УДК 519.8:544.2

А. В. ЖИБЕР, Н. М. ЦИРЕЛЬМАН

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЙ АГРЕГАТНОГО СОСТОЯНИЯ ВОДОРОДА

Исследован процесс фазового превращения водорода с изменением агрегатного состояния. С помощью нелокальных преобразований двухфазная задача затвердевания жидкого водорода в ограниченной области сведена к краевой задаче для линейного уравнения теплопроводности. Построено точное решение задачи затвердевания жидкого водорода в полупространстве.
Жидкий водород; затвердевание; плавление; фазовое превращение

ВВЕДЕНИЕ

Использование жидкого водорода встречает большие трудности, обусловленные низкой температурой его кипения ($\approx$ 20К), узким температурным диапазоном существования жидкого состояния и малой плотностью (≈ 71 кг / м^3). Это побуждает исследователей к поиску путей преодоления влияния перечисленных отрицательных факторов. В настоящее время изучаются возможности хранения водорода в виде сухого гидрида металлов, проводятся работы по получению гелеобразного и шугообразного водорода. Последний представляет собой смесь твердого и жидкого водорода и, например, в качестве ракетного топлива может рассматриваться «шуга» при массовом соотношении фаз примерно 1:1. В свете сказанного представляется актуальным решение проблемы об изменении агрегатного состояния водорода.

1. ЗАДАЧА О ФАЗОВОМ ПЕРЕХОДЕ ДЛЯ ВОДОРОДА В ОДНОМЕРНОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Математическая модель исследуемого процесса относительно изменения во времени t температур T_1 и T_2 и координаты границы $x(t)$ включает в себя

• уравнения теплопроводности в твердом и жидком водороде соответственно

$$C(p,T_1)\frac{\partial T_1}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_1(T)\frac{\partial T_1}{\partial x}\right),\ 0<x<x(t),\ t>0, \tag{1.1}$$

$$C(p,T_2)\frac{\partial T_2}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_2(T)\frac{\partial T_2}{\partial x}\right),\ x(t)<x<b,\ t>0, \tag{1.2}$$

• описание начального распределения температуры в имеющихся при $t = 0$ слоях твердого и жидкого водорода

$$T_1(x,0)=T_1^o(x),\quad 0<x<a,\quad x(0)=a, \tag{1.3}$$
$$T_2(x,0)=T_2^o(x),\quad a<x<b, \tag{1.4}$$

• задание температуры затвердевания на границе раздела старой и новой фаз

$$T_1(x(t),t)=T_2(x(t),t)=T_s,\quad t>0 \tag{1.5}$$

и условия Стефана на ней

$$L\frac{dx(t)}{dt}=\lambda_1(T)\frac{\partial T_1}{\partial x}-\lambda_2(T)\frac{\partial T_2}{\partial x}, \quad x=x(t),\quad t>0, \tag{1.6}$$

• задание плотности теплового потока q_W на наружных поверхностях старой и новой фаз

$$-\lambda_1(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial x}=q_{W1},\quad x=0,\quad t>0, \tag{1.7}$$
$$-\lambda_2(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial x}=q_{W2},\quad x=b,\quad t>0. \tag{1.8}$$

Примем объемные теплоемкости $C(p,T_i)$, теплопроводности λ_i и объемную теплоту затвердевания L для водорода равными

$$C(p,T_i)=a_1T_i^3,\quad \lambda_i(T_i)=D_ic_{1i}^2T_i^3(c_{2i}+T_i^4)^{-2},\quad i=1,2, \tag{1.9}$$

$$c_{11}=\frac{4Lc_{12}}{a_1}\left[\frac{a_1}{4L}-\frac{1}{T_s^4+c_{22}}\right],\quad c_{21}=c_{22}+\frac{4L}{a_1}. \tag{1.10}$$

Зависимости (1.9), (1.10) приведены в [1–3].

Рассмотрим задачу (1.1)–(1.8) с невырожденной начальной фазой, когда в начальный момент времени часть заданного объема заполнял твердый водород, а оставшуюся жидкий, т. е. $x(0) = a$, $a > 0$.

При использовании точечной замены

$$T_i=\left[\frac{c_{1i}}{\theta_i}-c_{2i}\right]^{1/4},\quad i=1,2. \tag{1.11}$$

исходная задача (1.1)–(1.8) при выполнении условий (1.9) примет относительно функций $\theta_1(x,t)$, $\theta_2(x,t)$ и $x(t)$ вид

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial t}=\frac{D_1}{a_1}\theta_1^2\frac{\partial^2\theta_1}{\partial x^2},\quad 0<x<x(t),\quad t>0, \tag{1.12}$$
$$\frac{\partial\theta_2}{\partial t}=\frac{D_2}{a_1}\theta_2^2\frac{\partial^2\theta_2}{\partial x^2},\quad x(t)<x<b,\quad t>0, \tag{1.13}$$
$$\theta_1(x,0)=\theta_1^o(x),\quad 0<x<a,\quad x(0)=a, \tag{1.14}$$
$$\theta_2(x,0)=\theta_2^o(x),\quad a<x<b, \tag{1.15}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №05-0197909-р-агидель а)

$$\theta_1(x(t),t)=\theta_2(x(t),t)=\theta_s,\quad t>0, \tag{1.16}$$

$$\frac{dx(t)}{dt}=D_3\frac{\partial\theta_1}{\partial x}-D_4\frac{\partial\theta_2}{\partial x},\quad x=x(t),\quad t>0, \tag{1.17}$$

$$\frac{\partial\theta_1(0,t)}{\partial x}=F_1(t),\quad t>0, \tag{1.18}$$

$$\frac{\partial\theta_2(b,t)}{\partial x}=F_2(t),\quad t>0. \tag{1.19}$$

Здесь обозначены: $D_3=-\dfrac{c_{11}D_1}{4L}$, $D_4=-\dfrac{c_{12}D_2}{4L}$, $\theta_s=\dfrac{c_{11}}{T_s^4+c_{21}}$, $F_i(t)=\dfrac{4q_{Wi(t)}}{c_{1i}D_i}$, $\theta_i^o(x)=\dfrac{c_{1i}}{(T_s^o(x))^4+c_{2i}}$, $i=1,2$.

Решение краевой задачи (1.12)–(1.19) основано на нелокальном преобразовании

$$\beta_i\,dx=v_i(y,t)\,dy+\alpha_i\frac{\partial v_i(y,t)}{\partial y}\,dt,$$
$$v_i(y,t)=\theta_i(x,t),\quad i=1,2. \tag{1.20}$$

Здесь $\alpha_i,\ \beta_i,\ i=1,2$ постоянные.

Преобразование типа (1.20) использовались для построения точных решений нелинейного параболического уравнения в работах [3–5]. В [6-8] эти преобразования применялись при исследовании краевых задач теории тепломассопереноса: в частности, в [6] с их использованием исследована однофазная задача со свободной границей для водорода.

При замене (1.20) нелинейным уравнениям (1.12) и (1.13) соответствуют линейные уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}=\alpha_1\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}\quad\text{и}\quad\frac{\partial v_2}{\partial t}=\alpha_2\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}\,.$$

Для этих уравнений рассмотрим следующую краевую задачу: найти $v_i(t,y),\ i=1,2$ и $y(t)$ такие, что

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}=\alpha_1\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2},\quad y_1(t)<y<y(t),\quad t>0, \tag{1.21}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t}=\alpha_2\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2},\quad y(t)<y<y_2(t),\quad t>0, \tag{1.22}$$

$$v_1(y,0)=\theta_1^o\left(\Phi_1^{-1}(y)\right),\quad c<y<0, \tag{1.23}$$

$$v_2(y,0)=\theta_2^o\left(\Phi_2^{-1}(y)\right),\quad 0<y<d, \tag{1.24}$$

$$v_1(y(t),t)=v_2(y(t),t)=\theta_s,\quad t>0, \tag{1.25}$$

$$\frac{dy(t)}{dt}=k_1\frac{\partial v_1(y(t),t)}{\partial y}-k_2\frac{\partial v_2(y(t),t)}{\partial y},\quad t>0, \tag{1.26}$$

$$\beta_1\frac{\partial v_1(y_1(t),t)}{\partial y}-F_1(t)v_1(y_1(t),t)=0,\quad t>0, \tag{1.27}$$

$$\beta_2\frac{\partial v_2(y_2(t),t)}{\partial y}-F_2(t)v_2(y_2(t),t)=0,\quad t>0, \tag{1.28}$$

где имеем $\alpha_i=\dfrac{D_i}{a_1}\beta_i^2$, $\Phi_i(x)=\int_a^x\frac{\beta_i}{\theta_i^o(\xi)}\,d\xi$, $i=1,2$, $k_1=\dfrac{\beta_1^2}{\theta_s^2}D_3-\dfrac{\alpha_1}{\theta_s}$, $y_1(t)=-\displaystyle\int\limits_0^a\frac{\beta_1}{\theta_1^o(\xi)}\,d\xi-\frac{\alpha_1}{\beta_1}\int\limits_0^t F_1(\tau)\,d\tau$, $y_2(t)=\displaystyle\int\limits_a^b\frac{\beta_2}{\theta_2^o(\xi)}\,d\xi-\frac{\alpha_2}{\beta_2}\int\limits_0^t F_2(\tau)d\tau$, $k_2=\dfrac{\beta_1\beta_2}{\theta_s^2}D_4$, $y_1(0)=c$, $y_2(0)=d$, $y(0)=0$ и выполнено соотношение $\beta_1c_{12}=c_{11}\beta_2$.

Краевые задачи со свободной границей для линейных параболических уравнений типа (1.20)–(1.27) исследовались многими авторами (см., например, [9, 11]).

Непосредственно проверяется, что при выполнении условий (1.10) решение $\theta_1(x,t)$, $\theta_2(x,t)$, $x(t)$ задачи (1.12)–(1.19) вычисляется по формулам

$$x(t)=a+$$
$$+\int\limits_0^t\left[\frac{v_1(y(\tau),\tau)}{\beta_1}\cdot\frac{dy(\tau)}{d\tau}+\frac{\alpha_1}{\beta_1}\cdot\frac{\partial v_1(y(\tau),\tau)}{\partial y}\right]d\tau,$$
$$\theta_i(x,t)=v_i(\psi_i(x,t),t),\quad i=1,2, \tag{1.29}$$

где функции $y=\psi_i(x,t)$ задаются неявным образом соотношениями

$$x=\int\limits_{L_i}\frac{v_i(\xi,\tau_i}{\beta_i}d\xi+\frac{\alpha_i}{\beta_i}\cdot\frac{\partial v_i(\xi,\tau)}{\partial\xi}d\tau+a,\ i=1,2. \tag{1.30}$$

Здесь L_1 — кривая, соединяющая точки $(0,0)$ и $M(y,t)$ и лежащая в области $\Omega_1=\{(y,t):\ y_1(t)\leqslant y\leqslant 0,\ t>0\}$, а L_2 — кривая, соединяющая точки $(0,0)$ и $M(y,t)$ и лежащая области $\Omega_2=\{(y,t):\ 0\leqslant y\leqslant y_2(t),\ t>0\}$.

Отметим, что в силу уравнений (1.20) и (1.22) криволинейные интегралы в правой части формул (1.30) не зависят от пути интегрирования.

Теперь решение исходной задачи (1.1)–(1.8) определяется формулами (1.11), (1.29) и (1.30), где функции $v_1(y,t)$, $v_2(y,t)$ и $y(t)$ — решение вспомогательной задачи (1.21)–(1.28).

Приведем также формулы, обратные к (1.29), (1.30). Пусть функции $\theta_1(x,t)$, $\theta_2(x,t)$, $x(t)$ задают решение задачи о фазовом переходе (1.12)–(1.19). Тогда имеем

$$y(t)=\frac{\beta_1}{\theta_s}x(t)-\frac{\alpha_1}{\beta_1}\int\limits_0^t\frac{\partial\theta_1(x(t),t)}{\partial x}d\tau,$$
$$v_i(y,t)=\theta_i(\varphi_i(y,t),t)\,,\ i=1,\ 2,$$

где функции $x=\varphi_i(y,t)$ определяются из соотношения

$$y=\int\limits_{J_i}\frac{\beta_i}{\theta_i(\xi,\tau)}d\xi-\frac{\alpha_i}{\beta_i}\frac{\partial\theta_1(\xi,\tau)}{\partial\xi}d\tau,\ \ i=1,2.$$

Здесь J_1 — кривая, соединяющая точки $(a,0)$ и (x,t) области $D_1 = \{(x,t):\ 0 \leqslant x \leqslant x(t),\ t > 0\}$, а J_2 — кривая, соединяющая точки $(a,0)$ и (x,t) области $D_2 = \{(x,t):\ x(t) \leqslant x \leqslant b,\ t > 0\}$.

В заключении этого параграфа рассмотрим задачу затвердевания жидкого водорода в ограниченной области, когда в начальный момент времени весь заданный объем заполнен жидким водородом.

В этом случае $a = 0$ и начальное условие (1.3) отсутствует. Таким образом, мы имеем краевую задачу (1.1), (1.2), (1.4)–(1.8), которая заменой (1.11) при выполнении условий (1.9) приводится к задаче (1.12), (1.13), (1.15)–(1.19).

Для построения решения этой задачи рассмотрим вспомогательную (1.21), (1.22), (1.24)–(1.28) с вырожденной фазой ($a = 0$). Как и ($a = 0$). Как и выше, прямым вычислением нетрудно показать, что формулы (1.29) и (1.30) дают в случае $a = 0$ решение краевой задачи (1.12), (1.13), (1.15)–(1.19).

2. ЗАТВЕРДЕВАНИЕ ЖИДКОГО ВОДОРОДА В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Рассматривается задача затвердевания жидкого водорода вида

$$C(p,T_1)\frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_1(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial x}\right), \quad a < x < x(t), \quad t > 0, \tag{2.1}$$

$$C(p,T_2)\frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_2(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial x}\right), \quad x(t) < x < \infty, \quad t > 0, \tag{2.2}$$

$$T_1(a,t) = T_1^o,\ t > 0,\ \ x(0) = a, \tag{2.3}$$

$$T_2(x,0) = T_2^o,\ \ a < x < \infty, \tag{2.4}$$

$$T_1(x(t),t) = T_2(x(t),t) = T_s,\ \ t > 0, \tag{2.5}$$

$$L\frac{dx(t)}{dt} = \lambda_1(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial x} - \lambda_2(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial x}, \quad x = x(t), \quad t > 0, \tag{2.6}$$

Здесь T_1^o, T_2^o — постоянные, а функции $C(p,T_i)$, $\lambda_i(T_i)$, $i = 1,2$ определяются формулами (1.9) и (1.10).

После точечной замены задача (2.1)–(2.6) примет вид

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial t} = \frac{D_1}{a_1}\theta_1^2\frac{\partial^2\theta_1}{\partial x^2}, \quad a < x < x(t), \quad t > 0, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial t} = \frac{D_2}{a_1}\theta_2^2\frac{\partial^2\theta_2}{\partial x^2}, \quad x(t) < x < \infty, \quad t > 0, \tag{2.8}$$

$$\theta_1(a,t) = \theta_1^o, \quad t > 0, \quad a = x(0), \tag{2.9}$$

$$\theta_2(x,0) = \theta_2^o, \quad a < x < \infty, \tag{2.10}$$

$$\theta_1(x(t),t) = \theta_2(x(t),t) = \theta_s, \quad t > 0, \tag{2.11}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = D_3\frac{\partial\theta_1}{\partial x} - D_4\frac{\partial\theta_2}{\partial x}, \quad x = x(t), \quad t > 0. \tag{2.12}$$

Здесь, как и в п. 1, обозначены:

$$\theta_i^o(x) = \frac{c_{1i}}{(T_s^o)^4 + c_{2i}},\ i = 1,2, \quad \theta_s = \frac{c_{11}}{T_s^4 + c_{21}},$$

$$D_3 = -\frac{c_{11}D_1}{4L}, \qquad D_4 = -\frac{c_{12}D_2}{4L}.$$

Для построения точного решения краевой задачи (2.7)–(2.12) рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = \alpha_1\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}, \quad y_1(t) < y < y(t), \quad t > 0, \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = \alpha_2\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}, \quad y(t) < y < \infty, \quad t > 0, \tag{2.14}$$

$$v_1(y_1(t),t) = \theta_1^o, \quad t > 0, \tag{2.15}$$

$$\alpha_1\frac{\partial v_1(y_1(t),t)}{\partial y} + \theta_1^o\frac{dy_1(t)}{dt} = 0, \quad t > 0, \tag{2.16}$$

$$v_2(y,0) = \theta_2^o, \quad 0 < y < \infty, \tag{2.17}$$

$$v_1(y(t),t) = v_2(y(t),t) = \theta_s, \quad t > 0, \tag{2.18}$$

$$\frac{dy}{dt} = k_1\frac{\partial v_1}{\partial y} - k_2\frac{\partial v_2}{\partial y}, \quad y = y(t), \quad t > 0. \tag{2.19}$$

где величины $\alpha_1,\ \alpha_2,\ k_1$ и k_2 определены в п. 1.

Следуя [12], решение краевой задачи (2.13)–(2.19) будем искать в виде

$$v_i(y,t) = A_i + B_i\Phi\left(\frac{y}{2\sqrt{\alpha_i t}}\right),\ i = 1,2, \quad y_1(t) = q\sqrt{t}, \quad y(t) = p\sqrt{t}. \tag{2.20}$$

Здесь обозначено

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x \exp(-\xi^2)\,d\xi.$$

Подставляя функции (2.20) в (2.13)–(2.19), получаем

$$\begin{gathered} A_1 = \theta_1^o + \frac{\theta_1^o q\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha_1}}\exp\left(\frac{q^2}{4\alpha_1}\right)\Phi\left(\frac{q}{2\sqrt{\alpha_1}}\right), \\ B_1 = -\frac{\theta_1^o q\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha_1}}\cdot\exp\left(\frac{q^2}{4\alpha_1}\right), \\ A_2 = \theta_2^o - \frac{\theta_s - \theta_2^o}{\left[\Phi\left(\frac{p}{2\sqrt{\alpha_2}}\right) - 1\right]}, \\ B_2 = \frac{\theta_s - \theta_2^o}{\left[\Phi\left(\frac{p}{2\sqrt{\alpha_2}}\right) - 1\right]}, \end{gathered} \tag{2.21}$$

где постоянные p и q — решение трансцендентной системы уравнений

$$\frac{\theta_1^o q\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha_1}}\exp\left(\frac{q^2}{4\alpha_1}\right)\times$$
$$\times\left[\Phi\left(\frac{q}{2\sqrt{\alpha_1}}\right)-\Phi\left(\frac{p}{2\sqrt{\alpha_1}}\right)\right]=\theta_s-\theta_1^o,$$
$$\frac{p}{2}+\frac{\theta_1^o q}{2\alpha_1}k_1\exp\left(\frac{q^2-p^2}{4\alpha_1}\right)+$$
$$+\frac{\theta_s-\theta_2^o}{\left(\Phi\left(\frac{p}{2\sqrt{\alpha_1}}\right)-1\right)}\cdot\frac{k_2}{\sqrt{\pi\alpha_2}}\exp\left(-\frac{p^2}{4\alpha_2}\right)=0, \tag{2.22}$$

при $p > q$.

Теперь, используя преобразования (1.21), нетрудно показать, что решение краевой задачи (2.7)–(2.12) определяется формулами

$$x(t)=a+\frac{p\theta_s-q\theta_1^o}{\beta_1}\sqrt{t}\,,\qquad \theta_i(x,t)=v_i(\psi_i(x,t),t)\,, \tag{2.23}$$

где функции $y=\psi_i(x,t)$, $i=1,2$ задаются неявным образом, а именно соотношениями

$$x=a+\int\limits_{L_1}\frac{v_1(\xi,\tau)}{\beta_i}d\xi+\frac{\alpha_1}{\beta_1}\cdot\frac{\partial v_1(\xi,\tau)}{\partial\xi}\,d\tau,\qquad x=a+\int\limits_{L_2}\frac{v_2(\xi,\tau)}{\beta_2}d\xi+\frac{\alpha_2}{\beta_2}\cdot\frac{\partial v_2(\xi,\tau)}{\partial\xi}\,d\tau \tag{2.24}$$

соответственно. Здесь L_1 — кривая, соединяющая точки $(0,0)$ и (y,t) в области $q\sqrt{t}\leqslant y\leqslant p\sqrt{t},\ t\geqslant 0$, а L_2 — кривая, соединяющая точки $(0,0)$ и (y,t) в области $p\sqrt{t}\leqslant y<\infty,\ t\geqslant 0$.

Таким образом, решение исходной задачи (2.1)–(2.6) вычисляется с помощью формул (1.11), (2.20)–(2.24).

ОБОЗНАЧЕНИЯ

x и t — координата и время;

$x(t)$ — координата границы раздела фаз;

$T(x,t)$ и T_s — текущее значение температуры и температуры затвердевания;

C и λ — изобарная объемная теплоемкость и коэффициент теплопроводности фаз;

$q_w(t)$ — плотность теплового потока к ограничивающей поверхности тела;

L — объемная теплота затвердевания (плавления);

p — давление.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гамбург, Д. Ю.** Водород: свойства, получение, хранение, транспортирование, применение / Д. Ю. Гамбург, Дубовкин Н.Ф.. М. : Химия, 1989. 672 с.
2. **Свойства** твердого и жидкого водорода. М. : Изд-во стандартов, 1969. 136 с.
3. **Rosen, G.** Nonlinear heat conduction in solid H_2 / G. Rosen // Physical Rev. 1979. Vol. 19, No. 4. P. 2398–2399.
4. **Bluman, G.** On the remarkable nonlinear diffusion equation / G. Bluman, S. Kamei // J. Math. Physics. 1980. Vol. 21, No. 5. P. 1019–1023.
5. **Жибер, А. В.** Точные решения задачи динамики адсорбции-десорбции с нелинейной изотермой сорбции / А. В. Жибер, Н. М. Цирельман // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1989. № 5. С. 107–112.
6. **Цирельман, Н. М.** Теплофизика изменений агрегатного состояния водорода / Н. М. Цирельман, А. В. Жибер // Вестник УГАТУ. Уфа, 2002. Т. 3, № 1. С. 45–52.
7. **Жибер, А. В.** Определение температурных полей в пространственно неоднородной нелинейной среде / А. В. Жибер, Н. М. Цирельман // Вопросы теории и расчета рабочих процессов тепловых двигателей. Уфа, 2004. С. 421–431.
8. **Жибер, А. В.** Нелокальные преобразования в теории тепломассопереноса / Жибер А.В., Цирельман Н.М. // Вестник УГАТУ. Уфа, 2005. Т. 6, № 2. С. 45–51.
9. **Рубинштейн, Л. И.** Проблема Стефана / Л. И. Рубинштейн. Рига : Звайзгне, 1967. 457 с.
10. **Фридман, А.** Уравнения с частными производными параболического типа / А. Фридман. М. : Мир, 1968. 425 с.
11. **Мейерманов, А. М.** Задача Стефана / А. М. Мейерманов. Новосибирск : Наука, 1986. 239 с.
12. **Тихонов, А. М.** Уравнения математической физики / А. М. Тихонов, А. А. Самарский. М. : Наука, 1966. 726 с.

ОБ АВТОРАХ

Жибер Анатолий Васильевич, проф., вед. науч. сотр. ИМ УНЦ РАН. Дипл. математик (Новосиб. гос. ун-т, 1969). Д-р физ.-мат. наук по диф. уравнениям (защ. в ИМиМ УрОРАН, Екб., 1994). Иссл. в обл. совр. группового анализа диф. уравнений.

Цирельман Наум Моисеевич, проф. каф. теории авиац. и ракетн. двигателей. Дипл. инж.-мех. (Одесск. технол. ин-т пищевой и холодильной пром-ти, 1963). Д-р техн. наук по мат. моделированию (защ. в Казанск. гос. техн. ун-те, 1995). Иссл. в обл. числ.-аналитич. и эксперим. методов тепломассопереноса.