$I_{lj} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\lambda_0^{-2}}{4}\right)^{j-1}\times \\ \times\int_0^{\pi}\frac{(1-\cos j\theta)\,(\rho_0\cos(\varphi-q)+1+\cos\theta)}{r_0^2\sqrt{\left(\lambda_0^{-2}r_0^2+1\right)}}d\theta = \\ = I_\infty+\Delta I_{lj}, \quad (18)$$

здесь $j = 1, 2, r_0$ — расстояние от точки сечения до вихря следа; $I_\infty$ — вид ядра для крыла бесконечного размаха с учетом конечности колебаний.

Часть циркуляции, отвечающая за учет продольных вихрей, имеет вид:

$$\Gamma_{\text{прод}} = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{X_0}(D_1+D_1)\Gamma\,dX; \quad (19)$$

где

$$D_j = \left(\frac{\lambda_0^{-2}}{4}\right)^{j-1}\left(\frac{\lambda_0^{-2}}{\pi}\right)\times \\ \times\left(\cos\varphi-\frac{V_m}{u_0}\cos\sigma\frac{X}{a}\sin\varphi\right)\times \\ \times\int_0^{\pi}\frac{(1-\cos j\theta)}{\left(r_0^2\lambda_0^{-2}+1\right)^{3/2}}d\theta, \quad (20)$$

где $r_0$ — расстояние от точки сечения до вихря следа.

Полученные формулы в случае крыла с изменяющимся сечением отличаются заменой величин

$$\cos\varphi \quad \text{на} \quad 1-\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{2}\left(1-\frac{\theta_k}{\pi}\right); \quad (21)$$

$$\sin\varphi \quad \text{на} \quad \sin\varphi\left(1-\frac{\theta_k}{\pi}\right). \quad (22)$$

В случае крыла с сечением в форме круговой дужки формулы остаются такими же, как для ныряющего крыла, за исключением квазистационарной части, где учитывается изогнутость дужки.

На основе предложенных вихревых моделей и моделей изменения формы профиля крыла можно вычислить силы, вызываемые влиянием вихревого следа в случае колебаний с конечными амплитудами.

Для «ныряющего крыла» и крыла с сечением в виде круговой дужки (если пренебречь кривизной профиля сечения) величины проекций $X_s, Y_s$, силы, вызываемой влиянием следа, будут равны

$$X_s = -\rho V_{sn}\Gamma'; \quad (23)$$

$$Y_s = \rho a u_0 \int\limits_0^\infty \gamma_s \frac{\left(\frac{I_{\text{кр}}}{\cos\varphi} - \overline{I}\right)}{\cos\varphi} dX'; \qquad (24)$$

где

$$X' = \frac{X - X_0}{a}; \qquad (25)$$

$$\overline{I} = -\frac{\partial}{\partial X'}\left(\rho_0 \cos\left(\varphi - q\right)\right) + \frac{\partial D}{\partial X'}\frac{1}{2\sqrt{D}}; \quad (26)$$

$$D = \rho_0 \cos\left(\varphi - q\right) + \frac{\rho_0^2}{2}\cos 2(\varphi - q) + \rho_0\sqrt{\mathrm{P}}, \qquad (27)$$

где

$$\mathrm{P} = 1 + \frac{\rho_0^2}{4} + \rho_0 \cos\left(\varphi - q\right). \qquad (28)$$

Формулы для $X_s$, $Y_s$ в случае крыла с постоянной циркуляцией по размаху при достаточно большом удлинении содержат члены, отвечающие как за влияние конечности размаха, так и за влияние конечности амплитуды колебаний. На больших расстояниях от задней кромки вклад криволинейности следа и конечности амплитуды колебаний для крыла конечного размаха ведет себя как

$$O\left(\left(\frac{V_m}{u_o}\right)^2 \lambda\right)\frac{1}{X^2}.$$

Отсюда можно сделать вывод о том, что вклад учета конечности амплитуды колебаний падает с уменьшением относительного удлинения крыла конечного размаха, наибольшее влияние на учет криволинейности движения оказывают ближайшие, примыкающие к задней кромке участки следа. Все эти выводы согласуются с результатами экспериментальных исследований.

Полученные выражения для сил Жуковского легко распространяются на случай крыла с изменяющимся сечением.

Анализ результатов показывает, что основной вклад в учет конечности амплитуды колебаний вносят величины, отвечающие за влияние поперечных вихрей следа. Учет влияния конечности размаха ослабляет влияние конечности амплитуды с уменьшением удлинения крыла. Также при учете конечности размаха сокращается длина участка вихревого следа, вносящего основной вклад в величины проекций силы Жуковского на оси подвижной системы координат по сравнению со случаем крыла бесконечного размаха.

## 5. ПРИМЕР

Численное экспериментирование открывает большие возможности по изучению нестационарного движения несущей поверхности, предоставляет возможности для проведения численного имитационного эксперимента, однако в любом случае окончательные выводы об адекватности той или иной предлагаемой модели можно делать только на основе сравнения полученных результатов с экспериментальными данными. Проведем расчеты для случая прямолинейной «ныряющей» пластинки, движущейся с конечными амплитудами. Исходные параметры $v_m/u_o = 0{,}15$, $a = 6$, $X_0 = 0$ (отметим, что расчеты выполнены для определенного положения пластинки).

Таблица

**Влияние частоты колебаний на величину полной циркуляции**

| Частота колебаний | Число Струхаля | Полная циркуляция |
|---|---|---|
| 1 | 0,600 | 1,044 |
| 2 | 1,200 | 9,273 |
| 3 | 1,800 | 18,314 |
| 4 | 2,400 | 17,282 |
| 5 | 3,000 | 20,034 |
| 6 | 3,600 | 22,194 |

Как и следовало ожидать, полная циркуляция нелинейно возрастает с увеличением числа Струхаля при всех остальных одинаковых значениях параметров, но скорость роста полной циркуляции замедляется, начиная с определенных значений числа Струхаля, дальнейшее увеличение числа Струхаля уже не так эффективно для увеличения циркуляции. Данный результат хорошо согласуется с выводами экспериментальных работ [6, 7]. Результаты численного эксперимента указывают на существенное проявление нелинейности в рассматриваемом диапазоне частот. С ростом величины $\left(\frac{V_m}{u_0}\right)$ влияние конечности амплитуды увеличивается, отметим, что это влияние зависит также и от положения крыла на траектории. Отсюда и понятно изменение формы в плане крыла птицы для сохранения величины циркуляции.

## ВЫВОДЫ

В работе рассмотрено нестационарное колебательное движение крыла с конечными амплитудами. Предложены модели распределения вихревого следа за крылом в случае крыла бесконечного размаха и крыла конечного размаха с постоянной циркуляцией по размаху; модели законов изменения гибкого крыла для обеспечения гладкого схода следа с задней кромки; метод расчета циркуляции и сил на основе вихревого метода в случае колебаний с конечной амплитудой. Найдены выражения для циркуляции и сил. Исследовано взаимное влияние учета конечности колебаний амплитуды и конечности размаха крыла на величины циркуляции и сил; произведены численные расчеты для одной из моделей профиля крыла. Результаты расчетов адекватны экспериментальным данным.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Поляхов, Н. Н.** Избранные труды. Аэродинамика / Н. Н. Поляхов. СПб. : Изд-во СПбГУ. 1997. 380 с.
2. **Уразаева, Л. Ю.** Учет влияния конечности размаха и конечности амплитуды колебаний при расчете сил, действующих на крыло / Л. Ю. Уразаева // Прикладная механика : межвуз. сб. СПб., 1997. Вып. 10. С. 215–216.
3. **Поляхов, Н. Н.** Гармонические колебания крыла с постоянной циркуляцией по размаху / Н. Н. Поляхов, Л. Ю. Уразаева // Вестн. СПб. ун-та. Сер. 1. 1992. Вып. 3, № 15. С. 102–104.
4. **Белоцерковский, С. М.** Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью / С. М. Белоцерковский, М. И. Ништ. М. : Наука, 1978. 352 с.
5. **Панченков, А. Н.** Теория оптимальной несущей поверхности / А. Н. Панченков. Новосибирск : Наука, 1983. 256 с.
6. **Taylor, G. K.** Flying and swimming animals cruise at a Strouhal number tuned for high power efficiency / Graham K. Taylor, Robert L. Nudds, Adrian L. R. Thomas // Nature. Oct. 16, 2003. Vol. 425. P. 707–711.
7. **Tobalske, B. W.** Dial kinematics of flap-bounding flight in the zebra finch over a wide range of speeds / Bret W. Tobalske, Wendy L. Peacock, P. Kenneth // The J. of Experimental Biology. 1999. Vol. 202. P. 1725–1739.
8. **Katz, J.** Hydrodynamic propulsion by large amplitude oscillation of an airfoil with chordwise flexibility / J. Katz, D. Weihs // J. Fluid Mech. 1976. Vol. 74, pt. 1. P. 485–497.


## ОБ АВТОРАХ


**Кабальнов Юрий Степанович,** проф., зав. каф. информатики. Дипл. инж. электронной техники (УАИ, 1971). Д-р техн. наук по управлению в технических системах (УГАТУ, 1993). Иссл. в обл. адаптивного и интеллектуального управления.

**Уразаева Л. Ю.,** доц., каф. информатики. Дипл. математик (БГУ, 1981). Канд. физ.-мат. наук по мех-ке жидк., газа и плазмы (защ. в ЛГУ, 1985). Иссл. в обл. теории крыла, моделир. поведения сл. систем.