соответственно с его спектром на 1-формах и 0-формах, т. е. функциях. Тем самым в данной работе завершено вычисление спектра оператора Лапласа на дифференциальных формах на римановых многообразиях Гейзенберга, начатое в работе [5]. Отметим также работу [4], в которой были вычислены собственные значения оператора Дирака на римановых многообразиях Гейзенберга.

Замечание 2. Можно явно выписать соответствующую полную ортонормированную систему, состоящую из собственных форм оператора Лапласа на римановом многообразии Гейзенберга.

Доказательство теоремы 2 основано на идеях работы [5] и использует некоммутативный гармонический анализ, а именно теорию представлений нильпотентных групп Ли, развитую Кирилловым в [2]. Использование этих методов позволяет свести вычисление к хорошо известной задаче вычисления спектра квантового гармонического осциллятора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дубровин, Б. А.** Современная геометрия: Методы и приложения / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. 2-е изд., перераб. М. : Наука, 1986. 760 с.
2. **Кириллов, А. А.** Унитарные представления нильпотентных групп Ли / А. А. Кириллов // Успехи мат. наук. 1962. 17, № 4. С. 53–104.
3. **Шубин, М. А.** Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория / М. А. Шубин. 2-е изд. М. : Наука, 2001. 310 с.
4. **Ammann, B.** The Dirac operator on nilmanifolds and collapsing circle bundles / B. Ammann, Ch. Baer // Ann. Global Anal. Geom. 1998. Vol. 16. P. 221–253.
5. **Gordon, C. S.** The spectrum of the Laplacian on Riemannian Heisenberg manifolds / C. S. Gordon, E. N. Wilson // Michigan Math. J. 1986. Vol, 33. P. 253–271.

ОБ АВТОРАХ

Кордюков Юрий Аркадьевич, проф., вед. науч. сотр. ИМ УНЦ РАН. Дипл. математик (МГУ, 1984). Д-р физ.-мат. наук по диф. уравнениям (ИМ УНЦ РАН, Уфа, 2004). Иссл. в обл. спектр. теории диф. операторов, анализа и теории диф. уравнений на многообразиях.

Яковлев Андрей Александрович, асп. каф. математики УГАТУ. Дипл. магистр в обл. прикл. мат. и информатики (УГАТУ, 2004). Готовит дис. о спектре диф. операторов на многообразиях со слоениями под рук. проф. Ю. А. Кордюкова.

УДК 519.8

С. Г. ГАЗЕТДИНОВА, Р. А. ЯРЦЕВ

О ПОСТРОЕНИИ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ГРАФОВ С ПРИОРИТЕТАМИ ПО МЕТОДОЛОГИИ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК

Предлагается новая методика моделирования процессов управления на основе графов с приоритетами по методологии экспертных оценок. Данная методика предусматривает построение обобщенной модели процесса на основе предложенных экспертами индивидуальных моделей, устраняя их избыточность и сохраняя различия. При этом в целях упрощения контроля процесса предоставляется возможность преобразования обобщенной модели к виду индивидуальных моделей. *Процесс; модель; граф; экспертная оценка; управление*

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, многие управляемые процессы в различных системах носят дискретный характер и моделируются с помощью ориентированных графов, вершины которых изображают состояния процессов, а дуги — переходы между ними. Подобные модели в виде графов с приоритетами, каждой из дуг которых соответствуют предикат активности (переменная, определяющая условие перехода по данной дуге) и символы информационного сопровождения, лежат в основе иерархических моделей, разрабатываемых проф. В. В. *Мироновым* и его учениками (см., например, [1–7]). Эти базовые графы с приоритетами являются моделями так называемых элементарных процессов (ЭП), которые, взаимодействуя между собой на различных уровнях иерархии, образуют моделируемый иерархический процесс (ИП). Помимо графа элементарного процесса (ГЭП) модель любого ЭП содержит его предикат активности, определяемый аналогично предикату активности дуги, а также рекурсивные функции развития и информационного сопровождения, с помощью которых на ГЭП отслеживается текущая вершина, изображающая текущее состояние контролируемого ЭП, и формируется набор сообщений оператору [8].

При разработке моделей данного вида, однако, предполагалось, что каждый ЭП может быть однозначно описан некоторой моделью, по содержанию которой ни со стороны заказчика, ни со стороны разработчика разногласий не возникает. Между тем разработчик может не обладать достаточным опытом по моделированию предметной области и в ходе проектирования привлекать ряд независимых экспертов, каждый из которых предлагает свой, индивидуальный вариант модели ЭП. При этом для обеспечения контроля развития ЭП следует либо хранить и использовать весь комплекс его моделей, построенных экспертами, что характеризуется большой избыточностью хранимых данных и, как следствие, значительными издержками памяти и времени контроля, либо выполнить некоторую процедуру согласования указанных моделей и приведения их к единой обобщенной модели контролируемого ЭП. В известных авторам работах таких процедур не предлагается.

Известна общая методология экспертных оценок, описанная, например, в работе [9], которая носит концептуальный характер и предусматривает опрос экспертов с последующим сопоставлением и обобщением их точек зрения. На ее основе построены, например, метод Делфи, метод аналогий и другие [9, с. 30–31]. Данные методы обеспечивают усреднение произведенных экспертами количественных оценок различных показателей и не предусматривают согласования ни моделей в виде графов, ни описываемых ими ситуаций.

Другой реализацией данной методологии применительно к ситуационному управлению предприятием является разработанный проф. И. Ю. Ю*суповым* метод управленческих игр [10, с. 42]. Игры проводятся с экспертами, в роли которых выступают специалисты предприятий. Один из существенных этапов игры предполагает согласование предложенных экспертами различных описаний производственных ситуаций в процессе коллективного обсуждения, в результате чего формируется единый перечень ситуаций и соответствующих им управленческих решений. Данный метод обладает, на наш взгляд, тремя основными недостатками, препятствующими его адаптации к моделированию ЭП: 1) эксперты в ходе игры могут не прийти к общему мнению по предлагаемой организаторами обобщенной модели ЭП; 2) может потребоваться отражение в обобщенной модели не только сходства, но и различий мнений экспертов об описываемом процессе; 3) проведение игр может не состояться по различным причинам (конфликты экспертов между собой, их дальнейшая незаинтересованность в проекте, трудности коммуникации и т. п.).

В настоящей работе предлагается новая методика моделирования любого ЭП на основе экспертных оценок. Ее наиболее важным звеном является специальная процедура, которая строит обобщенную модель ЭП на основе предложенных экспертами индивидуальных моделей, устраняя их избыточность и сохраняя различия. В дальнейшем при использовании построенной модели в ходе контроля развития ЭП из нее может быть получена любая из ранее обобщенных индивидуальных моделей. Кроме того, в целях упрощения контроля развития ЭП методика предусматривает возможность использования двух процедур преобразования построенной обобщенной модели ЭП к специализированным моделям, имеющим тот же вид, что и любая из индивидуальных моделей. В основу одной из этих процедур положен принцип ранжирования экспертов и их моделей по приоритетам, а в основу другой — принцип преобладания коллективного мнения экспертов над авторитетом индивидуальных высказываний. Использование данных процедур устраняет противоречия, содержащиеся в индивидуальных моделях, без проведения какого бы то ни было обсуждения с их авторами. Содержание предлагаемой методики последовательно излагается в тексте статьи.

1. ГРАФ И НАДАКТИВНЫЙ ГРАФ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ПРОЦЕССА

Понятие ЭП было впервые введено в работе [1] и позднее уточнено в [8]. Основными положениями этой последней статьи мы будем пользоваться в настоящей работе. Так, согласно [8] itextbf-предикатом активности ЭП называется переменная p_a , значение которой в произвольный момент t , обозначаемое как $p_a(t)$, определяет активность описываемого ЭП в зависимости от заданного условия: если $p_a(t) = 1$, то процесс считается **активным**, если же $p_a(t) = 0$ — то **пассивным**.

Как уже отмечалось, поведение ЭП во времени может быть описано с помощью модели, основу которой составляет граф элементарного процесса.

Графом элементарного процесса (ГЭП) будем называть ориентированный граф G, вершины $S_j = S_j(G)$ ($j = \overline{1, N(G)}$, где $N(G)$ — число вершин графа G) которого изображают возможные состояния моделируемого ЭП, а дуги $d_k = d_k(G)$ ($k = \overline{1, D(G)}$, где $D(G)$ — число дуг на G) — переходы между состояниями, причем на G выделена начальная вершина $\sigma = \sigma(G)$, соответствующая некоторому исходному состоянию.

Таким образом, ГЭП считается заданным, если заданы: 1) $O(G) = \{S_j\}, j = \overline{1, N(G)}$ — множество вершин; 2) $\sigma = \sigma(G) \in O(G)$ — начальная вершина; 3) $\Delta(G) = \{d_k\}, k = \overline{1, D(G)}$ — множество дуг; 4) $\forall k(\exists! S_m = F_1(d_k, G))$, где $F_1(d_k, G)$ — функция исходной вершины дуги, S_m — вершина G, для которой дуга $d_k \in \Delta(G)$ — является исходящей; 5) $\forall k(\exists!\, S_n = F_2(d_k, G))$, где $F_2(d_k, G)$ — функция конечной вершины дуги, S_n — вершина G, для которой дуга $d_k \in \Delta(G)$ является входящей.

Кроме того, могут быть введены: а) $D(S_j, G)$ — число дуг, исходящих из вершины S_j на графе G; б) $\Delta(S_j, G))(\Delta(S_j, G) \subset \Delta(G))$ — множество дуг, исходящих из S_j на G.

Отметим, что, согласно [8], любой ЭП характеризуется конечным числом состояний и переходов. Отсюда следует, что любой граф, удовлетворяющий определению ГЭП, является конечным, т. е. содержит конечное число вершин и дуг (множества $O(G)$ и $\Delta(G)$ являются конечными).

Если рассматривать ГЭП без учета активности дуг в каждый момент, то образуемые на его основе модели мы будем впредь называть **статическими**. Любой статической модели в каждый момент соответствует некоторая **динамическая** модель, которая строится из статической и включает подграф ГЭП специального вида — например, дугами которого являются те и только те дуги ГЭП, которые активны в данный момент.

На данном подграфе отслеживается путь развития ЭП и его конечная вершина, являющаяся текущей. Следовательно, функции развития и информационного сопровождения, которые входят в статическую модель и отслеживают путь развития, должны быть определены для любого такого подграфа. Иными словами, возникает необходимость учета динамических моделей ЭП при построении его статической модели, что ставит под сомнение сам принцип разделения комплекса моделей ЭП на статическую (неизменную, постоянную) и динамическую (изменяющуюся) части.

Разрешить это затруднение, т. е. обеспечить независимость статической модели ЭП от динамической, можно, если расширить область определения указанных функций, задав их для любого подграфа ГЭП того же вида, что и произвольный активный подграф. Это основная цель, с которой здесь вводится понятие надактивного графа ГЭП. Каждый надактивный граф может в какой-то момент, при условии активности соответствующей комбинации дуг ГЭП, выступить в роли его активного подграфа.

Надактивным графом элементарного процесса (НГЭП) будем называть ГЭП $G^\wedge$, являющийся подграфом ГЭП G , таким, что: а) вершинами $G^\wedge$ являются вершины ГЭП G, т. е. $O(G^\wedge) \subset \subset O(G)$; б) дугами $G^\wedge$ являются дуги ГЭП G, т. е. $\Delta(G^\wedge) \subset \Delta(G)$; в) для любой дуги $G^\wedge$ существуют исходная и конечная вершины, совпадающие с соответствующими вершинами ГЭП G, т. е. $\forall d \in \in \Delta(G^\wedge) \Rightarrow (F_1(d, G^\wedge) = F_1(d, G)) \wedge (F_2(d, G^\wedge) = = F_2(d, G))$; г) на $G^\wedge$ выделена начальная вершина $\sigma^\wedge = \sigma(G^\wedge) \in O(G^\wedge)$; д) для любой вершины $G^\wedge$, отличной от начальной, существует либо входящая, либо исходящая дуга, т. е. $\forall s(s \in O(G^\wedge) \Rightarrow \Rightarrow \exists d(d \in \Delta(G^\wedge) \wedge [F_1(d, G^\wedge) = s \vee F_2(d, G^\wedge) = = s] \vee s = \sigma^\wedge))$.

Таким образом, любой НГЭП может содержать не более одной изолированной вершины s' (т. е. вершины, для которой $\neg\exists d \in \Delta(G^\wedge) \Rightarrow \Rightarrow (F_1(d, G^\wedge) = s') \vee (F_2(d, G^\wedge) = s')$, в качестве которой может выступать лишь начальная вершина $\sigma^\wedge$.

2. МОДЕЛИ ПЕРВОГО НОРМАЛЬНОГО ВИДА

Понятия статической и динамической модели ЭП применяются для обозначения не только исходных моделей ЭП, предлагаемых экспертами и названных в разделе 3 индивидуальными моделями, но и моделей, производных от индивидуальных (см. разд. 4–6, 9–11). Чтобы выделить класс моделей, к которому относятся индивидуальные и подобные им модели ЭП, было решено ввести понятие первого нормального вида (1НВ) как для самих моделей, так и для лежащих в их основе графов.

Графом элементарного процесса первого нормального вида (ГЭП 1НВ) будем называть ГЭП G, каждой дуге d_k которого, исходящей из произвольной вершины S_j ($S_j = F_1(d_k, G)$), однозначно соответствует: 1) приоритет $\pi(d_k, G)$ — натуральное число, причем приоритеты всех дуг, исходящих из одной вершины графа G, различны, т. е. функция π инъективна (взаимно однозначна) на каждом множестве $\{d: F_1(d_k, G) = v\}$; $v \in O(G)$. При этом, если $\pi(d_l, G) > \pi(d_k, G)$ (здесь $l \neq \neq k \wedge l = \overline{1, D(G)} \wedge S_j = F_1(d_k, G) = F_1(d_l, G)$), то дуга d_k считается более приоритетной, чем дуга d_l; 2) предикат активности — переменная $p_a(d_k, G)$, значение которой в каждый момент t, обозначаемое как $p_a(d_k, G, t)$, определяет активность дуги d_k в зависимости от некоторого условия: если $p_a(d_k$,G,t) = 1, то d_k в момент t является **активной**, если же $p_a(d_k$,G,t) = 0, то — **пассивной**; 3) символ или слово (последовательность сцепленных друг с другом символов) $c(d_k, G)$из символов алфавита C, в том числе «пустое» слово $c^0 =$‘’.

Полной статической моделью 1НВ будем называть модель M ЭП, в состав которой входят: 1) предикат активности p_a; 2) ГЭП 1НВ G; 3) рекурсивная функция развития вида $y = m(G^\wedge)$, определенная на множестве всех возможных НГЭП графа G (обозначаемом {G^}) и принимающая значение последней вершины на некотором пути развития r из начальной вершины $\sigma^\wedge$ произвольного НГЭП $G^\wedge$: все вершины этого пути соответствуют последовательности состояний, проходимых активным ЭП, при соответствующей предыстории развития данного процесса и условии, что активными являются те и только те дуги ГЭП 1НВ G, которые принадлежат НГЭП $G^\wedge$; 4) рекурсивная функция информационного сопровождения вида $y = e(G^\wedge)$, формирующая некоторое слово как результат последовательного сцепления символов, соответствующих дугам пути развития, задаваемого функцией $y = m(G^\wedge)$.

Если статическая модель M не содержит хотя бы одной из перечисленных четырех компонент, то она называется **неполной**.

В каждый момент t активный ЭП (для которого $p_a(t) = 1$), описанный введенной статической моделью M, характеризуется **полной динамической моделью 1НВ** $M(t)$, которая строится на основании M и включает следующие компоненты:

1) **Активный НГЭП (АНГЭП)** $G(t)$ – это НГЭП графа G(ГЭП 1НВ), обладающий следующими свойствами: А) в момент t активными являются те и только те дуги G, которые принадлежат $G(t)$, т. е. $\forall d[(d \in \Delta(G(t)) \Rightarrow p_a(d, G(t), t) = = p_a(d, G, t) = 1) \wedge (d \in \Delta(G) \wedge d \notin \Delta(G(t)) \Rightarrow \Rightarrow p_a(d, G, t) = 0)]$; Б) начальная вершина $\sigma(t) =$

$= \sigma(G(t)) \in$ O(G(t)) либо является вершиной, на которой завершился контроль развития процесса в предыдущий момент времени t–1 (например, конечной вершиной пути развития $r(t-1)$), либо совпадает с начальной вершиной графа G, т. е. определяется следующим образом:

$$\sigma(t) = \begin{cases} s(t-1), \text{ если } p_a(t-1) = 1, \\ \sigma, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь $s(t-1)$ — текущая вершина, соответствующая текущему состоянию ЭП в момент $t - 1$, такая, что: $s(t-1) = m(G(t-1))$. Из определений НГЭП и ГЭП 1НВ следует, что АНГЭП также представляет собой ГЭП 1НВ;

2) Текущая вершина $s(t) = m(G(t))$, изображающая текущее состояние ЭП в момент t;

3) Слово процесса $Y(t) = e(G(t))$, несущее информацию о развитии процесса в момент t.

Как показано в [8], если ЭП, описанный моделью M, является **конечным**, то в любой момент t его развития однозначно определяется текущая вершина $s(t)$ и формируется конечное слово процесса $Y(t)$. Далее мы будем рассматривать модели только лишь конечных ЭП. Отметим еще, что модель $M(t)$ является исчерпывающим описанием контролируемого ЭП в момент t: она выступает не только как средство, но и как результат производимого контроля (компоненты 2 и 3 модели).

3. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ЭП

Как уже отмечалось, индивидуальные модели ЭП — это модели, построенные независимыми экспертами. Каждый эксперт разрабатывает собственную индивидуальную модель как полную статическую модель 1НВ и передает ее проектировщику системы управления процессом. Проектировщик использует комплект полученных индивидуальных моделей для построения единой обобщенной модели ЭП (см. разд. 8).

При разработке индивидуальных моделей на ГЭП 1НВ, входящий в состав каждой модели, накладывается дополнительное ограничение: приоритетом дуги является ее порядковый номер в последовательности дуг, исходящих из той же вершины и расположенных по убыванию степени влияния на развитие процесса. В соответствии со сказанным

индивидуальным графом элементарного процесса (ИГЭП) будем называть ГЭП 1НВ G, приоритеты $\pi(d_k, G)$ дуг d_k которого ($d_k \in \Delta(G)$, $k = \overline{1, D(G)}$) принимают значения: $\pi(\mathrm{d}_k, G) \leqslant D(S_j, G)$, где $S_j = F_1(d_k, G)(S_j \in O(G) \wedge j = \overline{1, N(G)})$.

Пусть теперь N — число привлеченных экспертов и, следовательно, обобщаемых индивидуальных моделей M^i. Множество моделей M = {M ^{i}}, i=$\overline{1, N}$ будем называть их **семейством**. При этом каждая **индивидуальная модель** M^i представляет собой полную статическую модель 1НВ вида, включающую: а) предикат активности p_a^i, значение которого в момент t, обозначаемое как $p_a^i(t)$, определяет i-активность описываемого ЭП (т. е. его активность в представлениях i-го эксперта); б) ИГЭП G^i, включающий начальную вершину $\sigma^{\ i} = \sigma(G^i)$, для дуг d_k^i которого ($d_k^i \in \Delta^i = \Delta(G^i) \wedge k = \overline{1, D^i} \wedge D^i = D(G^i)$) заданы приоритеты $\pi(d_k^i, G^i)$, предикаты активности $p_a(d_k^i, G^i)$ и символы $c(d_k^i, G^i)$; в) функцию развития вида $y = m^i(G^{\wedge i})$; г) функцию информационного сопровождения вида $y = e^i(G^{\wedge i})$. Здесь $G^{\wedge i}$ – некоторый надактивный граф ИГЭП G^i.

Аналогично, в соответствующую **индивидуальную динамическую модель** $M^i(t)$, являющуюся полной динамической моделью 1НВ, входят следующие компоненты: 1) **Активный ИГЭП (АИГЭП)** $G^i(t)$ – это АНГЭП графа G^i, включающий начальную вершину $\sigma(i, t) = \sigma(G^i(t)) \in O^i(t) = O(G^i(t))$; 2) Текущая вершина $s_i(t) = m^i(G^i(t))$; 3) Слово процесса $Y^i(t) = e^i(G^i(t))$.

Подчеркнем, что организовать контроль развития ЭП, описанного семейством M = {M ^{i}}, можно на основе любой индивидуальной модели M^i. Однако такой контроль окажется менее достоверным, чем контроль, предусматривающий учет мнения остальных экспертов. Если же контролировать процесс путем обработки всего семейства моделей, то мы столкнемся с необходимостью хранения в памяти ЭВМ значительных объемов избыточных данных, неизбежно появляющихся вследствие дублирования представлений об одном и том же процессе, отраженных в его различных описаниях.

4. МОДЕЛИ ВТОРОГО НОРМАЛЬНОГО ВИДА

Каждая индивидуальная модель может обладать избыточностью: в ее ИГЭП могут входить вершины и дуги, которые не лежат ни на одном из возможных путей развития, т. е. недостижимы.

Введем рекурсивную **функцию достижимости** вершин $s \in$ O(G) и дуг d $\in \Delta$(G) ГЭП G, заданную следующим образом:

$$\text{а) } F(s, G) = \begin{cases} 1, \text{ если } s = \sigma \vee \exists d' \\ \quad (d' \in \Delta(G) \wedge F_2(d', G) = s \wedge \\ \quad \wedge F(d', G) = 1), \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

$$\text{б) } F(d, G) = \begin{cases} 1, \text{ если } \exists s' (s' \in O(G) \wedge \\ \quad \wedge F_1(d', G) = s' \wedge \\ \quad \wedge F(s', G) = 1), \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Вершины s и дуги d графа G, для которых $F(s, G) = 1$, $F(d, G) = 1$, будем называть **достижимыми**, а для которых $F(s, G) = 0$, $F(d, G) = 0$ — **недостижимыми**.

Очевидно, что все недостижимые вершины и дуги можно удалить из ГЭП, доказав, что такое удаление не приводит к срыву контроля ЭП. Другими словами, полную статическую модель ЭП 1НВ можно привести к так называемому второму нормальному виду (2НВ) и соответствующие понятия могут быть введены следующим образом:

графом элементарного процесса второго нормального вида (ГЭП 2НВ) будем называть ГЭП 1НВ G, такой, что $\forall s, d(s \in O(G) \wedge d \in \Delta(G) \Rightarrow \Rightarrow F(s,G) = 1 \wedge F(d,G) = 1)$;

полной статической моделью второго нормального вида будем называть полную статическую модель 1НВ M, ГЭП G которой представляет собой ГЭП 2НВ. Соответствующую данной модели M полную динамическую модель 1НВ $M(t)$ будем называть **полной динамической моделью второго нормального вида**.

Введенные понятия используются в ходе преобразования, обсуждаемом в следующем разделе.

5. О ПРИВЕДЕНИИ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

Любая индивидуальная модель, построенная некоторым экспертом, представляет собой полную статическую модель 1НВ. Следовательно, в соответствии со сказанным в разделе 4, она может быть приведена к 2НВ. В результате такого преобразования из ИГЭП данной модели получают граф, для которого введем понятие приведенного ИГЭП.

Приведенным индивидуальным графом элементарного процесса (ПИГЭП) $\tilde{G}^i$ будем называть подграф ИГЭП G^i такой, что: 1) вершинами и дугами ПИГЭП являются только достижимые вершины и дуги ИГЭП, т. е. $\forall s,\ d(s \in \tilde{O}^i = O(\tilde{G}^i) \subset O^i \wedge \wedge d \in \tilde{\Delta}^i = \Delta(\tilde{G}^i) \subset \Delta^i \Rightarrow F(s,\tilde{G}^i) = F(s,G^i) = = 1 \wedge F(d,\tilde{G}^i) = F(d,G^i) = 1)$; 2) вершины и дуги ИГЭП, не входящие в ПИГЭП, являются недостижимыми, т. е. $\forall s, d(s \in O^i \wedge s \notin \tilde{O}^i \Rightarrow F(s,G^i) = = 0) \wedge (d \in \Delta^i \wedge d \notin \tilde{\Delta}^i \Rightarrow F(d,G^i) = 0))$.

Таким образом, любой ПИГЭП $\tilde{G}^i$ является ГЭП 2НВ. Из определения достижимых вершин вытекает, что он обязательно содержит начальную вершину соответствующего ИГЭП G^i, являющуюся и его начальной вершиной, т. е. $\tilde{\sigma}^i = = \sigma(\tilde{G}^i) = \sigma^i$. В частном случае, когда из начальной вершины ИГЭП G^i отсутствуют исходящие дуги ($D(\sigma^i, G^i) = 0$), ПИГЭП $\tilde{G}^i$ состоит из одной начальной вершины, т. е. $\tilde{G}^i = \tilde{O}^i = O^i = \{\sigma^i\}$. Другой частный случай — когда недостижимые вершины и дуги в ИГЭП G^i отсутствуют и он совпадает с ПИГЭП (т. е. $G^i = \tilde{G}^i$ и, соответственно, $\tilde{O}^i = O^i$, $\tilde{\Delta}^i = \Delta^i$). Отметим также, что любой ПИГЭП удовлетворяет определению ИГЭП и может быть рассмотрен как разновидность последнего.

ПИГЭП $\tilde{G}^i$, получаемый после удаления из ИГЭП G^i всех недостижимых вершин и дуг, лежит в основе так называемой приведенной индивидуальной модели.

Приведенной индивидуальной моделью будем называть модель $\tilde{M}^i$, построенную из индивидуальной модели M^i и включающую: А) предикат активности p_a^i; Б) ПИГЭП $\tilde{G}^i$; В) функцию развития $y = m^i(\tilde{G}^{\wedge i})$; Г) функцию информационного сопровождения $y = e^i(\tilde{G}^{\wedge i})$. Здесь $\tilde{G}^{\wedge i}$- некоторый надактивный граф ПИГЭП $\tilde{G}^i$.

Очевидно, что приведенная индивидуальная модель $\tilde{M}^i$ является полной статической моделью 2НВ. Кроме графа $\tilde{G}^i$, она отличается от модели M^i областью определения функций m^i и e^i. Для построения данной модели необходимо выполнить над M^i соответствующую процедуру приведения, предусматривающую удаление из множеств O^i и Δ^i ИГЭП G^i недостижимых вершин и дуг. Отметим, что предлагаемая в разделе 8 процедура построения обобщающей модели решает также задачу приведения ИГЭП ко второму нормальному виду, так что отдельной процедуры не требуется.

Для контроля развития ЭП в каждый момент времени t , когда $p_a^i(t) = 1$, из модели $\tilde{M}^i$ строится приведенная индивидуальная динамическая модель $\tilde{M}^i(t)$, являющаяся полной динамической моделью 2НВ и включающая **активный приведенный ИГЭП (АПИГЭП)** $\tilde{G}^i(t)$– это АИГЭП графа $\tilde{G}^i$(содержащий начальную вершину $\tilde{\sigma}(i,t) = = \sigma(\tilde{G}^i(t)) \in \tilde{O}^i(t) = O(\tilde{G}^i(t)) \subset \tilde{O}^i$), текущую вершину $\tilde{s}_i(t) = m^i(\tilde{G}^i(t))$, а также слово процесса $\tilde{Y}^i(t) = e^i(\tilde{G}^i(t))$. Отметим, что, если $\tilde{\sigma}(i,t) = = \sigma(i,t)$, то АПИГЭП $\tilde{G}^i(t)$ является подграфом соответствующего АИГЭП $G^i(t)$. Отметим также, что оба графа могут не иметь второй нормальный вид.

Методом математической индукции можно доказать, что удаление из M^i всех недостижимых вершин и дуг не приводит к срыву контроля развития моделируемого ЭП, т. е. справедлива

Теорема 1. Пусть $\tilde{M}^i$ — приведенная индивидуальная модель, построенная из модели M^i. Тогда в любой момент времени t текущая вершина и слово контролируемого процесса как по модели $M^i(t)$, так и по модели $\tilde{M}^i(t)$ определяются одинаково, т. е. $\forall i, t(s_i(t) = \tilde{s}_i(t) \wedge Y^i(t) = \tilde{Y}^i(t))$.

6. ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МОДЕЛЕЙ

Вводимые в настоящем разделе понятия эквивалентных графов и моделей ЭП используются в дальнейшем (разд. 9) для обоснования возможности замещения семейства индивидуальных моделей ЭП построенной обобщенной моделью.

Пусть G^a и G^b – два произвольных ГЭП 2НВ одного процесса, причем $\sigma^a = \sigma(G^a)$ и $\sigma^b = \sigma(G^b)$ - их начальные вершины. Тогда G^aиG^b будем называть **эквивалентными** и обозначать $G^a \cong G^b$, если существует взаимно однозначное отображение множества всех вершин и дуг одного графа в аналогичное множество другого графа, при котором сохраняются все характеристики дуг и соответствие начальных вершин, т. е.

1) $\exists f, h((\forall S^a(S^a \in O(G^a) \Rightarrow \exists S^b(S^b \in O(G^b) \wedge \wedge S^b = f(S^a) \wedge \sigma^b = f(\sigma^a)))) \wedge (\forall S^b(S^b \in O(G^b) \Rightarrow \Rightarrow \exists S^a(S^a \in O(G^a) \wedge S^a = h(S^b) \wedge \sigma^a = h(\sigma^b)))))$;

2) $\exists f,\ h((\forall d^a(d^a \in \Delta(G^a) \Rightarrow \exists d^b(d^b \in \Delta(G^b) \wedge d^b = f(d^a) \wedge F_1(d^b,G^b) = f(F_1(d^a,G^a)) \wedge$

$\wedge F_2(d^b, G^b) = f(F_2(d^a, G^a)) \wedge \pi(d^b, G^b) = \pi(d^a, G^a) \wedge p_a(d^b, G^b) = p_a(d^a, G^a) \wedge c(d^b, G^b) = c(d^a, G^a)))) \wedge (\forall d^b(d^b \in \Delta(G^b) \Rightarrow \exists d^a(d^a \in \Delta(G^a) \wedge d^a = h(d^b) \wedge F_1(d^a, G^a) = h(F_1(d^b, G^b)) \wedge \wedge F_2(d^a, G^a) = h(F_2(d^b, G^b)) \wedge \pi(d^a, G^a) = \pi(d^b, G^b) \wedge p_a(d^a, G^a) = p_a(d^b, G^b) \wedge c(d^a, G^a) = c(d^b, G^b))))$. При этом вершины S^a и S^b, дуги d^a и d^b, множества вершин $\Delta(S^a, G^a)$ и $\Delta(S^b, G^b)$, содержащие дуги, исходящие из S^a на G^a и из S^b на G^b, будем также называть **эквивалентными** и обозначать соответственно $S^a \cong S^b$, $d^a \cong d^b$, $\Delta(S^a, G^a) \cong \Delta(S^b, G^b)$.

Отметим, что отображение h в определении является обратным для отображения f, т. е.$h = f^{-1}$.

Пусть теперь M^a и M^b – две полные статические модели 2НВ, описывающие один и тот же ЭП. Будем называть их **эквивалентными** и обозначать $M^a \cong$ M ^{b}, если: А) предикаты активности данных моделей зависят от одних и тех же условий, т. е. $p_a^a = p_a^b = p_a$; Б) ГЭП 2НВ моделей эквивалентны, т. е. $G^a \cong$ G ^{b}; В) функции развития моделей определены одинаково, т. е. $\forall G^{\wedge a}, G^{\wedge b}$: $m^a(G^{\wedge a}) = m^b(G^{\wedge a}) = m(G^{\wedge a}), m^a(G^{\wedge b}) = m^b(G^{\wedge b}) = m(G^{\wedge b})$; Г) функции информационного сопровождения моделей также определены одинаково, т. е. $\forall G^{\wedge a}, G^{\wedge b} : e^a(G^{\wedge a}) = e^b(G^{\wedge a}) = e(G^{\wedge a}), e^a(G^{\wedge b}) = e^b(G^{\wedge b}) = e(G^{\wedge b})$.

О свойствах эквивалентных моделей может быть доказана

Теорема 2. Пусть в каждый момент времени t, когда $p_a(t) = 1$, на основании каждой из эквивалентных моделей M**(**$M = M^a$ или $M = M^b$**)** строится полная динамическая модель второго нормального вида$M(t)$, в которую входят АНГЭП $G(t)$, текущая вершина $s(t) = m(G(t))$ и слово процесса $Y(t) = e(G(t))$. Тогда в данный момент текущая вершина и слово контролируемого процесса как по модели M^a, так и по модели M^b определяются одинаково, т. е. $s_a(t) \cong s_b(t), Y^a(t) = Y^b(t)$.

Теорема 2 позволяет сделать вывод о том, что использование любой модели M, эквивалентной некоторой приведенной модели $\tilde{M}^i$, позволяет адекватно организовать контроль развития соответствующего ЭП. С учетом теоремы 1 тот же вывод можно сделать для модели M и соответствующей исходной (неприведенной) модели M^i.

7. О СООТВЕТСТВИИ ДУГ И ВЕРШИН ГЭП

На понятии соответствующих дуг и вершин ГЭП основывается процедура построения обобщающей модели, рассматриваемая в следующем разделе.

Пусть G^a и G^b – два произвольных ГЭП одного процесса, S^a и S^b — две некоторые вершины, а d^a и d^b – две дуги данных ГЭП соответственно ($S^a \in O(G^a)$, $d^a \in \Delta(G^a)$, $S^b \in O(G^b)$, $d^b \in \Delta(G^b)$), для которых заданы предикаты активности $p_a(d^a, G^a)$ и $p_a(d^b, G^b)$. Тогда:

А) S^aи S^bбудем называть **соответствующими** и обозначать $S^a \sim S^b$, если это либо начальные вершины ГЭП G^a и G^b, т. е. $S^a = \sigma^a = \sigma(G^a)$, $S^b = \sigma^b = \sigma(G^b)$, либо вершины, в которые ведут соответствующие дуги, т. е. $\exists d^a$, $d^b(d^a \sim d^b \Rightarrow F_2(d^a, G^a) = S^a \wedge F_2(d^b, G^b) = S^b)$;

Б) d^a и d^b будем называть **соответствующими** и обозначать $d^a \sim d^b$, если эти дуги исходят из соответствующих вершин и их предикаты активности совпадают, причем для вершины, в которую ведет каждая из этих дуг, не существует соответствующей, отличной от той, в которую ведет другая дуга, и для любой из этих дуг не существует соответствующей, отличной от другой дуги, т. е. $\exists S^a$, $S^b S^a \sim S^b \Rightarrow F_1(d^a, G^a) = S^a \wedge \wedge F_1(d^b, G^b) = S^b \wedge p_a(d^a, G^a) = p_a(d^b, G^b)) \wedge \wedge \neg \exists s^a$, $s^b(s^a \in O(G^a) \wedge s^b \in O(G^b) \Rightarrow s^a \neq F_2(d^a, G^a) \wedge s^b \neq F_2(d^b, G^b) \wedge s^a \sim F_2(d^b, G^b) \wedge \wedge s^b \sim F_2(d^a, G^a)) \wedge \neg \exists D^a, D^b(D^a \in \Delta(G^a) \wedge D^b \in \Delta(G^b) \Rightarrow D^a \neq d^a \wedge D^b \neq d^b \wedge D^a \sim d^b \wedge D^b \sim d^a)$.

Из данного определения следует, что для любой вершины или дуги одного ГЭП не существует более одной соответствующей вершины или дуги другого ГЭП, т. е. $\forall S^a, d^a(S^a \in O(G^a) \wedge d^a \in \Delta(G^a) \Rightarrow \neg \exists s^b, S^b, d^b, D^b(s^b \in O(G^b) \wedge S^b \in O(G^b) \wedge d^b \in \Delta(G^b) \wedge D^b \in \Delta(G^b) \Rightarrow s^b \neq S^b \wedge d^b \neq D^b \wedge S^a \sim s^b \wedge S^a \sim S^b \wedge d^a \sim d^b \wedge d^a \sim D^b$.

Отметим также, что определение соответствующих вершин (дуг) может быть получено путем введения дополнительных ограничений в определение достижимых вершин (дуг). Отсюда следует, что соответствующие вершины и дуги являются достижимыми, т. е. $S^a \sim S^b \Rightarrow F(S^a, G^a) = F(S^b, G^b) = 1$ и $d^a \sim d^b \Rightarrow F(d^a, G^a) = F(d^b, G^b) = 1$.

8. ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ И ЕЕ ПОСТРОЕНИЕ

На основании индивидуальных моделей M^i строится обобщенная модель M^*, которая затем может быть использована для контроля развития описываемого ЭП вместо семейства индивидуальных моделей. При построении данной модели устраняется избыточность описания процесса, которая выявляется путем сопоставления ИГЭП различных моделей M^i. Обобщенная модель M^*, получаемая в результате объединения индивидуальных моделей, включает следующие компоненты:

а) **предикат активности** — переменную $p_a^* = \bigvee_{i=1}^{N} p_a^i$, где p_a^i — предикат активности индивидуальной модели M^i, а $\vee$ — символ логической операции «ИЛИ» (дизъюнкции). В момент времени t значение предиката активности определяется как $p_a^*(t) = \bigvee_{i=1}^{N} p_a^i(t)$, т. е. процесс, описанный обобщенной моделью M^*, в этот момент будем считать активным, если i-активен хотя бы один процесс, описанный некоторой индивидуальной моделью M^i;

б) **вектор активности** — вектор-строку вида

$$\vec{p}a^* = \|p_a^1;\, p_a^2;\, \dots;\, p_a^i;\, \dots;\, p_a^N\| = \|p_a^i\|_1^N,$$

причем в момент времени t : $\vec{p}a^*(t) = \|p_a^1(t);\, p_a^2(t);\, \dots;\, p_a^i(t);\, \dots;\, p_a^N(t)\| = \|p_a^i(t)\|_1^N$. Таким образом, значение вектора активности в каждый текущий момент времени указывает на i-активность процесса по каждой из моделей M^i;

в) **обобщенный граф элементарного процесса (ОГЭП)** — это ГЭП G^*, включающий начальную вершину $\sigma^* = \sigma(G^*)$, вершины S_j^* которого ($S_j^* \in O^* = O(G^*)$, $j = \overline{1, N^*}, N^* = N(G^*)$) соединены дугами $d_k^*(d_k^* \in \Delta^* = \Delta(G^*)$, $k = \overline{1, D^*}$, $D^* = D(G^*)$), причем, если $D_j^* = D(S_j^*, G^*)$, то $D^* = \sum_{j=1}^{N^*} D_j^*$. Для каждой дуги d_k^* ОГЭП задаются: 1) предикат активности $p_a(d_k^*, G^*)$, определяющий активность данной дуги; 2) функция прообраза $\overleftarrow{F}(d_k^*, G^*, G^i)$, принимающая единичное значение в том и только в том случае, если для дуги d_k^* ОГЭП G^* на ИГЭП G^i найдется прообраз, т. е. соответствующая ей дуга $d(\exists d(d \in \Delta(G^i) \Rightarrow d \sim d_k^*))$; 3) вектор-приоритет $\overrightarrow{\Pi}(d_k^*, G^*)$, хранящий приоритеты всех дуг d на различных ИГЭП, соответствующих d_k^*; 4) вектор информационного сопровождения $\overrightarrow{C}(d_k^*, G^*)$, хранящий символы информационного сопровождения таких дуг. Задание компонент дуги ОГЭП подробно описано в приводимой ниже процедуре его построения;

г) **семейство функций развития** m^* — это множество вида $\{m^i(\tilde{G}^{\wedge i})\}$, $i = \overline{1, N}$, где $m^i(\tilde{G}^{\wedge i})$ — функция развития приведенной индивидуальной модели M^i;

д) **семейство функций информационного сопровождения** e^* — это множество вида $\{e^i(\tilde{G}^{\wedge i})\}$, $i = \overline{1, N}$, где $e^i(\tilde{G}^{\wedge i})$ — функция информационного сопровождения приведенной индивидуальной модели M^i.

Очевидно, что ОГЭП является единственной компонентой обобщенной модели, построение которой требует применения некоторой нетривиальной процедуры. Рассмотрению такой процедуры, к которой фактически сводится процедура построения обобщенной модели, посвящается следующая часть настоящего раздела.

Предлагаемая процедура построения ОГЭП как объединения ИГЭП различных моделей M^i основывается на использовании следующих принципов: 1) каждая вершина (дуга) ОГЭП соответствует некоторой вершине (дуге) хотя бы одного из объединяемых ИГЭП; 2) каждая достижимая вершина (дуга) любого ИГЭП соответствует одной из вершин (дуг) ОГЭП; 3) все соответствующие друг другу вершины (дуги) различных ИГЭП соответствуют ровно одной вершине (дуге) ОГЭП.

Процедура реализуется шагами, на каждом из которых строится очередной уровень вершин и дуг ОГЭП, достижимых из начальной вершины. Входными данными на каждом j-м шаге являются: а) граф G_{j-1}^*, представляющий собой подграф ОГЭП G^* (недостроенный ОГЭП G^*) и сформированный на предыдущем шаге $j - 1$; б) множество всех ИГЭП $\{G^{\,i}\}$, $i = \overline{1, N}$; в) множества обрабатываемых вершин данных ИГЭП O_{j-1}^i ($O_{j-1}^i \subset O^i$) с предыдущего шага. Выходными данными, формируемыми на j-м шаге на основании входных, являются: а) граф G_j^*; б) множества вершин ИГЭП O_j^i. Для первого шага $j = 1$: $G_0^* = \{\sigma^*\}$, $\forall i(i = \overline{1, N} \Rightarrow O_0^i = \{\sigma^i\})$ (отметим, что при этом все начальные вершины соответствуют друг другу, т. е. $\sigma^* \sim \sigma^1 \sim \sigma^2 \sim \dots \sim \sigma^N$). Множества O_j^i формируются из достижимых вершин соответствующих ИГЭП G^i таким образом, что: 1) ни одно из них не содержит повторяющихся вершин, т. е. $\forall i, j(i = \overline{1, N} \wedge j = \overline{1, q} \Rightarrow \neg\exists s$, $(s \in O_j^i \wedge S \in O_j^i \Rightarrow s = S))$; 2) для каждой вершины любого множества на ОГЭП найдется соответствующая ей вершина, т. е. $\forall i, j, S(S \in O_j^i \Rightarrow \exists S^*(S^* \in O(G_j^*) \Rightarrow S \sim S^*))$; 3) ни одна из вершин любого ИГЭП не может входить более чем в одно множество, т. е. $\forall i, j, S, k(S \in O_j^i \wedge 1 \leqslant k \leqslant j - 1 \Rightarrow \notin O_k^i)$. Поскольку множество всех вершин любого ИГЭП O^i конечно (свойство ГЭП), то отсюда следует окончание предлагаемой процедуры через некоторое конечное число шагов q (от противного доказывается, что множества O_j^i становятся пустыми, т. е. $\forall i(i = \overline{1, N} \Rightarrow O_q^i = \varnothing)$). В результате формируется граф G_q^*, представляющий собой построенный ОГЭП G^*, т. е. граф такой, что $O(G_q^*) = O^*$, $\Delta(G_q^*) = \Delta^*$ и $\forall d_k^*$ $(d_k^* \in \Delta(G_q^*) \Rightarrow p_a(d_k^*, G_q^*) = p_a(d_k^*, G^*) \wedge \overrightarrow{\Pi}(d_k^*, G_q^*) = \overrightarrow{\Pi}(d_k^*, G^*) \wedge \overrightarrow{C}(d_k^*, G_q^*) = \overrightarrow{C}(d_k^*, G^*) \wedge$ $(\forall i(i = \overline{1, N} \Rightarrow \overleftarrow{F}(d_k^*, G_q^*, G^i) = \overleftarrow{F}(d_k^*, G^*, G^i)))$.

Обработка на каждом j-м шаге предлагаемой процедуры заключается в следующем («:=» — оператор присваивания):

1) в качестве множества G_j^* берется множество G_{j-1}^* с предыдущего шага, т. е. $G_j^* := G_{j-1}^*$;

2) для всех i таких, что $i = \overline{1, N}$, соответствующие множества O_j^i задаются пустыми, т. е. $O_j^i := \varnothing$;

3) для всех i, O_{j-1}^i, S, S^*, d таких, что d — дуга графа G^i, исходящая из вершины S, принадлежащей непустому множеству O_{j-1}^i и соответствующей некоторой вершине S^* на графе G_j^*, т. е. $i = \overline{1, N} \wedge O_{j-1}^i \neq \varnothing \wedge S \in O_{j-1}^i \wedge S^* \in O(G_j^*) \wedge S \sim S^* \wedge d \in \Delta^i \wedge S = F_1(d, G^i)$:

а) если на графе G_j^* найдется дуга d^*, исходящая из вершины S^* и соответствующая дуге d (иначе говоря, d — прообраз d^* на G^i), т. е. $\exists d^*$ $(d^* \in \Delta(G_j^*) \wedge \Delta(G_j^*) \subset \Delta^* \Rightarrow S^* = F_1(d^*, G_j^*) \wedge d \sim d^*))$, то

а1) функция прообраза для дуги d^* и графа G^i устанавливается в единицу, т. е. $\overleftarrow{F}(d^*, G_j^*, G^i) := 1$;

а2) i-приоритет дуги d^* (см. ниже п. б1.4) устанавливается в значение, равное приоритету прообраза (соответствующей дуги d) на графе G^i, т. е. $\pi(i, d^*, G_j^*) := \pi(d, G^i)$;

а3) i-й элемент информационного сопровождения дуги d^* (см. ниже п. б1.5) устанавливается в значение, равное информационному сопровождению прообраза на графе G^i, т. е. $c(i, d^*, G_j^*) := c(d, G^i)$;

а4) если дуга d на графе G^i ведет в вершину, для которой на том же графе имеются исходящие дуги, не имеющие соответствующих дуг на графе G_j^*, причем данная вершина еще отсутствует во множестве O_j^i, т. е. $D(F_2(d, G^i), G^i) \neq 0 \wedge D(F_2(d^*, G_j^*), G_j^*) = 0 \wedge F_2(d, G^i) \notin O_j^i$, то указанная вершина добавляется во множество O_j^i, т. е. $O_j^i := O_j^i \bigcup \{F_2(d, G^i)\}$. При этом отметим, что по определению соответствующих вершин $F_2(d, G^i) \sim F_2(d^*, G_j^*)$;

б) если дуги, указанной выше в п. а, не существует, т. е. $\neg\exists d^*(d^* \in \Delta(G_j^*) \wedge \Delta(G_j^*) \subset \Delta^* \Rightarrow S^* = F_1(d^*, G_j^*) \wedge d \sim d^*)$, то

б1) в граф G_j^* добавляется дуга d^*, т. е. $G_j^* := G_j^* \oplus d^*$, где операция добавления дуги $\oplus$ предусматривает:

б1.1) добавление d^* во множество дуг $\Delta(G_j^*)$, т. е. $\Delta(G_j^*) := \Delta(G_j^*) \bigcup \{d^*\}$;

б1.2) назначение для d^* предиката активности $p_a(d^*, G_j^*)$, который совпадает с предикатом активности дуги d на графе G^i, т. е. $p_a(d^*, G_j^*) := p_a(d, G^i)$;

б1.3) задание для d^* значения функции исходной вершины на графе G_j^*, равного S^*, т. е. $F_1(d^*, G_j^*) := S^*$;

б1.4) задание для d^* вектор-приоритета $\overrightarrow{\Pi}(d^*, G_j^*)$, т. е. $\overrightarrow{\Pi}(d^*, G_j^*) := \|\pi(1, d^*, G_j^*); \pi(2, d^*, G_j^*); ...; \pi(k, d^*, G_j^*); ...; \pi(N, d^*, G_j^*)\| = \|\pi(k, d^*, G_j^*)\|_1^N$, где $\pi(\mathrm{k,d}^*, G_j^*)$ — k-й частный приоритет (k-приоритет) дуги d^*, равный приоритету дуги d на графе G^i, если $k = i$, и значению, на единицу превышающему значение максимального приоритета среди дуг всех ИГЭП в противном случае, т. е. определяемый следующим образом:

$$\pi(k, d^*, G_j^*) = \begin{cases} \pi(d, G^i), \text{ если } k = i, \\ \max\limits_{\lambda=\overline{1,N}} \left\{ \max\limits_{l=\overline{1,D(G^k)}} \{\pi(d_l, G^\lambda)\} \right\} + 1, \\ \text{если } k \neq i; \end{cases}$$

б1.5) задание для d^* вектора информационного сопровождения, т. е. $\overrightarrow{C}(d^*, G_j^*) := \|c(1, d^*, G_j^*); c(2, d^*, G_j^*); \ldots; c(k, d^*, G_j^*); \ldots \ldots c(N, d^*, G_j^*)\| = \|c(k, d^*, G_j^*)\|_1^N$, где $c(k, d^*, G_j^*)$ — k-й элемент информационного сопровождения дуги d^*, совпадающий с информационным сопровождением дуги d на графе G^i, если $k = i$, и равный “пустому” слову в противном случае, т. е. определяемый следующим образом:

$$c(k, d^*, G_j^*) = \begin{cases} c(d, G^i), \text{ если } k = i, \\ c^0, \text{ если } k \neq i; \end{cases}$$

б1.6) если для вершины, в которую ведет дуга d на G^i, уже существует соответствующая вершина S^{**} на графе G_j^*, т. е. $\exists S^{**}(S^{**} \in O(G_j^*) \subset O^* \Rightarrow S^{**} \sim F_2(d, G^i))$, то задание данной вершины в качестве конечной для дуги d^* на графе G_j^*, т. е. $F_2(d^*, G_j^*) := S^{**}$;

б1.7) если вершины, указанной в п. б1.6, не существует, т. е. $\neg\exists S^{**}(S^{**} \in O(G_j^*) \subset O^* \Rightarrow S^{**} \sim F_2(d, G^i))$, то

б1.7.1) в граф G_j^* добавляется вершина S^{**}, т. е. $G_j^* := G_j^* \otimes S^{**}$, где операция $\otimes$ добавления вершины предусматривает:

б1.7.1.1) добавление S^{**} во множество вершин $O(G_j^*)$, т. е. $O(G_j^*) := O(G_j^*) \bigcup \{S^{**}\}$;

б1.7.1.2) задание S^{**} в качестве конечной для дуги d^* на графе G_j^*, т. е. $F_2(d^*, G_j^*) := S^{**}$;

б1.7.2) вершина S^{**} добавляется во множество O_j^i, т. е. $O_j^i := O_j^i \bigcup \{F_2(d, G^i)\}$;

б2) функция прообраза для дуги d^* и графа G^i устанавливается в единицу, т. е. $\overleftarrow{F}(d^*, G_j^*, G^i) := 1$;

б3) для всех прочих ИГЭП значение данной функции обнуляется, т. е. при всех k таких, что $k = \overline{1, N} \wedge k \neq i \Rightarrow \overleftarrow{F}(d^*, G_j^*, G^k) := 0$. Отметим, что в случае б) добавляемая дуга d^* соответствует дуге d , т. е. $d \sim d^*$.

Очевидно, что построенный таким образом ОГЭП будет удовлетворять определению ГЭП и, следовательно, может рассматриваться как разновидность последнего.

9. i-МОДЕЛИ ЭП

Обсудим теперь вопрос об использовании построенной обобщенной модели M^*. Очевидно, что для обеспечения на ее основе адекватного контроля описываемого ЭП должна существовать возможность восстановления из M^* любой индивидуальной модели M^i. Такая возможность действительно существует, однако, в силу того, что рассмотренная в разделе 8 процедура построения обобщенной модели одновременно реализует функции приведения всех индивидуальных моделей, восстановление этих последних возможно только в виде так называемых i-**моделей**. Чтобы ввести понятие i-модели, воспользуемся понятием i-графа ОГЭП.

i-**графом** ОГЭП G^* будем называть НГЭП G_i^* такой, что: 1) дугами G_i^* могут быть только те дуги ОГЭП G^*, каждая из которых имеет прообраз на ИГЭП G^i (соответствующая функция прообраза равна единице), т. е. $\forall d^*$ $(d^* \in \Delta(G_i^*) \subset \Delta^* \Rightarrow \overleftarrow{F}(d^*, G^*, G^i) = 1)$; 2) все дуги ОГЭП G^*, не принадлежащие G_i^*, не имеют прообразов на ИГЭП G^i, т. е. $\forall d^*$ $(d^* \in \Delta^* \wedge$

$\wedge d^* \notin \Delta(G_i^*) \Rightarrow \overleftarrow{F}(d^*, G^*, G^i) = 0$); 3) начальная вершина G_i^* совпадает с начальной вершиной ОГЭП G^*, т.е. $\sigma(G_i^*) = \sigma^* \in O(G_i^*) \subset O^*$; 4) если на G_i^* отсутствуют дуги, то он состоит только из начальной вершины, т.е. $\Delta(G_i^*) = \varnothing \Rightarrow \Rightarrow O(G_i^*) = \sigma(G_i^*)$; 5) если на G_i^* имеются дуги, то для каждой из них определены исходная и конечная вершина, и для каждой вершины имеется по крайней мере одна исходящая или входящая дуга, т.е. $\Delta(G_i^*) \neq \varnothing \Rightarrow \forall d^*(d^* \in \Delta(G_i^*) \Rightarrow \Rightarrow \exists s_1^*, s_2^*(s_1^*, s_2^* \in O(G_i^*) \wedge s_1^* = F_1(d^*, G_i^*) \wedge s_2^* = = F_2(d^*, G_i^*))) \wedge \forall s^*(s^* \in O(G_i^*) \Rightarrow \exists d^*(d^* \in \in \Delta(G_i^*) \wedge (s^* = F_1(d^*, G_i^*) \vee s^* = F_2(d^*, G_i^*))))$; 6) для каждой дуги G_i^* значение ее предиката активности совпадает со значением предиката активности данной дуги на ОГЭП G^*, а ее приоритет и элемент информационного сопровождения соответственно равны i-му приоритету и i-му элементу информационного сопровождения данной дуги на G^*, т.е. $\forall d^*\ (d^* \in \Delta(G_i^*) \subset \Delta \Rightarrow \Rightarrow p_a(d^*, G_i^*) = p_a(d^*, G^*) \wedge \pi(d^*, G_i^*) = = \pi(i, d^*, G^*) \wedge c(d^*, G_i^*) = c(i, d^*, G^*))$.

О свойствах i-графа может быть доказана

Теорема 3. Любой i-граф G_i^* ОГЭП G^* относится к классу ГЭП 2НВ и эквивалентен ПИГЭП $\tilde{G}^i$, построенному из ИГЭП G^i.

Введем теперь определение i-модели M_i^*.

i-**моделью** обобщенной модели M^* будем называть модель M_i^*, которая строится из M^* и включает i-граф G_i^*, а также компоненты, совпадающие с компонентами А, В и Г приведенной индивидуальной модели $\tilde{M}^i$.

Отсюда следует, что i-модель M_i^* является полной статической моделью 2НВ. Кроме того, согласно определению эквивалентных моделей, $M_i^* \cong \tilde{M}^i$.

Таким образом, из доказательства сформулированных выше теорем следует, что контроль развития ЭП на основе семейства индивидуальных моделей $M = \{M^i\}$ может быть заменен на адекватный контроль, предполагающий использование обобщенной модели M^*: вместо любой модели M^i может быть использована i-модель M_i^*, которая строится из M^* и служит для построения динамической i-модели $M_i^*(t)$, непосредственно обеспечивающей контроль развития ЭП.

10. СПЕЦИАЛИЗИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ $\tilde{M}$

Контроль ЭП по обобщенной модели, осуществляемый через построение i-моделей M_i^*, принципиально ничем не отличается от контроля на основе семейства индивидуальных моделей и характеризуется такой же громоздкостью и неоднозначностью.

Для упрощения процедуры контроля развития ЭП необходимо выполнить некоторую процедуру согласования индивидуальных моделей M^i. Процедура согласования, предлагаемая в настоящем разделе, осуществляет преобразование обобщенной модели M^* в специализированную модель $\tilde{M}$, имеющую второй нормальный вид. При этом, однако, к модели M^* предъявляется дополнительное требование — она должна быть **частично согласованной**, т.е. каждое из ее семейств m^* и e^* может быть представлено одной функцией: $\forall i\ (i = \overline{1, N} \Rightarrow \forall \tilde{G}^{\wedge i}((m^i(\tilde{G}^{\wedge i}) = m^*(\tilde{G}^{\wedge i})) \wedge \wedge (e^i(\tilde{G}^{\wedge i}) = e^*(\tilde{G}^{\wedge i}))))$.

Модель $\tilde{M}$, которая получается в результате преобразования частично согласованной обобщенной модели M^*, как и всякая полная статическая модель 2НВ, включает следующие компоненты: А) предикат активности $\tilde{P}_a$; Б) ГЭП 2НВ $\tilde{G}$; В) функцию развития $y = \tilde{m}(\tilde{G}^{\wedge})$; Г) функцию информационного сопровождения $y = \tilde{e}(\tilde{G}^{\wedge})$. В основе ее построения лежит принцип ранжирования экспертов, где под **рангом** эксперта будем понимать номер i соответствующей индивидуальной модели M^i: чем меньше i, тем выше ранг эксперта и тем предпочтительнее использовать построенную им модель M^i для контроля описываемого ЭП.

Основная идея процедуры построения модели $\tilde{M}$ заключается в преобразовании вектор-приоритета $\overrightarrow{\Pi}(d_k^*, G^*)$ каждой из дуг d_k^* ОГЭП G^* в натуральное число, которое затем рассматривается как обычный приоритет d_k^* на том же графе. Если также преобразовать в строку символов вектор информационного сопровождения дуги $\overrightarrow{C}(d_k^*, G^*)$, то ГЭП $\tilde{G}$, полученный таким образом из ОГЭП G^*, будет иметь второй нормальный вид и обобщать при этом все данные, содержащиеся в индивидуальных моделях.

В качестве преобразования предлагается рассматривать вектор-приоритет дуги d_k^* как N-разрядное число в системе счисления с основанием, на единицу большим максимально возможного частного приоритета дуг ОГЭП G^*: старшим разрядом данного числа будет первый частный приоритет дуги, а младшим — последний. После такого преобразования дуги, исходящие из каждой вершины графа, будут упорядочены по приоритетам, причем новая система приоритетов не только сохраняет упорядоченность, изначально присущую прообразам данных дуг на каждом из ИГЭП, но и вводит дополнительную упорядоченность, соответствующую рангам экспертов, для всех пар дуг, прообразы которых не принадлежат одному ИГЭП.

Предлагаемая процедура построения модели $\tilde{M}$ из обобщенной модели M^* включает следующие этапы:

1) в качестве предиката активности модели $\tilde{M}$ берется предикат активности модели M^*, т.е. $\tilde{P}_a := p_a^*$;

2) в качестве множеств вершин и дуг ГЭП $\tilde{G}$ модели $\tilde{M}$ берутся соответствующие множества ОГЭП G^* модели M^* с сохранением начальной вершины, а также исходной и конечной вершин для каждой дуги, т.е. $O(\tilde{G}) := O^*$; $\sigma(\tilde{G}) := \sigma^*$; $\Delta(\tilde{G}) := \Delta^*$; для всех $k(F_1(d_k^*, \tilde{G}) := F_1(d_k^*, G^*)$; $F_2(d_k^*, \tilde{G}) := F_2(d_k^*, G^*))$;

3) для дуг ГЭП $\tilde{G}$ устанавливаются приоритеты, определяемые преобразованием вектор-приоритетов данных дуг на ОГЭП G^* в натуральные числа: для всех k $(\pi(d_k^*, \tilde{G}) := [\pi(1, d_k^*, G^*)\pi(2, d_k^*, G^*)...\pi(i, d_k^*, G^*)...$ $...\pi(N, d_k^*, G^*)]_{A*})$; Здесь $[...]_{A*}$ — запись N-разрядного числа в системе счисления с основанием $A^* = \max\limits_{i=\overline{1,N}}\{\max\limits_{k=\overline{1,D}}{}^*\{\pi(i, d_k^*, G^*)\}\} + 1$;

4) в качестве предикатов активности дуг ГЭП $\tilde{G}$ берутся предикаты активности данных дуг на ОГЭП G^*, т. е. для всех $k(p_a(d_k^*, \tilde{G}) := p_a(d_k^*, G^*))$;

5) для дуг ГЭП $\tilde{G}$ устанавливаются символы информационного сопровождения, определяемые преобразованием векторов информационного сопровождения данных дуг на ОГЭП G^* в строки символов: для всех $k(c(d_k^*, \tilde{G}) := c(1, d_k^*, G^*) \circ$ $\circ c(2, d_k^*, G^*)\circ...\circ c(i, d_k^*, G^*)\circ...\circ c(N, d_k^*, G^*))$; Здесь $\circ$ — символ операции конкатенации (сцепления) символов. Отметим, что, поскольку все вершины и дуги ОГЭП являются достижимыми, то граф $\tilde{G}$ является ГЭП 2НВ;

6) в качестве функции развития модели $\tilde{M}$ берется соответствующая функция частично согласованной модели M^*, т. е. для всех $\tilde{G}^\wedge(\tilde{m}(\tilde{G}^\wedge) :=$ $:= m^*(\tilde{G}^\wedge))$;

7) в качестве функции информационного сопровождения модели $\tilde{M}$ берется соответствующая функция модели M^*, т. е. для всех $\tilde{G}^\wedge(\tilde{e}(\tilde{G}^\wedge) :=$ $:= e^*(\tilde{G}^\wedge))$.

Применение построенной модели $\tilde{M}$ для контроля описываемого ЭП осуществляется аналогично использованию любой из полных статических моделей, рассмотренных в настоящей статье.

11. СПЕЦИАЛИЗИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ $\tilde{M}^*$

Аналогично любую частично согласованную обобщенную модель M^* можно привести к модели $\tilde{M}^*$, также имеющей второй нормальный вид, т. е. включающей предикат активности $\tilde{P}_a^*$, ГЭП 2НВ $\tilde{G}^*$, функцию развития $y = \tilde{m}^*(\tilde{G}^\wedge)$ и функцию информационного сопровождения $y = \tilde{e}^*(\tilde{G}^\wedge)$.

Модель $\tilde{M}^*$ хотя и учитывает ранжирование экспертов, введенное в предыдущем разделе, однако характеризуется совсем иным, нежели модель $\tilde{M}$, принципом построения: коллективное мнение экспертов в ней преобладает над авторитетом индивидуальных высказываний. Согласно данному принципу приоритет каждой дуги d_k^* ГЭП $\tilde{G}^*$, получаемый в результате преобразования вектор-приоритета данной дуги на ОГЭП G^*, определяется в первую очередь числом прообразов d_k^* во всем множестве ИГЭП $\{G^i\}$: чем это число выше (т. е. чем больше экспертов использует соответствующие дуги при построении своих индивидуальных моделей), тем выше приоритет дуги d_k^*.

Реализация этого принципа в модели $\tilde{M}^*$ осуществляется путем добавления соответствующего числа, называемого **обобщенным приоритетом** дуги, в качестве первого элемента вектор-приоритета с последующим преобразованием данного вектора в натуральное число по способу, изложенному в разд. 10.

Соответствующая процедура построения модели $\tilde{M}^*$ не отличается от процедуры построения модели $\tilde{M}$ за исключением этапа 3, который выполняется следующим образом: для всех k $(\pi(d_k^*, \tilde{G}^*) := [\pi(0, d_k^*, G^*)\pi(1, d_k^*, G^*)\pi(2, d_k^*, G^*)...$ $\pi(i, d_k^*, G^*)...\pi(N, d_k^*, G^*)]_{A0})$. Здесь $\pi(0, d_k^*, G^*) =$ $= N + 1 - \sum_{i=1}^{N} \overleftarrow{F}(d_k^*, G^*, G^i)$ — обобщенный приоритет дуги d_k^* на ОГЭП G^*; $[...]_{A0}$ — запись $(N+1)$-разрядного числа в системе счисления с основанием $A^0 = \max\limits_{i=\overline{0,N}}\{\max\limits_{k=\overline{1,D}}{}^*\{\pi(i, d_k^*, G^*)\}\} + 1$.

Модель $\tilde{M}^*$ может быть использована для контроля ЭП и в тех случаях, когда авторитет привлеченных экспертов одинаков. При этом ранжирование экспертов, необходимое для реализации процедуры построения $\tilde{M}^*$, осуществляется произвольным образом.

12. ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МОДЕЛЕЙ

Процедуры, предложенные в настоящей работе, позволяют обеспечить безызбыточное хранение индивидуальных моделей ЭП, построенных различными экспертами и имеющих первый нормальный вид, в форме обобщенной модели, а также их согласование путем приведения обобщенной модели ко второму нормальному виду. Реальная экономия от применения данных процедур пропорциональна числу привлекаемых экспертов и степени совпадения предложенных ими моделей, а также стоимости проведения отменяемого коллективного согласования моделей с экспертами (управленческих игр).

Разработанные процедуры предполагается использовать для моделирования конкретных производственных ситуаций на машиностроительном предприятии. При этом ожидается, что экономия от внедрения составит не менее 50% стоимости реализации полного комплекта индивидуальных моделей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Модели в виде графов с приоритетами, каждой из дуг которых соответствуют предикат активности (переменная, определяющая условие перехода по данной дуге) и символы информационного сопровождения, могут быть использованы для описания так называемых элементарных процессов (ЭП), которые, взаимодействуя между собой на различных уровнях иерархии, образуют моделируемый иерархический процесс. Помимо графа элементарного процесса (ГЭП) модель любого ЭП содержит его предикат активности, определяемый аналогично предикату активности дуги, а также рекурсивные функции развития и информационного сопровождения, с помощью которых на ГЭП отслеживается текущая вершина, изображающая текущее состояние контролируемого ЭП,

и формируется набор соответствующих сообщений оператору. Все подобные модели в настоящей работе отнесены к первому нормальному виду.

2. В ходе моделирования конкретных процессов, протекающих в сложных системах, могут принимать участие различные эксперты, каждый из которых предлагает свою, индивидуальную модель ЭП, имеющую первый нормальный вид. Индивидуальные модели могут быть приведены также ко второму нормальному виду путем удаления из соответствующих ГЭП недостижимых вершин и дуг. Доказывается, что это не влечет за собой срыв контроля развития моделируемого ЭП.

3. В настоящей работе предлагается новая методика моделирования ЭП на основе экспертных оценок. Ее наиболее важным звеном является процедура, которая строит обобщенную модель ЭП на основе предложенных экспертами индивидуальных моделей, устраняя их избыточность и сохраняя различия. В дальнейшем при использовании построенной модели в ходе контроля развития ЭП из нее может быть восстановлена любая из ранее обобщенных индивидуальных моделей.

4. Восстановление индивидуальных моделей осуществляется в виде так называемых i-моделей, каждая из которых оказывается эквивалентной соответствующей индивидуальной модели, но не исходной, построенной экспертом, а приведенной ко второму нормальному виду. Таким образом, контроль развития ЭП на основе семейства индивидуальных моделей может быть заменен на адекватный контроль, предполагающий использование обобщенной модели.

5. В целях упрощения контроля развития ЭП предлагаемая методика предусматривает возможность согласования мнений различных экспертов, отражаемых в обобщенной модели. Это достигается путем использования двух процедур преобразования обобщенной модели ЭП к специализированным моделям второго нормального вида. В основу одной из этих процедур положен принцип ранжирования экспертов и их моделей по приоритетам, а в основу другой — принцип преобладания коллективного мнения экспертов над авторитетом индивидуальных высказываний. Использование данных процедур позволяет устранить противоречия, содержащиеся в индивидуальных моделях, не привлекая их авторов к коллективному обсуждению.

6. Внедрение предлагаемой методики на предприятии машиностроения способствует повышению эффективности управления производством в различных ситуациях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Миронов, В. В.** Об автоматной модели динамической ситуации / В. В. Миронов, Ю. Б. Головкин, Н. И. Юсупова // Управление сложными техническими системами : межвуз. науч. сб. № 9. Уфа : УАИ, 1986. С. 3–10.
2. **Миронов, В. В.** Иерархические процессы и их реализация / В. В. Миронов, Р. А. Ярцев // Вопросы регулирования и управления в сложных системах : межвуз. научн. сб. Уфа : УАИ, 1991. С. 46–58.
3. **Миронов, В. В.** Лингвистическое обеспечение иерархических моделей / В. В. Миронов, Н. И. Юсупова, Гончар Л.Е. // Иерархические модели процессов управления : монография. Уфа : УГАТУ, 1994. С. 82–149.
4. **Миронов, В. В.** Иерархическая ситуационная модель с трехзначными предикатами при управлении сложными техническими объектами / В. В. Миронов, О. Н. Сметанина, Н. И. Юсупова // Проблемы управления и моделирования в сложных системах : тр. II междунар. конф. Самара, 2000. С. 111–116.
5. **Юсупова, Н. И.** Иерархические ситуационные модели с учетом предыстории / Н. И. Юсупова, В. В. Миронов, А. Н. Ситчихин // Информатика и информационные технологии : тр. 2-й междунар. конф. (CSIT'2000). Россия, Уфа–М. : УГАТУ, 2000. Т. 2. С. 323–328. (Статья на англ. яз.).
6. **Миронов, В. В.** Асинхронная децентрализованная интерпретация иерархических ситуационных моделей / В. В. Миронов, Р. Ф. Ахметшин // Вестник УГАТУ. 2003. Т. 4, № 1. С. 108–116.
7. **Миронов, В. В.** Электронные документы на базе динамических моделей / В. В. Миронов, Т. И. Гарифуллин, Г. Г. Сабирьянова // Тр. 6-го междунар. сем. по информатике и информационным технологиям CSIT'2004. Будапешт, 2004. Т. 2. С. 134–139. (Статья на англ. яз.).
8. **Ярцев, Р. А.** Об автоматизации управления элементарными процессами в сложных системах / Р. А. Ярцев. Рукопись деп. в ВИНИТИ, 13.02.91, № 739-В91.
9. **Мартино, Дж.** Технологическое прогнозирование / Дж. К. Мартино Пер. с англ. М. : Прогресс, 1977. 591 с.
10. **Юсупов, И. Ю.** Автоматизированные системы принятия решений / И. Ю. Юсупов. М. : Наука, 1983. 88 с.

ОБ АВТОРАХ

Газетдинова Светлана Геннадьевна, аспирантка каф. АСУ. Дипл. спец. по инф. системам в экономике (УГАТУ, 2004). Готовит дис. в обл. автоматизации систем управления производственными процессами.

Ярцев Рустэм Альбертович, доц. каф. АСУ. Дипл. инж.-системотехн. (УАИ, 1988). Канд. техн. наук по АСУ (УАИ, 1991). Иссл. в обл. кибернетики, системотехники и их философских проблем.