

УДК 517:539.3

О. В. ЕМЧЕНКО, С. А. МАЯКОВА

## УСТОЙЧИВОСТЬ И БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, ОПИСЫВАЮЩИХ ФЕРРОМАГНЕТИКИ С УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ

Исследована диссипативная динамическая система, описывающая ферромагнетик с локальным дефектом структуры. Проведен анализ устойчивости и бифуркаций решения возмущенной системы. Для конкретных видов деформации рассчитаны некоторые характеристики магнитной системы. *Динамическая система; устойчивость; бифуркации*

### ВВЕДЕНИЕ

Пусть объемная плотность гамильтониана, описывающего магнитную систему, задается соотношением [1]

$$\omega = \omega_A + \omega_{MU},$$

где  $\omega_A$  — плотность энергии магнитной анизотропии,  $\omega_{MU}$  — плотность магнитоупругой энергии (табл.). Тогда гамильтонова система записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \int_{\Omega} \frac{\partial \omega(x, y, z; \psi, \theta)}{\partial \theta} dx dy dz; \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \omega(x, y, z; \psi, \theta)}{\partial \psi} dx dy dz, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  — пространственная область рассматриваемой задачи.

В ранее проведенных исследованиях, результаты которых изложены в [2], было найдено стационарное решение  $(\psi^0, \theta^0)$  системы (1) (грубое состояние равновесия) и исследованы его свойства. Известно, что динамическая система, зависящая от параметра, претерпевает бифуркацию, если некоторое ее качество изменяется скачком при непрерывном изменении параметра. В рассматриваемой системе таким параметром является пространственная координата. Связанное с координатой пространственное изменение локальной намагниченности изменяется скачком (фазовое превращение второго рода). Таким образом, в рассматриваемой системе мы можем ожидать возникновение бифуркаций.

Ограничимся только бифуркациями, связанными с устойчивыми состояниями равновесия. Используя полученные ранее результаты, исследуем устойчивость решения динамической системы (1) и рассмотрим вопрос о существовании точек бифуркации решения.

### 1. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ БИФУРКАЦИИ РЕШЕНИЯ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ

Приведем систему (1) к матричному виду, введя следующие обозначения:

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} \psi \\ \theta \end{pmatrix}, \quad X^0 = \begin{pmatrix} \psi^0 \\ \theta^0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \\ f_1 &= \int_{\Omega} \frac{\partial \omega(x, y, z; \psi, \theta)}{\partial \theta} dx dy dz, \\ f_2 &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \omega(x, y, z; \psi, \theta)}{\partial \psi} dx dy dz, \end{aligned}$$

где  $X^0$  — векторное поле, определяющее стационарное решение задачи, т.е. распределение вектора локальной намагниченности вблизи возмущения,  $X$  — векторное поле, определяющее эволюцию вектора локальной намагниченности вблизи возмущения.

Исследуем устойчивость системы вблизи стационарного решения  $(\psi^0, \theta^0)$ . В приведенных обозначениях эволюция локального магнитного поля вблизи дефекта будет описываться соотношением

$$\dot{X} = F(X^0) + DF(X - X^0) + o(\|X - X^0\|),$$

$$\text{где } DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \psi}(\psi^0, \theta^0) & \frac{\partial f_1}{\partial \theta}(\psi^0, \theta^0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial \psi}(\psi^0, \theta^0) & \frac{\partial f_2}{\partial \theta}(\psi^0, \theta^0) \end{pmatrix}.$$

Таблица

**Плотности энергии магнитной анизотропии и магнитоупругой энергии**

Одноосный кристалл	Двухосный кристалл
$\omega_A = K_1 \alpha_z^2,$ $\omega_{MU} = B_1(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})\alpha_z^2 + B_2 \varepsilon_{zz} \alpha_z^2 +$ $+ B_3(\varepsilon_{xx} \alpha_x^2 + \varepsilon_{yy} \alpha_y^2 + 2\varepsilon_{xy} \alpha_x \alpha_y) +$ $+ B_4(\varepsilon_{yz} \alpha_y \alpha_z + \varepsilon_{xz} \alpha_x \alpha_z)$	$\omega_A = K_1(\alpha_x^2 \alpha_y^2 + \alpha_y^2 \alpha_z^2 + \alpha_x^2 \alpha_z^2),$ $\omega_{MU} = B_1(\alpha_x^2 \varepsilon_{xx} + \alpha_y^2 \varepsilon_{yy} + \alpha_z^2 \varepsilon_{zz}) +$ $+ B_2(\alpha_x \alpha_y \varepsilon_{xy} + \alpha_y \alpha_z \varepsilon_{yz} + \alpha_z \alpha_x \varepsilon_{zx})$
$\bar{\alpha}(r) = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z) = (\cos \theta, \cos \psi \sin \theta, \sin \psi \sin \theta),$ $\psi$ – угол, отсчитываемый в плоскости $(YOZ)$ от оси $OZ$ , $(\psi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}])$ , $\theta$ – угол между $\bar{\alpha}(\bar{r})$ и осью $OX$ , $(\theta \in [0, \pi])$ , $K_1$ – первая константа магнитной анизотропии, $B_i$ ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) – константы магнитоупругой связи, $\varepsilon_{ij}(x, y, z)$ – элементы тензора деформаций.	

Собственные числа матричного оператора  $DF$  определяются из уравнения

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \psi}(\psi^0, \theta^0) - \lambda & \frac{\partial f_1}{\partial \theta}(\psi^0, \theta^0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial \psi}(\psi^0, \theta^0) & \frac{\partial f_2}{\partial \theta}(\psi^0, \theta^0) - \lambda \end{pmatrix} = 0, \quad (2)$$

решения которого  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  будут зависеть от параметров  $K_1$  и  $B_i$  (см. табл.). Однако решение уравнения (2) связано с определенными трудностями, заключающимися в существовании особых контуров [2], возникающих при построении стационарного решения. Плотность энергии  $\omega$  внутри этих контуров не определена.

Поэтому вместо обобщенного уравнения (2) используем более строгое условие, полученное из (2) для фиксированной точки пространства:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \omega(x, y, z; \psi^0, \theta^0)}{\partial \psi \partial \theta} - \lambda & \\ -\frac{\partial^2 \omega(x, y, z; \psi^0, \theta^0)}{\partial \psi^2} & \\ \frac{\partial^2 \omega(x, y, z; \psi^0, \theta^0)}{\partial \theta^2} & \\ -\frac{\partial^2 \omega(x, y, z; \psi^0, \theta^0)}{\partial \psi \partial \theta} - \lambda & \end{pmatrix} = 0, \quad (3)$$

решения  $\lambda_1 = \lambda_1(K_1, B_i; x, y, z)$  и  $\lambda_2 = \lambda_2(K_1, B_i; x, y, z)$  которого будут зависеть уже не только от постоянных анизотропии и магнитоупругой связи, но и от координат, являющихся непрерывными параметрами динамической системы.

Таким образом, решения уравнения (3) определяют тип устойчивости решения системы (1) для фиксированной точки пространства  $(x, y, z)$ , а решения уравнения (2) – для всей области в целом.

Остановимся подробнее на решении уравнения (3). При фиксированных  $K_1$  и  $B_i$  получим следующее соотношение для  $\lambda$ :

$$\lambda^2 = \left( \frac{\partial^2 \omega(x, y, z; \psi^0, \theta^0)}{\partial \psi \partial \theta} \right)^2 - \frac{\partial^2 \omega(x, y, z; \psi^0, \theta^0)}{\partial \psi^2} \times \frac{\partial^2 \omega(x, y, z; \psi^0, \theta^0)}{\partial \theta^2} \equiv R. \quad (4)$$

Если  $R > 0$ , то  $\lambda_1 = -\lambda_2 = \sqrt{R}$  и  $(\psi^0, \theta^0)$  – седло,

если  $R < 0$ , то  $\lambda_1 = -\lambda_2 = i\sqrt{R}$  и  $(\psi^0, \theta^0)$  – центр,

если  $R = 0$ , то  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  – необходимое условие бифуркации решений.

Таким образом, в системе дифференциальных уравнений (1) могут наблюдаться седлоузловые бифуркации. Достаточным условием существования бифуркаций для произвольной динамической системы является выполнение одного из следующих неравенств [3]:

$$\langle D^2 f_i H, H \rangle > 0, \quad \forall H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$h_i \in [0; 2\pi], \quad i = 1, 2,$$

где

$$\langle D^2 f_i H, H \rangle = \frac{\partial^2 f_i}{\partial \psi^2} h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f_i}{\partial \psi \partial \theta} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f_i}{\partial \theta^2} h_2^2.$$

Запишем достаточное условие существования бифуркации для рассматриваемой

обобщенной системы (1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^3 \omega(x, y, z; \psi^0, \theta^0)}{\partial \psi^2 \partial \theta} > 0, \\ \frac{\partial^3 \omega(x, y, z; \psi^0, \theta^0)}{\partial \psi \partial \theta^2} - \frac{\partial^3 \omega(x, y, z; \psi^0, \theta^0)}{\partial \psi^2 \partial \theta} \times \\ \times \frac{\partial^3 \omega(x, y, z; \psi^0, \theta^0)}{\partial \theta^2} \leq 0; \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^3 \omega(x, y, z; \psi^0, \theta^0)}{\partial \psi^3} < 0, \\ \frac{\partial^3 \omega(x, y, z; \psi^0, \theta^0)}{\partial \psi^2 \partial \theta} - \frac{\partial^3 \omega(x, y, z; \psi^0, \theta^0)}{\partial \psi^3} \times \\ \times \frac{\partial^3 \omega(x, y, z; \psi^0, \theta^0)}{\partial \psi \partial \theta^2} \leq 0. \end{array} \right. \quad (7)$$

Условия (6) и (7) для конкретного вида плотностей энергии и видов локальных дефектов рассмотрены ниже.

Исследуем теперь устойчивость обобщенной системы (1). Одним из методов определения зон хаотичности и количественной оценки степени интегрируемости орбит является расчет максимальных показателей Ляпунова [4].

Система  $\dot{X} = F(X)$ ,  $X(0) = X^0$ ,  $X \in \mathbb{R}^2$  устойчива по Ляпунову, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , такое, что при внесении возмущения в начальные условия  $X_1(0) = X(0) + \Delta_0$  (где  $\Delta_0 = (\delta_1, \delta_2)$ ,  $\|\Delta_0\| = \delta$ ) новое решение системы  $X_1(t)$  находится в  $\varepsilon$ -окрестности решения невозмущенной системы:  $\|X(t) - X_1(t)\| < \varepsilon$ ,  $\forall t$ .

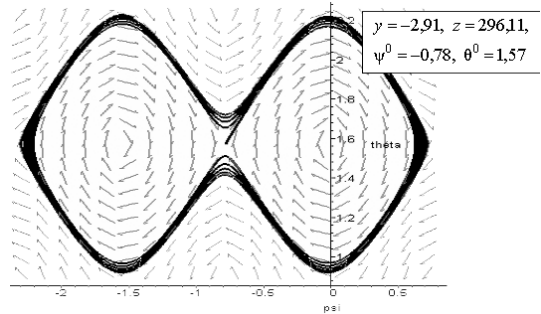
Пусть  $\lambda_1, \lambda_2$  — собственные числа оператора  $DF$ , тогда  $X(t) = (X_1^0 e^{\lambda_1 t}, X_2^0 e^{\lambda_2 t})$ ,  $X_1(t) = ((X_1^0 + \delta_1) e^{\lambda_1 t}, (X_2^0 + \delta_2) e^{\lambda_2 t})$ .

$$\|\Delta_t\| = \|X(t) - X_1(t)\| = O(e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}),$$

следовательно, система устойчива, если  $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} \leq 0$ , и неустойчива, если  $\lambda_1 > 0$  либо  $\lambda_2 > 0$ . Очевидно, что гамильтонова система (1) устойчива при  $R \leq 0$  и неустойчива при  $R > 0$ . На рис. 1 представлена сепаратриса, построенная для системы, описывающей двухосный ферромагнетик, отделяющая устойчивые решения от неустойчивых.

Найдем показатели Ляпунова для рассматриваемой системы (1). В общем случае показатель Ляпунова определяется как  $\tilde{\lambda}(X(0), \Delta_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\Delta_t\|}{\delta}$ . Пусть

$$\Delta_0^1 = (\delta_1, 0), \quad \Delta_0^2 = (0, \delta_2), \quad \text{тогда } \tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}(X(0), \Delta_0^1) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\delta_1 e^{\lambda_1 t}}{\delta_1} = \lambda_1, \\ \tilde{\lambda}_2 = \tilde{\lambda}(X(0), \Delta_0^2) = \lambda_2.$$



**Рис. 1.** Численное интегрирование системы (1), записанной для двухосного ферромагнетика с дислокацией, с начальными условиями в точке  $(\psi^0, \theta^0)$  при следующих значениях параметров:  $B_1 = 1$ ,  $B_2 = -25,6$ ,  $K_1 = 0,002225$  (все энергетические постоянные нормированы на  $B_1$ , пространственные — на период атомной решетки)

Непериодическим решениям динамической системы могут соответствовать аттракторы сложной геометрической структуры, которые имеют, по крайней мере, один положительный ляпуновский показатель и, как следствие, дробную размерность, определяемую по формуле Каплана–Йорка [3]

$$D = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|},$$

где  $j$  — наибольшее целое число, для которого  $\lambda_1 + \dots + \lambda_j \geq 0$ . Размерность  $D$  представляет собой одну из фрактальных размерностей множества и служит оценкой снизу для метрической размерности аттрактора. Применив указанную выше формулу к системе (1), получим, что в области, где  $R > 0$ , существует предельное множество размерности  $D = 2$ .

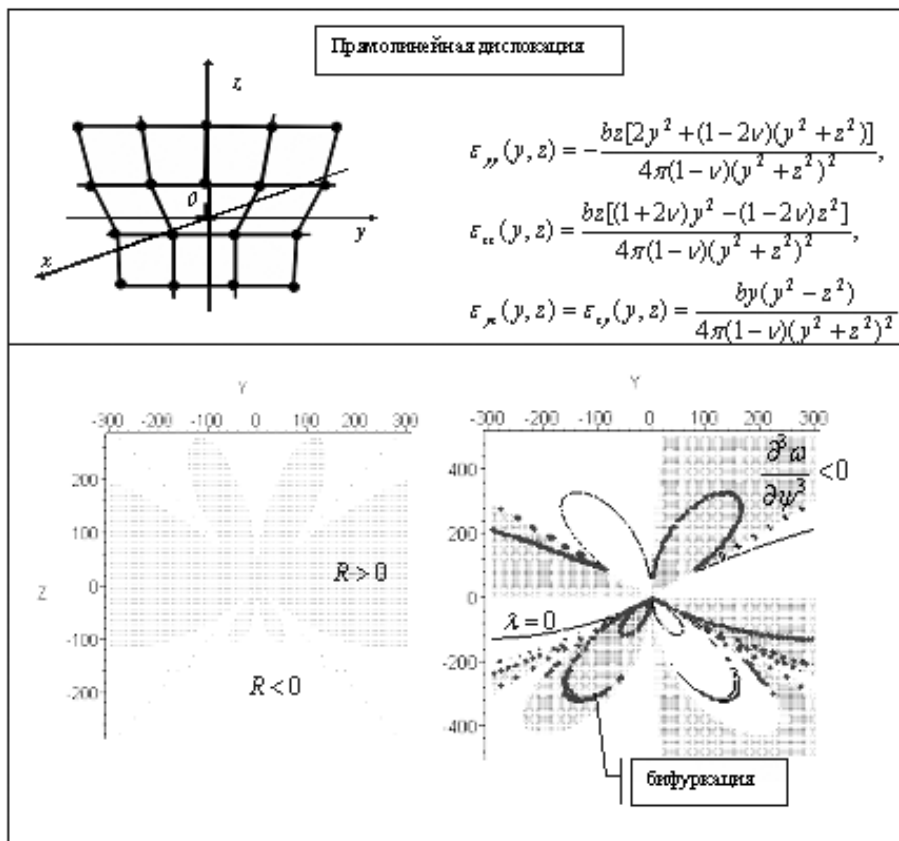
## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ

Применим приведенную классификацию устойчивости к некоторым конкретным видам плотности энергии и деформации структуры ферромагнетика.

### Линейная дислокация

#### Одноосный ферромагнетик

Для прямолинейной краевой дислокации, параллельной оси ( $OX$ ), с вектором Бюргерса, параллельным оси ( $OY$ ), (рис. 2, а) га-



**Рис. 2.** Исследование устойчивости решения гамильтоновой системы, описывающей двухосный ферромагнетик с дислокацией ( $B_1 = 1$ ,  $B_2 = -25,6$ ,  $K_1 = 0,002225$  — все константы выражены в единицах  $B_1$ , координаты — в периодах атомной решетки)

мильтонова система выглядит следующим образом:

$$-\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial \psi} = \left( [(B_3 - B_1) \varepsilon_{yy} - B_2 \varepsilon_{zz} - K_1] \times \right. \\ \left. \times \sin 2\psi + B_4 \varepsilon_{yz} \cos 2\psi \right) \sin^2 \theta, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \left( [B_1 \varepsilon_{yy} + B_2 \varepsilon_{zz} + K_1] \cos^2 \psi + \right. \\ \left. + [B_3 \varepsilon_{yy}] \sin^2 \psi + \frac{1}{2} B_4 \varepsilon_{yz} \sin 2\psi \right) \sin 2\theta. \\ \psi^0 = \frac{1}{2} \arctg \left( \frac{B_4 \varepsilon_{yz}}{(B_1 - B_3) \varepsilon_{yy} + B_2 \varepsilon_{zz} + K_1} \right), \\ \theta^0 = \pi/2.$$

Следовательно,  $\frac{\partial^2 \omega}{\partial \psi \partial \theta} (\psi^0, \theta^0) = 0$ . Отсюда, согласно уравнению (4), получим

$$\lambda^2 = 4 \left( [(B_3 - B_1) \varepsilon_{yy} - B_2 \varepsilon_{zz} - K_1] \cos 2\psi^0 - \right. \\ \left. - B_4 \varepsilon_{yz} \sin 2\psi^0 \right) \times \\ \times \left( [B_1 \varepsilon_{yy} + B_2 \varepsilon_{zz} + K_1] \cos^2 \psi^0 + \right. \\ \left. + [B_3 \varepsilon_{yy}] \sin^2 \psi^0 + 0,5 B_4 \varepsilon_{yz} \sin 2\psi^0 \right) \equiv R. \quad (8)$$

Проверим выполнение условий (6, 7). Поскольку на стационарном решении  $\frac{\partial^3 \omega}{\partial \psi^2 \partial \theta} = \frac{\partial^3 \omega}{\partial \psi \partial \theta^2} = \frac{\partial^3 \omega}{\partial \theta^3} = 0$ , то остается проверить, будет ли  $\frac{\partial^3 \omega}{\partial \psi^3} (\psi^0, \theta^0) < 0$ . Так, как  $\frac{\partial \omega}{\partial \psi} = -4 \frac{\partial^3 \omega}{\partial \psi^3}$ , то  $\frac{\partial^2 \omega}{\partial \psi^2} (\psi^0, \theta^0) = 0$ . В этом случае бифуркаций решения нет.

### Двухосный ферромагнетик

Запишем гамильтонову систему для двухосного ферромагнетика

$$-\frac{\partial \theta}{\partial t} = \left( B_1 (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz}) \sin 2\psi + B_2 \varepsilon_{yz} \cos 2\psi + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} K_1 \sin 4\psi \sin^2 \theta \right) \sin^2 \theta, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( B_1 (\varepsilon_{yy} \sin^2 \psi + \varepsilon_{zz} \cos^2 \psi) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} B_2 \varepsilon_{yz} \sin 2\psi + \frac{1}{2} K_1 \sin^2 2\psi \sin^2 \theta + \right. \\ \left. + K_1 \cos 2\theta \right) \sin 2\theta. \quad (9)$$

При этом  $\psi^0$  определяется из уравнения

$$B_1(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz}) \sin 2\psi^0 + B_2\varepsilon_{yz} \cos 2\psi^0 + \frac{1}{2}K_1 \sin 4\psi^0 = 0, \quad (10)$$

$$\theta^0 = \pi/2.$$

Характеристическое уравнение для двухосного ферромагнетика задается соотношением

$$\begin{aligned} \lambda^2 = & 4 \left\{ B_1(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz}) \cos 2\psi^0 + \right. \\ & \left. + B_2\varepsilon_{yz} \sin 2\psi^0 + K_1 \cos 4\psi^0 \right\} \times \\ & \times \left\{ K_1 + B_1(\varepsilon_{yy} \sin^2 \psi^0 + \varepsilon_{zz} \cos^2 \psi^0) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}B_2\varepsilon_{yz} \sin 2\psi^0 + \frac{1}{2}K_1 \sin^2 2\psi^0 \right\} \equiv R. \quad (11) \end{aligned}$$

На рис. 2, б построены области, для которых  $(\psi^0(y, z), \theta^0(y, z))$  являются седловыми точками ( $R > 0$ ), точками типа центр ( $R < 0$ ), а также контур  $\lambda = 0$ . Найдем области, в которых есть бифуркации решения. Для этого проверим выполнение достаточных условий. На стационарном решении  $\frac{\partial^3 \omega}{\partial \psi^2 \partial \theta} = \frac{\partial^3 \omega}{\partial \psi \partial \theta^2} = \frac{\partial^3 \omega}{\partial \theta^3} = 0$ , таким образом, условие  $\frac{\partial^3 \omega}{\partial \psi^3}(\psi^0, \theta^0) < 0$  равносильно системе

$$\begin{cases} B_1(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz}) \sin 2\psi^0 + \\ + B_2\varepsilon_{yz} \cos 2\psi^0 + \frac{1}{2}K_1 \sin 4\psi^0 = 0, \\ K_1 \sin 4\psi^0 > 0. \end{cases} \quad (12)$$

Области, где обнаружены бифуркации решения рассматриваемой гамильтоновой системы, приведены на рис. 2, б (выделены жирной линией).

### Клиновья дисклинация

#### Одноосный ферромагнетик

Для клиновья дисклинация, приведенной на рис. 3, а, гамильтонова система имеет вид

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \theta}{\partial t} = & \left( (K_1 - B_1(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx}) - B_2\varepsilon_{zz} + \right. \\ & \left. + B_3\varepsilon_{yy}) \sin 2\psi + B_4\varepsilon_{yz} \cos 2\psi \right) \sin^2 \theta, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} = & \left( [B_1\varepsilon_{yy} + B_2\varepsilon_{zz} + K_1] \cos^2 \psi + \right. \\ & \left. + [B_3\varepsilon_{yy}] \sin^2 \psi + \frac{1}{2}B_4\varepsilon_{yz} \sin 2\psi - \right. \\ & \left. - B_3\varepsilon_{xx} \right) \sin 2\theta, \end{aligned}$$

$$\psi^0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{B_4\varepsilon_{yz}}{B_1(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx}) + B_2\varepsilon_{zz} - B_3\varepsilon_{yy} + K_1} \right),$$

$$\theta^0 = \pi/2.$$

Как и в случае дислокации, на стационарном решении

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \psi \partial \theta} = \frac{\partial^3 \omega}{\partial \psi^2 \partial \theta} = \frac{\partial^3 \omega}{\partial \psi \partial \theta^2} = \frac{\partial^3 \omega}{\partial \theta^3} = \frac{\partial^3 \omega}{\partial \psi^3} = 0.$$

Следовательно, собственные числа определяются из уравнения

$$\begin{aligned} \lambda^2 = & 4 \left( (K_1 - B_1(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx}) - B_2\varepsilon_{zz} + B_3\varepsilon_{yy}) \times \right. \\ & \left. \times \cos 2\psi^0 - B_4\varepsilon_{yz} \sin 2\psi^0 \right) \times \\ & \times \left\{ [B_1\varepsilon_{yy} + B_2\varepsilon_{zz} + K_1] \cos^2 \psi^0 + \right. \\ & \left. + B_3\varepsilon_{yy} \sin^2 \psi^0 + 0,5B_4\varepsilon_{yz} \sin 2\psi^0 - B_3\varepsilon_{xx} \right\} \equiv R, \end{aligned}$$

бифуркации решения нет.

### Двухосный ферромагнетик

Для двухосного ферромагнетика с дисклинацией гамильтонова система имеет вид

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \theta}{\partial t} = & \left( B_1(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz}) \sin 2\psi + B_2\varepsilon_{yz} \cos 2\psi + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}K_1 \sin 4\psi \sin^2 \theta \right) \sin^2 \theta, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} = & \left( B_1(\varepsilon_{yy} \sin^2 \psi + \varepsilon_{zz} \cos^2 \psi) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}B_2\varepsilon_{yz} \sin 2\psi + \frac{1}{2}K_1 \sin^2 2\psi \sin^2 \theta + \right. \\ & \left. + K_1 \cos 2\theta - B_1\varepsilon_{xx} \right) \sin 2\theta. \end{aligned}$$

Как и для системы (9), стационарное решение определяется соотношением (10), а характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda^2 = & 4 \left\{ B_1(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz}) \cos 2\psi^0 + \right. \\ & \left. + B_2\varepsilon_{yz} \sin 2\psi^0 + K_1 \cos 4\psi^0 \right\} \times \\ & \times \left\{ K_1 + B_1(\varepsilon_{yy} \sin^2 \psi^0 + \varepsilon_{zz} \cos^2 \psi^0) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}B_2\varepsilon_{yz} \sin 2\psi^0 + \frac{1}{2}K_1 \sin^2 2\psi^0 - \right. \\ & \left. - B_1\varepsilon_{xx} \right\} \equiv R. \quad (13) \end{aligned}$$

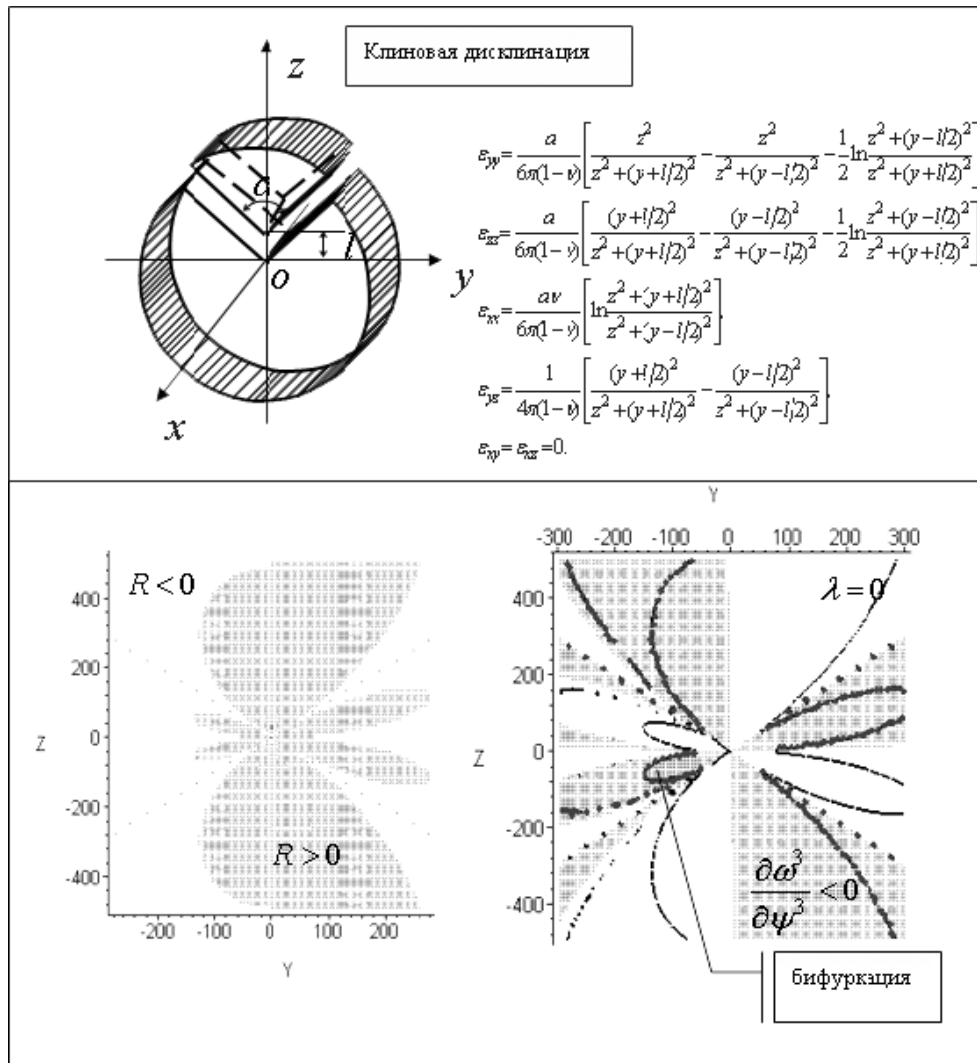


Рис. 3. Исследование устойчивости решения гамильтоновой системы, описывающей двухосный ферромагнетик с дисклинацией ( $B_1 = 1, B_2 = -25,6, K_1 = 0,002225$  — все константы выражены в единицах  $B_1$ , координаты — в периодах атомной решетки)

Достаточным условием существования бифуркации является система (12). На рис. 3, б приведены области, для которых  $(\psi^0(y, z), \theta^0(y, z))$  являются седловыми точками ( $R > 0$ ) и точками типа центр ( $R < 0$ ), указана область раздвоения решения (выделена жирной линией).

Анализ характеристических уравнений (11), (13) показал, что в точках пространства, находящихся вблизи источника деформации, функция  $R(y, z) > 0$  и ее значение на несколько порядков больше, чем в областях, удаленных от источника деформации. Это означает, что положительное собственное число  $\lambda_+$  вблизи дефекта больше, нежели вдали от него, соответственно направление векторов локальной намагниченности в зоне дефекта через определенный отрезок времени будет сильно отличаться от направления этих

векторов вне указанной зоны, т. е., несмотря на то, что магнитоупругие взаимодействия, обусловленные дефектом, гораздо слабее обменных, через некоторое время  $t > \bar{t} = \frac{B_1}{\lambda_+}$  они окажут существенное влияние на распределение локальных магнитных полей рассматриваемой системы.

### ВЫВОДЫ

Применение методов нелинейной динамики открывает широкие возможности в области моделирования магнитных систем. В рамках данной работы было проведено исследование структурной устойчивости магнитных систем и получены области, в которых возможно образование магнитных доменов. Эти области совпадают с областями седловой неустойчивости решения динамической системы, описывающей ферромагнетик.



Дальнейшими этапами развития этой задачи является изучение затягивания и потери устойчивости решения и возникновения магнитного гистерезиса при включении в динамическую систему уравнений, отвечающих за температурную и полевую зависимость.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Диченко, А. Б.** Локальное изменение констант магнитной анизотропии, обусловленное линейными дефектами / А. Б. Диченко, В. В. Николаев, А. П. Танкеев // ФММ. 1978. Т. 45, № 5. С. 958–967.
2. **Емченко, О. В.** Реализация модели Изинга для магнетиков в случае слабого топологического беспорядка / О. В. Емченко, С. А. Маякова // Вестник УГАТУ. Уфа, 2004. Т. 5, № 2 (10). С. 67–73.
3. **Анищенко, В. С.** Знакомство с нелинейной динамикой / В. С. Анищенко. М. ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2002. 144 с.
4. **Паркер, Т. С.** Введение в теорию хаотических систем для инженеров / Т. С. Паркер,

Л. О. Чжуа // ТИИЭР. 1987. Т. 75, № 8. С. 6–40.

#### ОБ АВТОРАХ



**Емченко Ольга Владимировна**, доцент кафедры ВВТиС УГАТУ. Дипл. физик (БГУ, 1983). Канд. физ.-мат. наук. (физика магнитных явлений) (защ. в МГУ, 1991). Исследования в области физики магнетизма, теории упругопластических сред.



**Маякова Светлана Алексеевна**, ассист. той же каф. Дипл. математик, сист. программист (УГАТУ, 2004). Иссл. в обл. магнитных явлений, статистической физики, моделирования физических процессов.