подвижного репера возможно построение точных решений. Перечисление точных решений есть задача групповой классификации подмодели одномерных движений.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Урманчеев, С. Ф.** Установившиеся течения жидкости с температурной аномальной вязкостью / С. Ф. Урманчеев, И. Н. Киреев // Докл. академии наук. 2004. Т. 396, № 2. С. 204 –207.
2. **Бармин, А. А.** Гидродинамика вулканических извержений / А. А. Бармин, О. Э. Мельник // Успехи механики. 2002. Т. 1, № 1. С. 32 –60.
3. **Хабиров, С. В.** Симметрийный анализ модели несжимаемой жидкости с вязкостью и теплопроводностью, зависящими от температуры : препринт института механики УНЦ РАН / С. В. Хабиров. Уфа : Гилем, 2004. 37 с.
4. **Хабиров, С. В.** К групповому анализу модели термовязкой несжимаемой жидкости / С. В. Хабиров // Вестник УГАТУ. 2005. Т. 6, № 2 (13). С. 34–39.
5. **Fushchych, W.** Symmetry reduction and exact solutions of the Navier–Stokes equations. I, II / W. Fushchych, R. Popowych // Nolinear Mathematical Physics. 1994. V. 1, No. 1. P. 75–113 ; N 2. P. 158–189.
6. **Андреев, В. К.** Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике / В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Радионов. Новосибирск : Наука, 1994, 318 с.


### ОБ АВТОРЕ

**Хабиров Салават Валеевич,** проф., гл. науч. сотр., зав. лаб. ИМ УНЦ РАН, проф. каф. математики УГАТУ. Дипл. механик (Новосиб. гос. ун-т, 1970). Д-р физ.-мат. наук (защ. в Ин-те мат. и мех. РАН, Екб., 1991). Иссл. в обл. груп. анализа диф. уравнений.

УДК 519.237.5

**Н. К. БАКИРОВ**

# ОПТИМАЛЬНОЕ СВОЙСТВО ДОВЕРИТЕЛЬНОГО ШАРА, СОДЕРЖАЩЕГО РЕГРЕССИОННЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Показано, что доверительные множества в виде шаров накрывают вектор регрессионных коэффициентов с наибольшей вероятностью только, если столбцы матрицы планирования регрессионного эксперимента ортогональны и имеют одинаковую длину. *Доверительное оценивание; регрессионные коэффициенты; вероятностные неравенства*

Рассматривается задача доверительного оценивания вектора регрессионных коэффициентов $a \in R^d$ в классической модели, [1]:

$$Y = Xa + \varepsilon,$$

где $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)^T$ — отклики, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)^T$ — погрешности, $a = (a_1, a_2, ..., a_d)^T$ – неизвестный вектор коэффициентов, $X = \|X_{i,j}\|_{i,j=1}^{n,d}$ — неслучайная матрица планирования регрессионного эксперимента. Погрешности $\varepsilon_i, i = 1, 2, ..., n$ считаем независимым с общим гауссовским распределением $N(0, \sigma^2)$, $\sigma^2$ — неизвестно. Несмещенная оценка $\widehat{a}$ для вектора $a$ строится по методу наименьших квадратов, [1]: $\widehat{a} = (X^T X)^{-1} X^T Y$, при этом случайный вектор $\widehat{a} - a$ имеет гауссовское распределение $N(0, \sigma^2 (X^T X)^{-1})$. Обозначим через $X_k \in R^n, k = 1, 2, .., n$ столбцы матрицы $X$ и через $|.|$ — евклидову норму в $R^n$. Известно [1, с. 532], что $D\widehat{a}_k \geq \sigma^2 / |X_k|^2$ и равенство достигается только в том случае, когда векторы $X_k$ ортогональны. В настоящей работе мы доказываем еще один оптимизационный результат. Обозначим $\Delta^2 = d^{-1} Tr X^T X = d^{-1} \sum_{k=1}^{d} |X_k|^2$, $S^2_{\text{ост.}} = |Y - X\widehat{a}|^2$ и через $F_{d,n-d}$ — случайную величину (сл. в.), имеющую распределение Фишера с $(d, n-d)$ степенями свободы.

Стандартное доверительное множество для векторного параметра $a$ имеет вид, [1]:

$$\{|X(\widehat{a} - a)|^2 / S^2_{\text{ост.}} \leqslant \lambda_\alpha\},$$

где $\lambda_\alpha$ – соответствующая квантиль сл. в. $F_{d,n-d}$. В ряде случаев, на наш взгляд, более естественны доверительные множества в виде шаров с центром в точке $\widehat{a}$. В теореме 1 показано, что доверительная вероятность для таких множеств, точнее, величина $P\left\{\Delta^2 |\widehat{a} - a|^2 / S^2_{\text{ост.}} < x\right\}$, для всех $x > 0$ максимальна, если столбцы матрицы $X$ ортогональны и имеют одинаковую длину.

**Теорема 1.** *Для всех $x > 0$*

$$P\left\{\frac{\Delta^2 |\widehat{a} - a|^2}{S^2_{\text{ост.}}} < x\right\} \leqslant P\left\{F_{d,n-d} < x\right\},$$

*причем равенство достигается тогда и только тогда, когда* (А) *векторы $X_k$ ортогональны друг другу и имеют одинаковую длину.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 05-01-97924 р)

*Доказательство.* Случайная величина $\sigma^{-2}S^2_{\text{ост.}}$ не зависит от случайного вектора $\widehat{a}$ и имеет распределение хи-квадрат с $n-d$ степенями свободы [1, с. 530], поэтому достаточно показать, что величина

$$J = P\left\{\Delta^2|\widehat{a}-a|^2 < x\right\}$$

достигает своего максимума только при выполнении условий (A) теоремы 1.

Обозначим через $\xi_k, k = 1,2,.,d$ независимые нормальные(0,1) сл. в. и через $\lambda_k > 0$ — собственные числа матрицы $X^TX$. Заметим, что условия (A) теоремы 1 эквивалентны равенствам $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_d$. Переходя к базису из собственных векторов матрицы $X^TX$, получаем

$$J = P\left\{\Delta^2 \sum_{k=1}^{d}\frac{\xi_k^2}{\lambda_k} < x\right\}.$$

Зафиксируем $\Delta^2 = d^{-1}\sum_{k=1}^{d}\lambda_k = 1$. Нам достаточно показать, что

$$f_1(x) \stackrel{def}{=} P\left\{\sum_{k=1}^{d}\frac{\xi_k^2}{\lambda_k} < x\right\} \leqslant$$
$$\leqslant P\left\{\sum_{k=1}^{d}\xi_k^2 < x\right\} \stackrel{def}{=} f_2(x), \quad \forall x>0,$$

если выполнены условия

$$d^{-1}\sum_{k=1}^{d}\lambda_k = 1, \quad \lambda_k > 0, \quad k = 1,2,..,d, \tag{1}$$

при этом если не выполнено (A), то тогда $f_1(x) \not\equiv f_2(x)$.

Дальнейшие рассуждения используют свойства вполне монотонных функций [2, с. 505]:

**Теорема A** (*С. Н. Бернштейн*). *Пусть функция $\phi(z)$ определена на $(0,\infty)$ и бесконечно дифференцируема, тогда для того чтобы она представлялась в виде преобразования Лапласа–Стильтеса*

$$\phi(z) = \int_{0-}^{\infty} e^{-zx}dF(x)$$

*для некоторой неубывающей, непрерывной слева функции $F(x)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\phi(z)$ была бы вполне монотонна, т. е. $\forall n = 0,1,2,...,\forall z>0$*

$$(-1)^n\phi^{(n)}(z) = (-1)^n\frac{d^n\phi(z)}{dz^n} \geqslant 0.$$

**Следствие**. *Пусть функция $\phi(z) = \int_0^\infty e^{-zx}f(x)\,dx, f(x) \in L_\infty(R^1_+)$ вполне монотонна, тогда $f(x) \geqslant 0$ почти для всех $x \geqslant 0$.*

Положим теперь $f(x) = f_2(x) - f_1(x)$. Нетрудно найти преобразование Лапласа функций $f_1(x), f_2(x)$:

$$\varphi_2(z) \stackrel{def}{=} \int_0^\infty e^{-zx}f_2(x)dx =$$
$$= \frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-zx}\,df_2(x) = \frac{1}{z}Ee^{-z\sum_{k=1}^{d}\xi_k^2} =$$
$$= \frac{1}{z}\prod_{k=1}^{d}Ee^{-z\xi_k^2} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{\sqrt{1+2z}}\right)^d, \tag{2}$$

и аналогично

$$\varphi_1(z) \stackrel{def}{=} \int_0^\infty e^{-zx}f_1(x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-zx}\,df_1(x) =$$
$$= \frac{1}{z}\prod_{k=1}^{d}\left(\frac{1}{\sqrt{1+2z/\lambda_k}}\right)^d. \tag{3}$$

Отметим, что функции $z\varphi_1(z), z\varphi_2(z)$ вполне монотонны в силу теоремы A и соотношений (3), (4). Ввиду следствия к теореме A для доказательства теоремы достаточно показать, что $\forall z>0, k\geqslant 0$

$$R_k(z) = (-1)^k\varphi_2^{(k)}(z) - (-1)^k\varphi_1^{(k)}(z) \geqslant 0,$$

в этом случае, из $R_k(z) \not\equiv 0$ будет следовать, что $f(x) \not\equiv 0$. Другими словами, нам необходимо доказать, что максимум величины $L_k = (-1)^k\varphi_1^{(k)}(z)$ при условиях (1) достигается, когда все $\lambda_k$ равны друг другу.

Пусть $\lambda_i \neq \lambda_j$ для некоторых $i \neq j$. Без ограничения общности будем считать, что $i = 1, j = 2, \lambda_2 > \lambda_1$. Зафиксируем все $\lambda_k, k \geqslant 3$. Считая $\lambda_2$ функцией от $\lambda_1$, найдем производную:

$$\frac{\partial L_k(z)}{\partial\lambda_1} = (-1)^k\left(z\varphi_1(z)\psi(z)\right)^{(k)}, \tag{4}$$

где

$$\psi(z) = \frac{1}{\lambda_1^2\,(1+2z/\lambda_1)} - \frac{1}{\lambda_2^2\,(1+2z/\lambda_2)}.$$

Нетрудно видеть, что $(-1)^k\psi^{(k)}(z) \geqslant 0, \forall z, k$, т. е. функция $\psi(z)$ вполне монотонна, следовательно, произведение функций $z\varphi_1(z)$ и $\psi(z)$ вполне монотонно как произведение вполне монотонных функций, [2, с. 507], и, стало быть, в (4) $\partial L_k(z)/\partial\lambda_1 \geqslant 0, \forall z>0, k\geqslant 0$. Таким образом, величина $L_k(z)$ не уменьшается сразу для всех $z, k$, если параметр $\lambda_1$ увеличивать, пока $\lambda_1 < \lambda_2$. Отсюда нетрудно вывести, что максимум величины $L_k(z)$ достигается при равных $\lambda_k$.

Теорема доказана.

**Замечание.** *Случай доверительного оценивания параметра $b = Aa$, где $A$ — невырожденная квадратная матрица, сводится к рассмотренному выше, поскольку мы можем записать $Y = X'b + \varepsilon$, где $X' = XA^{-1}$, и применить далее теорему 1 по параметру $b$.*

Рассуждения теоремы 1 допускают следующее обобщение. Пусть $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ — неотрицательные, независимые, одинаково распределенные сл. в. и

$$f(z) = \ln \int_0^\infty e^{-zx} dP\{\xi_1 < x\}.$$

Обозначим $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, $R_+{}^n = \{\lambda \,|\, \lambda_i > 0, \forall i\}$. Для функции $G(\lambda)$, определенной на $R_+{}^n$, обозначим $B = \{\lambda \in R_+{}^n \,|\, G(\lambda) = 1\}$.

**Теорема 2.** *Пусть выполнены следующие условия:*

A1) *функция $G(\lambda)$ непрерывно дифференцируема на $R_+{}^n$, множество $B$ не пусто,*

A2) $\partial G(\lambda)/\partial \lambda_i > 0, \forall i, \forall \lambda \in R_+{}^n$,

A3) *функции* $h_{i,j}(z) = f'(\lambda_i z) - f'(\lambda_j z) \times \frac{\partial G(\lambda)}{\partial \lambda_i} / \frac{\partial G(\lambda)}{\partial \lambda_j}$ *вполне монотонны* $\forall i \neq j, \forall \lambda_i < \lambda_j$,

*тогда существует* $\lambda_0 : G(\lambda_0, \lambda_0, ..., \lambda_0) = 1$, *такое, что*

$$\sup_{\lambda \in B} P\left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i < x\right\} = P\left\{\lambda_0 \sum_{i=1}^n \xi_i < x\right\}. \quad (5)$$

*Доказательство.* Пусть $\overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, ..., \overline{\lambda}_n) \in B$, причем $\overline{\lambda}_i < \overline{\lambda}_j$ для некоторых $i \neq j$. Зафиксируем все $\overline{\lambda}_k$, кроме $\overline{\lambda}_i$ и $\overline{\lambda}_j$ и по теореме о неявной функции из условия $G(\lambda) = 1$ определим $\lambda_j$ как дифференцируемую функцию от $\lambda_i$. Ясно, что

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial \lambda_i} = -\frac{\partial G(\lambda)}{\partial \lambda_i} \Bigg/ \frac{\partial G(\lambda)}{\partial \lambda_j} < 0,$$

т. е. с ростом $\lambda_i$ величина $\lambda_j$ уменьшается.

Нетрудно показать, что функция $\lambda_j(\lambda_i)$ продолжается из окрестности $\overline{\lambda}_i$, по крайней мере, на отрезок $[\overline{\lambda}_i, \overline{\lambda}_i']$, где величина $\overline{\lambda}_i'$ определяется из равенства $\overline{\lambda}_i' = \lambda_j(\overline{\lambda}_i')$. Отсюда также можно вывести существование величины $\lambda_0$, используемой в (5), причем $\lambda_0$ единственно в силу условия A2). Далее, следуя доказательству теоремы 1, определим преобразование Лапласа–Стильтьеса вероятности в левой части (5):

$$\phi_1(z) = \frac{1}{z} \exp\left\{\sum_{i=1}^n f(\lambda_i z)\right\}.$$

Нам нужно найти максимум величины $L_k = (-1)^k \phi_1^{(k)}(z)$. Но в соответствии с условием A3)

$$\frac{\partial L_k}{\partial \lambda_i} = (-1)^k (z\phi_1(z) h_{i,j}(z))^{(k)} \geqslant 0,$$

что позволяет доказать, что максимум $L_k$ достигается при одинаковых $\lambda_i$.

Теорема доказана.

**Замечание.** *Случай, когда* $\partial G(\lambda)/\partial \lambda_i < 0$, $\forall i$, $\forall \lambda \in R_+{}^n$, *сводится к рассмотренному в теореме 1 заменой* $G \longrightarrow 1/G$.

**Пример.** *Пусть сл. в.* $\xi_i, i = 1, 2, ..., n$ *независимы и имеют одинаковое гамма-распределение*, обозначим

$$B_0 = \{\lambda \in R_+{}^n \,\Bigg|\, \prod_{i=1}^n \lambda_i = 1\},$$

$$B = \{\lambda \in R_+{}^n \,\Bigg|\, \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} = n\},$$

*тогда* $\forall x > 0$

$$\sup_{\lambda \in B_0} P\left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i < x\right\} = P\left\{\sum_{i=1}^n \xi_i < x\right\},$$

$$\sup_{\lambda \in B_1} P\left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i < x\right\} = P\left\{\sum_{i=1}^n \xi_i < x\right\}.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Боровков, А. А.** Математическая статистика / А. А. Боровков. Новосибирск : Наука, изд-во Института математики, 1997. 772 с.
2. **Феллер, В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения / В. Феллер. М. : Мир, 1967. Т. 2. 752 с.

## ОБ АВТОРЕ

**Бакиров Наиль Кутлужанович,** вед. науч. сотр. Ин-та математики с ВЦ УНЦ РАН. Дипл. математик (МГУ, 1975). Д-р физ.-мат. наук (СПб., 1995). Исслед. в обл. мат. статистики, теории вероятностей.