

воспользуемся тем, что отношение $\frac{\beta}{m^*}$ является масштабно-инвариантной величиной, действительно:

$$\frac{\beta}{m^*} = \frac{\partial(m^* \rho_0)}{\partial P m^*} = \frac{\partial(\langle m \rangle_L \rho_0)}{\partial P \langle m \rangle_L} = \frac{\langle \beta \rangle_L}{\langle m \rangle_L},$$

откуда следует

$$\beta = m^* \frac{\langle \beta \rangle_L}{\langle m \rangle_L}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены выражения, позволяющие однозначно интерпретировать фрактальное поле сглаженным изотропным полем, отражающим поведение истинного фрактального поля в «среднем».

Методика интерпретации и определения параметров уравнения фильтрации в среде с фрактальными свойствами позволяет на основе Фурье-анализа провести оценку фрактальных размерностей пористости и проницаемости газонефтяных месторождений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. O'Shaughnessy, B. Defection of Fractals / B. O'Shaughnessy, I. Procaccia // Phys. Rev. A. 1989. Vol. 32, No. 5. P. 3073–3083.
2. Mandelbrot, B. The Fractal Geometry of Nature / B. Mandelbrot. San Francisco: Freeman, 1992. 656 p.

ОБ АВТОРАХ



Багманов Валерий Хусаинович, доц. каф. телекоммун. систем. Дипл. физик (МГУ, 1974). Канд. физ.-мат. наук по применению выч. техники, мат. моделир. и мат. методов в науч. исследованиях (БГУ, 1994). Иссл. в обл. моделир. и обраб. случайн. сигналов.



Байков Виталий Анварович, зам. ген. дир. ООО «ЮНГ-НТЦ Уфа». Дипл. физик, преп. физики (БГУ, 1977). Д-р физ.-мат. наук (ИПМ им. М. В. Келдыша, 1991) по групповому анализу уравнений нелинейной механики. Иссл. в обл. волновых процессов, нелинейн. механики, физики нефти, мат. и физ. моделирования.



Латыпов Альберт Рифович, ген. дир. ООО «ЮНГ-НТЦ Уфа». Дипл. горн. инж. (Уфим. нефт. ин-т, 1986). Канд. техн. наук (АЗИНЕФТЕХИМ, 1989). Иссл. в обл. геологии, разраб. и эксплуатации нефт. и газ. месторождений, компьютер. моделир. процессов разраб.



Васильев Игорь Борисович, зав. сект. гидродин. моделирования в ООО «ЮНГ-НТЦ Уфа». Дипл. мат.-инж. (УГАТУ, 1998). Иссл. в обл. группового анализа диф. уравнений, физики пласта.

УДК 51:681

В. П. ЖИТНИКОВ, Г. И. ФЕДОРОВА, О. Р. ЗИННАТУЛЛИНА

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА С УСЛОВИЯМИ, ИМЕЮЩИМИ МЕСТО В ПЛОСКИХ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ХЕЛЕ–ШОУ

Рассматриваются плоская и осесимметричная задачи Хеле–Шоу в неограниченной области. Особенности искомым функций учитываются путем представления решения в виде суммы известной функции с заданными особенностями и неизвестной функции без особенностей. Найдено точное решение (в квадратурах) задачи Римана–Гильберта, возникающей в каждый фиксированный момент времени. *Плоская и осесимметричная задача; электрохимическое формирование; задача Римана–Гильберта; комплексный потенциал*

Задача Хеле–Шоу со свободными границами может быть сформулирована следующим образом. В некоторой области искомая функция

удовлетворяет уравнению Лапласа. На границах области эта функция имеет кусочно-постоянные значения. Границы области подвижны, причем

скорость сдвига границы во времени пропорциональна градиенту искомой функции.

Подобные задачи имеют физическое приложение в гидродинамике, электрохимической обработке и т. д. Подробный обзор работ по плоским задачам приведен, например, в [1].

В данной работе задача рассматривается в плоской и осесимметричной постановках, причем рассматриваются решения, имеющие особенности на границах.

Пусть граница области G состоит из двух частей (рис. 1, а), причем граница $A'C'B'$ — жесткая, движется вертикально вниз со скоростью V_t . Скорость движения второй (свободной) части границы — ADB — определяется по правилу $V_\Gamma = k \operatorname{grad} \varphi$, где φ — потенциал, являющийся искомой функцией, k — заданная константа. Форма области G симметрична относительно оси y . Считается, что обе поверхности имеют горизонтальные асимптоты.

Задача решается при помощи аппарата теории аналитических функций комплексного переменного. Область G физической плоскости z конформно отображается на круг $|\zeta| < 1$ (рис. 1, б), где левая полуокружность соответствует жесткой границе, правая — свободной.

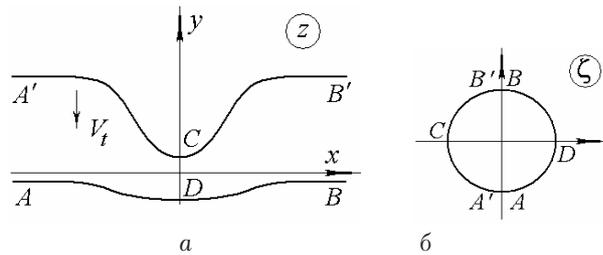


Рис. Область определения искомой функции (а) и вспомогательная параметрическая плоскость ζ (б)

В [2–4] показано, что при решении подобных задач методом дискретных временных шагов на каждом временном шаге необходимо решить три задачи:

1) Определение конформного отображения области на вспомогательной параметрической плоскости ζ на физическую плоскость z .

2) Определение функции $\varphi(\zeta, \tau)$ — задача Дирихле.

3) Определение частной производной $\frac{\partial z}{\partial \tau}(\zeta, \tau)$.

Первые две задачи решаются известными методами. В данной работе решается третья задача, которая представляет собой задачу Римана–Гильберта. Эта задача формулируется следующим образом [5].

Найти аналитическую в области D и непрерывную в \bar{D} функцию $f(\zeta) = u(\zeta) + iv(\zeta)$, удовлетворяющую на границе Γ области условию

$$a(\zeta_\Gamma)u(\zeta_\Gamma) - b(\zeta_\Gamma)v(\zeta_\Gamma) = c(\zeta_\Gamma), \quad (1)$$

где a, b, c — заданные на Γ действительные функции.

Если D — односвязная область, то с помощью конформного отображения задача сводится к случаю, когда D есть единичный круг $|\zeta| < 1$. Кроме того, вводится предположение, что функции a, b, c удовлетворяют условию Гёльдера и $a^2 + b^2 \neq 0$ всюду на Γ .

Поскольку функция $z(\zeta, \tau)$ имеет особенности в точках $\zeta = \pm i$, то представим эту функцию в виде суммы $z(\zeta, \tau) = g(\tau)z_0(\zeta) - iV_t\tau + z_\Delta(\zeta, \tau)$ [2], где $z_0(\zeta) = x_0 + iy_0$ — известная функция с указанными особенностями, а $z_\Delta(\zeta, \tau)$ — искомая функция. Для данной задачи выберем $z_0(\zeta)$ в виде функции, конформно отображающей круг на горизонтальную полосу единичной ширины: $z_0(\zeta) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{\zeta+i}{1+i\zeta}$. Тогда $\operatorname{Im} z_0(e^{i\sigma}) = 0$ при $-\frac{\pi}{2} < \sigma < \frac{\pi}{2}$; $\operatorname{Im} z_0(e^{i\sigma}) = 1$ при $|\sigma| > \frac{\pi}{2}$. Тем самым, функции $z(\zeta, \tau)$ и $g(\tau)z_0(\zeta)$ имеют одну и ту же логарифмическую особенность при $\zeta = \pm i$. Будем предполагать, что $z_\Delta(\zeta, \tau)$ — ограниченная функция, а произведение $\frac{\partial z_\Delta}{\partial \sigma} \cos \sigma$ удовлетворяет условию Гёльдера. Такие ограничения необходимо ввести, чтобы коэффициенты a, b, c в краевом условии (2) удовлетворяли условиям задачи Римана–Гильберта.

В данном разделе для упрощения записи выражений исключаем из обозначений временной параметр τ , хотя на каждом шаге он имеет свои значения и влияет на участвующие в выражениях функции.

Искомой функцией в задаче Римана–Гильберта будет частная производная $\frac{\partial z_\Delta}{\partial \tau} = \frac{\partial x_\Delta}{\partial \tau} + i \frac{\partial y_\Delta}{\partial \tau}$. Краевым условием для $\frac{\partial z_\Delta}{\partial \tau}$ будет уравнение [2, 4]

$$\frac{\partial y_\Delta}{\partial \sigma} \frac{\partial x_\Delta}{\partial \tau} - \left(\frac{\partial x_\Delta}{\partial \sigma} + g \frac{\partial x_0}{\partial \sigma} \right) \frac{\partial y_\Delta}{\partial \tau} = p(e^{i\sigma}),$$

где вид зависимости $p(e^{i\sigma})$ будет определен ниже. Разделим правую и левую части этого уравнения на $\frac{\partial x_0}{\partial \sigma}$. Тогда это уравнение совпадает с (1) при следующих обозначениях:

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{\partial x_0}{\partial \sigma} \right)^{-1} \frac{\partial y_\Delta}{\partial \sigma}, \\ b &= \left(\frac{\partial x_0}{\partial \sigma} \right)^{-1} \frac{\partial x_\Delta}{\partial \sigma} + g, \\ c &= p(e^{i\sigma}) \left(\frac{\partial x_0}{\partial \sigma} \right)^{-1}, \\ u &= \frac{\partial x_\Delta}{\partial \tau}, \quad v = \frac{\partial y_\Delta}{\partial \tau}, \end{aligned} \quad (2)$$

где функции $\frac{\partial y_\Delta}{\partial \sigma}$ и $\frac{\partial x_\Delta}{\partial \sigma}$ определяются при решении задачи 1, а $p(e^{i\sigma})$ — при решении задачи 2 на каждом временном шаге.

В связи со сделанными допущениями функции a, b, c удовлетворяют условию Гёльдера, при этом $a^2 + b^2 \neq 0$ всюду на Γ . Введем функции

$$A(\zeta_\Gamma) = -\frac{a + ib}{a - ib} = \frac{\left(\frac{\partial x_0}{\partial \sigma} \right)^{-1} \frac{\partial y_\Delta}{\partial \sigma} + g}{\left(\frac{\partial x_0}{\partial \sigma} \right)^{-1} \frac{\partial x_\Delta}{\partial \sigma} + g},$$

$$B(\zeta_\Gamma) = \frac{2c}{a - ib} = i \frac{2p}{\frac{\partial z_\Delta}{\partial \sigma} + g \frac{\partial x_0}{\partial \sigma}} = i2p \left(\frac{\partial z}{\partial \sigma} \right)^{-1}. \quad (3)$$

Проведя ряд преобразований, в конечном итоге получим следующие выражения:

$$A = \frac{\overline{\partial z}}{\partial \sigma} \Big/ \frac{\partial z}{\partial \sigma} = \frac{1 - i \frac{\partial y}{\partial x}}{1 + i \frac{\partial y}{\partial x}}, \quad \ln A(e^{i\sigma}) = -2i\theta(\sigma), \quad (4)$$

где $\theta(\sigma)$ – действительная функция, выражающая угол наклона касательной к границе относительно положительного направления действительной оси, $\frac{\partial z}{\partial \sigma} = \pm \left| \frac{\partial z}{\partial \sigma} \right| e^{i\theta}$.

Целое число, равное деленному на 2π полному изменению аргумента функции $A(\zeta_\Gamma)$ при обходе Γ , называется индексом функции $A(\zeta_\Gamma)$ [5]:

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg A(\zeta_\Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma d \ln A(\zeta_\Gamma).$$

Для рассматриваемой задачи индекс функции $A(\zeta_\Gamma)$ равен нулю в силу симметрии области G (см. рис. 1, а). В этом случае решение задачи Римана–Гильберта будет следующим [5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_\Delta}{\partial \tau}(\zeta) &= \frac{1}{2} \left\{ \Phi^+(\zeta) + \overline{\Phi^-\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)} \right\}, \\ \Phi^\pm(\zeta) &= e^{-F^\pm(\zeta)} \{ K + F_2^\pm(\zeta) \}, \end{aligned} \quad (5)$$

где K – произвольная константа, знак + соответствует функции, аналитической в круге, знак минус – функции, аналитической во внешности круга. Функции $F(\zeta)$ и $F_2(\zeta)$ определяются по формулам:

$$\begin{aligned} F(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\ln A(\zeta_\Gamma)}{\zeta_\Gamma - \zeta} d\zeta_\Gamma = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\ln A(e^{i\sigma})}{e^{i\sigma} - \zeta} e^{i\sigma} d\sigma, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} F_2(\zeta) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{B(\zeta_\Gamma) e^{F^-(\zeta_\Gamma)}}{\zeta_\Gamma - \zeta} d\zeta_\Gamma = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{B(e^{i\sigma}) e^{F^-(e^{i\sigma})}}{e^{i\sigma} - \zeta} e^{i\sigma} d\sigma. \end{aligned} \quad (7)$$

С учетом (4) получим

$$\begin{aligned} F(\zeta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\ln A(e^{i\sigma})}{e^{i\sigma} - \zeta} e^{i\sigma} d\sigma = \\ &= -\frac{i}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta(\sigma) \frac{e^{i\sigma} d\sigma}{e^{i\sigma} - \zeta} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{i}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta(\sigma) \left(\frac{e^{i\sigma}}{e^{i\sigma} - \zeta} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) d\sigma = \\ &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta(\sigma) \frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta} d\sigma - i\theta_0, \end{aligned}$$

где θ_0 – значение θ при $\zeta=0$.

Функция, определяемая формулой Шварца $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta(\sigma) \frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta} d\sigma$, аналитична внутри круга и на границе имеет значения действительной части, равные $\theta(\sigma)$. Так как $\frac{dz}{dz_0} = \frac{dz/d\zeta}{dz_0/d\zeta} = \frac{\partial x}{\partial x_0} + i \frac{\partial y}{\partial y_0} = \left| \frac{dz}{dz_0} \right| e^{i\theta}$, то такими же свойствами обладает функция $\Omega = -i \ln \frac{dz}{dz_0} = \theta + i\lambda$, т.е. Ω является функцией Жуковского [5] для плоской задачи стационарного течения идеальной жидкости в пространстве между криволинейными непроницаемыми границами $A'CB'$ и ADB . Тогда аналитическая функция, определяемая формулой Шварца, отличается от функции Ω только на мнимую постоянную, равную значению мнимой части функции в центре круга. Отсюда

$$F^+(\zeta) = -i(\Omega - i\lambda_0 + \theta_0) = -\ln \frac{dz}{dz_0} - \lambda_0 - i\theta_0.$$

Определим $F^-(\zeta)$. Пусть ζ находится вне круга, тогда $\gamma = 1/\bar{\zeta}$ принадлежит кругу. В этом случае

$$\begin{aligned} F^-(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\ln A(\zeta_\Gamma)}{\zeta_\Gamma - \zeta} d\zeta_\Gamma = \\ &= -\frac{i}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta(\sigma) \frac{e^{i\sigma} d\sigma}{e^{i\sigma} - 1/\bar{\gamma}}, \\ \overline{F^-(\zeta)} &= \frac{i}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta(\sigma) \frac{\gamma e^{-i\sigma} d\sigma}{\gamma e^{-i\sigma} - 1} = \\ &= -\frac{i}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta(\sigma) \frac{\gamma d\sigma}{e^{i\sigma} - \gamma} = \\ &= -\frac{i}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta(\sigma) \left(\frac{\gamma}{e^{i\sigma} - \gamma} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) d\sigma = \\ &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta(\sigma) \frac{e^{i\sigma} + \gamma}{e^{i\sigma} - \gamma} d\sigma + \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta(\sigma) d\sigma = \\ &= -i \left(\Omega(\gamma) - i\lambda_0 + i\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) = \\ &= -i\Omega(\gamma) - \lambda_0 + i\theta_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^-(\zeta) &= i\overline{\Omega}(\gamma) - \lambda_0 - i\theta_0 = \\ &= -\ln \frac{dz}{dz_0} - \lambda_0 - i\theta_0. \end{aligned}$$

На окружности $\gamma_\Gamma = \frac{1}{e^{-i\sigma}} = \zeta_\Gamma$, таким образом, согласно (3) и (7)

$$\begin{aligned} F_2(\zeta) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{B(e^{i\sigma}) e^{F^-(e^{i\sigma})}}{e^{i\sigma} - \zeta} e^{i\sigma} d\sigma = \\ &= -\frac{ie^{-(\lambda_0+i\theta_0)}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\partial z}{\partial \sigma}\right)^{-1} \left(\frac{dz}{dz_0}\right)^{-1} p \frac{e^{i\sigma} d\sigma}{e^{i\sigma} - \zeta} = \\ &= -\frac{ie^{-(\lambda_0+i\theta_0)}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\partial z_0}{\partial \sigma}\right)^{-1} \left|\frac{dz}{dz_0}\right|^{-2} p \frac{e^{i\sigma} d\sigma}{e^{i\sigma} - \zeta}. \end{aligned}$$

Аналогично тому, как были найдены функции $F^+(\zeta)$ и $F^-(\zeta)$, находим $F_2^+(\zeta)$ и $F_2^-(\zeta)$:

$$\begin{aligned} F_2^+(\zeta) &= -\frac{ie^{-(\lambda_0+i\theta_0)}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\partial z_0}{\partial \sigma}\right)^{-1} \left|\frac{dz}{dz_0}\right|^{-2} \times \\ &\times p \left[\frac{e^{i\sigma}}{e^{i\sigma} - \zeta} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] d\sigma = -\frac{ie^{-(\lambda_0+i\theta_0)}}{2\pi} \times \\ &\times \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\partial z_0}{\partial \sigma}\right)^{-1} \left|\frac{dz}{dz_0}\right|^{-2} p \frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta} d\sigma + \right. \\ &\left. + \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\partial z_0}{\partial \sigma}\right)^{-1} \left|\frac{dz}{dz_0}\right|^{-2} p d\sigma \right]. \end{aligned}$$

Определим $\overline{F_2^-}(\zeta)$. Пусть ζ находится вне круга, $\gamma = 1/\zeta$. Тогда

$$\begin{aligned} F_2^-(\zeta) &= -\frac{ie^{-(\lambda_0+i\theta_0)}}{\pi} \times \\ &\times \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial z_0}{\partial \sigma}\right)^{-1} \left|\frac{dz}{dz_0}\right|^{-2} p \frac{\overline{\gamma} e^{i\sigma} d\sigma}{\overline{\gamma} e^{i\sigma} - 1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{F_2^-}(\zeta) &= \frac{ie^{-(\lambda_0-i\theta_0)}}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial z_0}{\partial \sigma}\right)^{-1} \left|\frac{dz}{dz_0}\right|^{-2} \times \\ &\times p \frac{\gamma e^{-i\sigma} d\sigma}{\gamma e^{-i\sigma} - 1} = -\frac{ie^{-(\lambda_0-i\theta_0)}}{2\pi} \times \\ &\times \left[\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial z_0}{\partial \sigma}\right)^{-1} \left|\frac{dz}{dz_0}\right|^{-2} p \frac{e^{i\sigma} + \gamma}{e^{i\sigma} - \gamma} d\sigma - \right. \\ &\left. - \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial z_0}{\partial \sigma}\right)^{-1} \left|\frac{dz}{dz_0}\right|^{-2} p d\sigma \right]. \quad (8) \end{aligned}$$

Согласно формулам (5) и (8),

$$\begin{aligned} \Phi^+(\zeta) &= \frac{dz}{dz_0}(\zeta) e^{\lambda_0+i\theta_0} [K + F_2^+(\zeta)], \\ \overline{\Phi^-}(\zeta) &= \frac{dz}{dz_0}(\zeta) e^{\lambda_0-i\theta_0} [\overline{K} + \overline{F_2^-}(\zeta)], \end{aligned}$$

а значит, решение задачи, согласно (5), будет определяться формулой

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_\Delta}{\partial \tau}(\zeta) &= \frac{1}{2} \left\{ \Phi^+(\zeta) + \overline{\Phi^-} \left(\frac{1}{\zeta} \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{dz}{dz_0}(\zeta) \left\{ 2 \operatorname{Re} (K e^{\lambda_0+i\theta_0}) + \right. \\ &+ F_2^+(\zeta) e^{\lambda_0+i\theta_0} + \overline{F_2^-} \left(\frac{1}{\zeta} \right) e^{\lambda_0-i\theta_0} \left. \right\} = \\ &= \frac{dz}{dz_0}(\zeta) \left[\operatorname{Re} (K e^{\lambda_0+i\theta_0}) - \right. \\ &\left. - \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\partial z_0}{\partial \sigma}\right)^{-1} \left|\frac{dz}{dz_0}\right|^{-2} p \frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta} d\sigma \right]. \quad (9) \end{aligned}$$

В соответствии с симметрией действительная часть $z_\Delta(\zeta)$ равна нулю при $\zeta = \pm i$. Тогда, выбирая константу $K = 0$, получим окончательный результат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_\Delta}{\partial \tau}(\zeta) &= \\ &= -\frac{i}{2\pi} \frac{dz}{dz_0} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\partial z_0}{\partial \sigma}\right)^{-1} \left|\frac{dz}{dz_0}\right|^{-2} p \frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta} d\sigma. \quad (10) \end{aligned}$$

Согласно [3], для плоской задачи

$$p = \begin{cases} -\frac{dg}{d\tau} x_0 \frac{\partial y_\Delta}{\partial \sigma} - \frac{1}{g} \frac{\partial x_\Delta}{\partial \sigma} - \frac{\partial x_0}{\partial \sigma} + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}, & -\frac{\pi}{2} < \sigma < \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{dg}{d\tau} x_0 \frac{\partial y_\Delta}{\partial \sigma}, & \frac{\pi}{2} < |\sigma| < \pi, \end{cases}$$

(где ψ — функция тока), для осесимметричной задачи, согласно [4],

$$p = \begin{cases} -\frac{dg}{d\tau} x_0 \frac{\partial y_\Delta}{\partial \sigma} - \frac{1}{g} \frac{\partial x_\Delta}{\partial \sigma} - \frac{\partial x_0}{\partial \sigma} - \\ - \operatorname{Im} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial z}{\partial \sigma}, & -\frac{\pi}{2} < \sigma < \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{dg}{d\tau} x_0 \frac{\partial y_\Delta}{\partial \sigma}, & \frac{\pi}{2} < |\sigma| < \pi. \end{cases}$$

Тогда в общем случае

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_\Delta}{\partial \tau}(\zeta) &= \frac{i}{2\pi} \frac{dz}{dz_0} \times \\ &\times \left\{ \frac{dg}{d\tau} \int_{-\pi}^{\pi} x_0 \frac{\partial y_\Delta}{\partial x_0} \left|\frac{dz}{dz_0}\right|^{-2} \frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta} d\sigma + \right. \\ &\left. + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} D(\sigma) \frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta} d\sigma \right\}, \quad (11) \end{aligned}$$

где для плоской задачи $D(\sigma) = \frac{1}{g} \frac{\partial x_\Delta}{\partial \sigma} + \frac{\partial x_0}{\partial \sigma} - \frac{\partial y}{\partial \sigma}$, для осесимметричной $D(\sigma) = \frac{1}{g} \frac{\partial x_\Delta}{\partial \sigma} + \frac{\partial x_0}{\partial \sigma} + Im \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial z}{\partial \sigma}$.

Первый интеграл в (11) можно преобразовать так, чтобы выделить функцию, имеющую явное аналитическое выражение. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_\Delta}{\partial x_0} \left| \frac{dz}{dz_0} \right|^{-2} &= \frac{\frac{\partial y_\Delta}{\partial x_0}}{\left| \frac{\partial z}{\partial x_0} \right|^2} = \frac{\frac{\partial y_\Delta}{\partial x_0}}{\left| \frac{\partial x_\Delta}{\partial x_0} + g + i \frac{\partial y_\Delta}{\partial x_0} \right|^2} = \\ &= -Im \frac{1}{\frac{\partial x_\Delta}{\partial x_0} + g \frac{\partial x_0}{\partial x_0} + i \frac{\partial y_\Delta}{\partial x_0}} = \\ &= -Im \left\{ \frac{1}{dz/dz_0} \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Так как $x_0 Im \left\{ \frac{1}{dz/dz_0} \right\} \rightarrow \infty$ при $\sigma \rightarrow \pm \pi/2$, то надо найти такую аналитическую функцию, которая имеет такие же граничные значения мнимой части, как и (12), но при этом стремится к 0 при $\sigma \rightarrow \pm \pi/2$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{\partial x_\Delta}{\partial x_0} + g + i \frac{\partial y_\Delta}{\partial x_0}} - \frac{1}{g} &= \\ &= \frac{1}{g} \frac{-\frac{\partial x_\Delta}{\partial x_0} - i \frac{\partial y_\Delta}{\partial x_0}}{\frac{\partial x_\Delta}{\partial x_0} + g + i \frac{\partial y_\Delta}{\partial x_0}} = -\frac{1}{g} \frac{dz_\Delta}{dz_0}. \end{aligned}$$

Поскольку, по предположению, $Im z_0 = 0$ при $\sigma \in (-\pi/2, \pi/2)$ и $Im z_0 = 1$ при $\sigma > |\pi/2|$, то действительная часть функции

$$\begin{aligned} Re \left(-\frac{i}{g} (z_0 - i) \frac{\frac{\partial x_\Delta}{\partial x_0} + i \frac{\partial y_\Delta}{\partial x_0}}{\frac{\partial x_\Delta}{\partial x_0} + g \frac{\partial x_0}{\partial x_0} + i \frac{\partial y_\Delta}{\partial x_0}} \right) &= \\ &= \begin{cases} x_0 \frac{\partial y_\Delta}{\partial x_0} \left| \frac{dz}{dz_0} \right|^{-2} - \frac{\partial x_\Delta}{\partial x_0} \left| \frac{dz}{dz_0} \right|^{-2} - \\ - \frac{1}{g} \left| \frac{dz_\Delta}{dz_0} \right|^2 \left| \frac{dz}{dz_0} \right|^{-2}, & -\frac{\pi}{2} < \sigma < \frac{\pi}{2}, \\ x_0 \frac{\partial y_\Delta}{\partial x_0} \left| \frac{dz}{dz_0} \right|^{-2}, & |\sigma| > \frac{\pi}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{i}{2\pi} \frac{dz}{dz_0} \int_{-\pi}^{\pi} x_0 \frac{\partial y_\Delta}{\partial x_0} \left| \frac{dz}{dz_0} \right|^{-2} \frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta} d\sigma &= \\ &= \frac{1}{g} (z_0 - i) \frac{dz_\Delta}{dz_0} + \\ &+ \frac{i}{2\pi} \frac{dz}{dz_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\partial x_\Delta}{\partial x_0} \left| \frac{dz}{dz_0} \right|^{-2} \frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta} d\sigma + \\ &+ \frac{i}{2\pi g} \frac{dz}{dz_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left| \frac{dz_\Delta}{dz_0} \right|^2 \left| \frac{dz}{dz_0} \right|^{-2} \frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta} d\sigma. \end{aligned}$$

В соответствии с (11),

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_\Delta}{\partial \tau}(\zeta) &= \frac{1}{g} (z_0 - i) \frac{dg}{d\tau} \frac{dz_\Delta}{dz_0} + \\ &+ \frac{i}{2\pi} \frac{dg}{d\tau} \frac{dz}{dz_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\partial x_\Delta}{\partial x_0} \left| \frac{dz}{dz_0} \right|^{-2} \frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta} d\sigma + \\ &+ \frac{i}{2\pi g} \frac{dg}{d\tau} \frac{dz}{dz_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left| \frac{dz_\Delta}{dz_0} \right|^2 \left| \frac{dz}{dz_0} \right|^{-2} \frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta} d\sigma + \\ &+ \frac{i}{2\pi} \frac{dz}{dz_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} D(\sigma) \frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta} d\sigma. \end{aligned}$$

В последнем выражении в отличие от (11) интегрирование производится только по участку границы, соответствующему обрабатываемой поверхности, а вклад жесткой границы учитывается в явном виде (первое слагаемое). При расчетах это позволяет снизить требования к форме жесткой границы, которая может иметь большую кривизну и приближаться к ломаной.

ВЫВОДЫ

В данной работе найдено решение задачи Римана–Гильберта для определения частных производных по времени координат границы области в условиях плоской и осесимметричной задач Хеле–Шоу. Полученное решение является единственным [5]. Для избежания сложностей (как математических, так и вычислительных) особенности искомой функции были устранены путем представления решения в виде суммы известной функции, имеющей аналогичные особенности и неизвестной функции без особенностей.

Искомая функция была выражена в форме, удобной для вычислений, так как содержит интегралы только по свободной границе, что позволяет решать задачи с негладкой жесткой границей.

Аналитическое решение задачи Римана–Гильберта позволяет в расчетах уменьшить объем вычислений от величин порядка n^3 (n , например, число узловых точек сетки) до n^2 .

При небольшом видоизменении формул таким же способом можно получить аналитические выражения для жесткой границы в виде точки или вертикального разреза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Howison, S. D.** Complex variable methods in Hele-Shaw moving boundary problems / S. D. Howison // Eur. J. Appl. Math. 1992. 3. P. 209–224.
2. **Zhitnikov, V. P.** Simulation of non-stationary processes of electrochemical machining / V. P. Zhitnikov, G. I. Fedorova, O. R. Zinatullina // J. of Materials Processing Tech. Elsevier, 2004. Vol. 149/1-3. P. 398–403.
3. **Zhitnikov, V. P.** Quasi-analytical method of calculation of nonstationary electrochemical shaping / V. P. Zhitnikov, G. I. Fedorova, O. R. Zinatullina // High Speed Hydrodynamics : proc. of 2nd Int. Summer

- Scient. School. June 2004, Cheboksary, Russia. P. 313–317.
4. **Zhitnikov, V. P.** Numerical method of calculation of axisymmetrical nonstationary electrochemical problems / V. P. Zhitnikov, O. R. Zinatullina, G. I. Fedorova // Proc. of the 7th Workshop on Computer Science and Information Technologies CSIT'2005. Ufa, Russia, 2005. Vol. 1. P. 135–140.
5. **Лаврентьев, М. А.** Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. М.: Наука, 1973. 736 с.

ОБ АВТОРАХ



Житников Владимир Павлович, проф., зав. каф. компьют. математики. Дипл. инж.-физ. (МФТИ, 1973). Д-р физ.-мат. наук по механ. жидкости, газа и плазмы (Казанск. гос. ун-т, 1993). Иссл. в обл. волновых течений жидкости, электрохим. формообразования, числ.-аналит. методов.



Федорова Галина Ильясовна, доц. той же каф. Дипл. инж.-мат. по прикл. мат. и информатике (УГАТУ, 2000). Канд. физ.-мат. наук по мат. моделир., числ. методам и комплексам программ (УГАТУ, 2004). Иссл. в обл. нестационарной электрохим. формообразования.



Зинатуллина Ольга Рифовна, ассист. той же каф. Дипл. инж. по САПР (УГАТУ, 2001). Иссл. в обл. расчета электрохимического формообразования.

УДК 539.3

И. Х. БАДАМШИН

РАСЧЕТ ПРЕДЕЛА ТЕКУЧЕСТИ БЕЗДЕФЕКТНЫХ МОНОКРИСТАЛЛОВ

Приведена формула расчета предела текучести для металлических и неметаллических монокристаллов. Формула выведена на основе фундаментальных закономерностей: закона Кулона и закона Гука. Новизна подтверждена патентом. Полученные результаты могут быть применены для расчета предела текучести нитевидных (бездефектных) монокристаллов, а значит и в эвтектических композитных материалах, недеформированных поликристаллах, а также применимы в некоторых направлениях нанотехнологий. *Бездефектный монокристалл; эвтектический композитный материал; предел текучести; нанобъем монокристалла; нанотехнологии*

Решение задачи моделирования прочностных характеристик монокристаллов предполагает проведение теоретических исследований взаимосвязи механики твердого тела и физики твердого тела.

Одним из направлений решения этой задачи является расчетное определение предела текучести — основной характеристики для многих прочностных расчетов.

Расчет предела текучести позволит существенно сократить объем дорогостоящих экспериментов (в некоторых случаях на уникальном оборудовании), что значительно снижает экономические и временные затраты в процессе проектирования элементов машин и оборудования, изготовленных, в частности, из эвтектических композитных материалов с нитевидными монокристаллами в виде армирующей фазы.

Кроме того, одним из направлений развития нанотехнологий является полное трехмерное управление структурой материалов на атомном уровне с целью размещения каждого атома на сво-

ем месте. В этих условиях важно заранее знать прочностные свойства нанобъемов монокристаллов с бездефектной структурой, откуда следует необходимость наличия расчетных формул определения прочностных характеристик, в частности, предела текучести.

В настоящее время наибольшее распространение нашли экспериментальные методы определения предела текучести.

Экспериментальная зависимость изменения напряжения от деформации для нитевидных монокристаллов — «усов» — имеет вид (в частности, для монокристалла Cu), представленный на рис. 1.

Характер кривой (рис. 1) является типичным для бездефектной кристаллической решетки [1, 2]. На кривой «напряжение–деформация» имеется ярко выраженный зуб текучести (стадия I). По достижению максимального напряжения σ_{max} , соответствующего вершине зуба текучести, в кристалле начинается пластическая деформация: зарождаются и размножаются дислокации, образуются линии скольжения (Чернова–