

УДК 531.3.07

## Моделирование движений гироскопа методом электроаналогий

Н. Г. Чикуров

tchikurov@yandex.ru

ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

Поступило в редакцию 22.12.2012

**Аннотация.** На примере гироскопа с тремя степенями свободы показана методика математического моделирования механических систем методом электроаналогий. Построена динамическая модель гироскопа в виде дифференциально-алгебраических уравнений.

**Ключевые слова.** Математическое моделирование систем; метод электромеханических аналогий; гироскоп

### ВВЕДЕНИЕ

Задачу построения математической модели гироскопа будем рассматривать как задачу построения системы дифференциальных уравнений, учитывающих инерционные и скоростные параметры гироскопа, а также действующие на него внешние силы [1].

Чтобы синтезировать точную динамическую модель гироскопа, используем метод электроаналогий [2]. Концепция метода электроаналогий основана на том, что этот метод наряду с законами теоретической механики позволяет использовать некоторые определенные законы электротехники. В результате расширяется представление о происходящих явлениях и появляется возможность формализовать синтез математических моделей сложных механических систем. Возможность применения для решения задач электротехники законов Кирхгофа дает электрическим моделям значительное преимущество перед моделями иной физической природы, так как в других областях техники нет законов, полностью адекватных законам Кирхгофа. Причиной этого являются разные графические отображения сравниваемых систем.

Механические объекты обычно представляют в виде структурно-кинематических схем. Кинематическая схема характеризует одновременно геометрию механизма и его движение, что затрудняет топологическое представление механических систем. Наиболее сложно в механике применить аналог первого закона Кирхгофа, в соответствии с которым сумма токов в узле электрической схемы равна нулю. Продифференцировав уравнение токов в узле, получим

важное следствие, вытекающее из первого закона Кирхгофа: сумма производных токов (применительно к механике – ускорений) в узле также равна нулю. Данное утверждение в терминах механики не столь очевидно, как в электротехнике.

Другой аспект метода электроаналогий сводится к применению в эквивалентных электрических схемах замещения идеальных трансформаторов как с постоянными, так и с переменными коэффициентами трансформации. Трансформатор с переменным коэффициентом трансформации (случаи плоских криволинейных и пространственных движений тел) представляет собой амплитудный модулятор напряжений, токов и производных токов. Математическое описание таких объектов уравнениями механики также затруднительно.

С помощью электрических разъемных соединений эквивалентные электрические схемы замещения можно собирать из отдельных независимых модулей (подсистем), что позволяет конструировать математические модели по агрегатному (расширяемому) принципу.

Применение метода электроаналогий предусматривает декомпозицию – разделение сложных динамических систем на элементарные звенья трех видов: инерционные, диссипативные и упругие. В результате, как мы увидим позже, создается имитационная математическая модель, которая в конечном итоге представляет собой совместную систему дифференциальных и линейных алгебраических уравнений. При моделировании на ЭВМ эти уравнения имеют устойчивое численное решение [2].

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНЕРЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ ГИРОСКОПА

Из-за ограниченного объема статьи рассмотрим простейший гироскоп с тремя степенями свободы в виде твердого тела, одна из точек которого неподвижна (рис. 1). Положение такого тела можно определить в неподвижной (базовой) системе координат путем задания трех направляющих косинусов главной центральной оси инерции (оси симметрии) тела.

Вектор  $\mathbf{r}$  совмещен с осью симметрии твердого тела, которое представляет собой однородный диск, закрепленный на конце стержня. Пусть стержень, на котором закреплен диск, невесом и центр тяжести твердого тела расположен на конце вектора  $\mathbf{r}$ , в точке  $c$ . К центру масс тела приложена внешняя сила веса  $\mathbf{P}$ .

Выведем уравнения движения рассматриваемого тела в неподвижной системе координат  $Oxyz$ . Рассмотрим вектор угловой скорости тела  $\boldsymbol{\omega} = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}$  и вектор главной оси симметрии  $\mathbf{r} = \{r_x, r_y, r_z\}$ . Тогда вектор линейной скорости конца вектора  $\mathbf{r}$  (точки  $c$ ) будет равен [3]

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \{\omega_y r_z - r_y \omega_z, \omega_z r_x - r_z \omega_x, \omega_x r_y - r_x \omega_y\}.$$

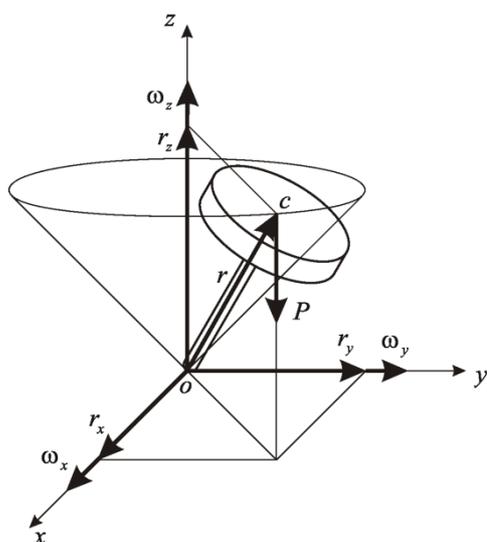


Рис. 1

Полагая  $\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ , приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dr_x}{dt} &= r_z \omega_y - r_y \omega_z = V_x, \\ \frac{dr_y}{dt} &= r_x \omega_z - r_z \omega_x = V_y, \\ \frac{dr_z}{dt} &= r_y \omega_x - r_x \omega_y = V_z, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} V_x &= r_z \omega_y - r_y \omega_z, \\ V_y &= r_x \omega_z - r_z \omega_x, \\ V_z &= r_y \omega_x - r_x \omega_y. \end{aligned} \quad (2)$$

Сейчас мы не будем рассматривать внутренние силы (реакцию связи) в точке  $O$ . Определение этих сил – отдельная задача, к решению которой мы обратимся позже. Тогда в соответствии со вторым законом Ньютона можем записать основное уравнение движения тела

$$\mathbf{M} - \mathbf{M}'' = 0, \quad (3)$$

где  $\mathbf{M}$  – сумма главных моментов активных сил, действующих на тело;  $\mathbf{M}''$  – сумма моментов от сил инерции движущегося тела.

При движении тела его осевые моменты инерции и центробежные моменты инерции в неподвижной системе координат будут переменными величинами, так как тело при своем движении изменяет свое положение относительно осей этой системы. Учитывая это обстоятельство, запишем векторное уравнение момента от сил инерции, действующих на тело

$$\|J\| \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \frac{d\|J\|}{dt} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}'' \quad (4)$$

где  $\|J\|$  – тензор инерции тела.

Тензор инерции представляет собой матрицу, вычисленную в заданной точке системы координат

$$\|J\| = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{pmatrix}.$$

Таким образом, дальнейшее решение задачи сводится к определению входящих в тензор инерции осевых моментов инерции  $J_x, J_y, J_z$  и центробежных моментов инерции  $J_{xy}, J_{yz}, J_{zx}$ , а также их производных.

Определим осевые моменты инерции тела относительно координатных осей базовой системы координат  $Oxyz$ . Будем считать моменты инерции тела  $J'_x, J'_y, J'_z$  определенными в подвижной системе координат  $Ox'y'z'$ , ось  $z'$  кото-

рой совмещена с осью симметрии тела (рис. 2). Поскольку тело симметрично относительно этой оси, то  $J'_x = J'_y$ .

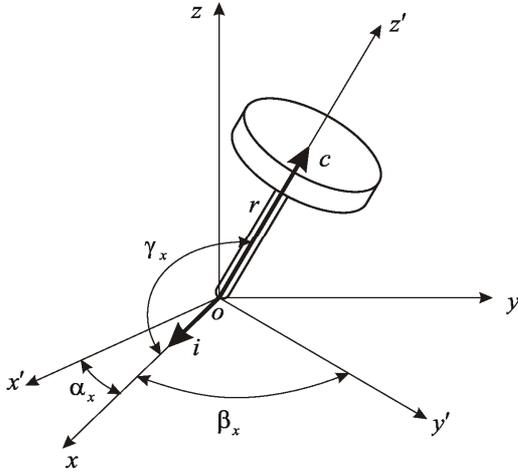


Рис. 2

Сначала найдем момент инерции тела  $J_x$  относительно оси  $x$  базовой системы координат. Координатные оси  $Ox'y'z'$  являются главными осями инерции тела. Поэтому центробежные моменты инерции равны нулю и момент инерции  $J_x$  относительно орта  $\mathbf{i}$ , определяющего направление оси  $x$ , и составляющего с осями  $x', y', z'$  углы соответственно  $\alpha_x, \beta_x, \gamma_x$ , определяется по формуле [3]

$$J_x = J'_x \cos^2 \alpha_x + J'_y \cos^2 \beta_x + J'_z \cos^2 \gamma_x. \quad (5)$$

Сумма квадратов направляющих косинусов

$$\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \beta_x + \cos^2 \gamma_x = 1.$$

Откуда

$$\cos^2 \beta_x + \cos^2 \gamma_x = 1 - \cos^2 \alpha_x.$$

С учетом последнего выражения и равенства  $J'_x = J'_y$  преобразуем уравнение (5).

$$\begin{aligned} J_x &= J'_x (\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \beta_x) + J'_z \cos^2 \gamma_x = \\ &= J'_x (1 - \cos^2 \gamma_x) + J'_z \cos^2 \gamma_x = (J'_z - J'_x) \cos^2 \gamma_x + J'_x, \end{aligned}$$

где  $\cos \gamma_x = \frac{r_x}{r}$ .

Определяя аналогично моменты инерции относительно двух других осей  $y$  и  $z$ , получаем

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{J'_z - J'_x}{r^2} r_x^2 + J'_x, \\ J_y &= \frac{J'_z - J'_x}{r^2} r_y^2 + J'_x, \\ J_z &= \frac{J'_z - J'_x}{r^2} r_z^2 + J'_x. \end{aligned}$$

Обозначим константу

$$C = \frac{J'_z - J'_x}{r^2}. \quad (6)$$

Тогда последняя система уравнений приобретает вид

$$\begin{aligned} J_x &= Cr_x^2 + J'_x, \\ J_y &= Cr_y^2 + J'_x, \\ J_z &= Cr_z^2 + J'_x. \end{aligned} \quad (7)$$

Принимая во внимание, что моменты инерции  $J'_x, J'_y, J'_z$  в подвижной системе координат величины постоянные, продифференцируем уравнения (7).

$$\begin{aligned} \frac{dJ_x}{dt} &= 2Cr_x \frac{dr_x}{dt}, \\ \frac{dJ_y}{dt} &= 2Cr_y \frac{dr_y}{dt}, \\ \frac{dJ_z}{dt} &= 2Cr_z \frac{dr_z}{dt}. \end{aligned}$$

Подставляя в последние уравнения выражения для производных из уравнений (1), получаем

$$\begin{aligned} \frac{dJ_x}{dt} &= 2Cr_x V_x, \\ \frac{dJ_y}{dt} &= 2Cr_y V_y, \\ \frac{dJ_z}{dt} &= 2Cr_z V_z. \end{aligned} \quad (8)$$

Определим центробежные моменты инерции  $J_{xy}, J_{yz}, J_{zx}$  в точке  $O$  неподвижной системы координат. Воспользуемся формулами [3]

$$\begin{aligned} J_{xy} &= mr_x^c r_y^c + \alpha_{11} \alpha_{21} (J_z^0 - J_x^0) + \alpha_{12} \alpha_{22} (J_z^0 - J_y^0), \\ J_{yz} &= mr_y^c r_z^c + \alpha_{21} \alpha_{31} (J_z^0 - J_x^0) + \alpha_{22} \alpha_{32} (J_z^0 - J_y^0), \\ J_{zx} &= mr_z^c r_x^c + \alpha_{31} \alpha_{11} (J_z^0 - J_x^0) + \alpha_{33} \alpha_{13} (J_z^0 - J_y^0), \end{aligned}$$

где  $r_x^c, r_y^c, r_z^c$  – координаты центра масс тела.

В силу симметрии тела относительно центральной оси  $J_x^0 = J_y^0$  и система уравнений принимает следующий вид

$$\begin{aligned} J_{xy} &= mr_x^c r_y^c + (\alpha_{11} \alpha_{21} + \alpha_{12} \alpha_{22}) (J_z^0 - J_x^0), \\ J_{yz} &= mr_y^c r_z^c + (\alpha_{21} \alpha_{31} + \alpha_{22} \alpha_{32}) (J_z^0 - J_x^0), \\ J_{zx} &= mr_z^c r_x^c + (\alpha_{31} \alpha_{11} + \alpha_{33} \alpha_{13}) (J_z^0 - J_x^0). \end{aligned}$$

Исходя из ортогональности векторов  $x_0, y_0$  и  $z_0$ , имеем

$$\begin{aligned} \alpha_{11} \alpha_{21} + \alpha_{12} \alpha_{22} + \alpha_{13} \alpha_{23} &= 0, \\ \alpha_{21} \alpha_{31} + \alpha_{22} \alpha_{32} + \alpha_{23} \alpha_{33} &= 0, \\ \alpha_{31} \alpha_{11} + \alpha_{32} \alpha_{12} + \alpha_{33} \alpha_{13} &= 0. \end{aligned}$$

но  $\alpha_{13} = \frac{r_x}{r}$ ,  $\alpha_{23} = \frac{r_y}{r}$ ,  $\alpha_{33} = \frac{r_z}{r}$ .

Поэтому можем записать

$$\begin{aligned}\alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} &= -\alpha_{13}\alpha_{23} = -\frac{r_x r_y}{r^2}, \\ \alpha_{21}\alpha_{31} + \alpha_{22}\alpha_{32} &= -\alpha_{23}\alpha_{33} = -\frac{r_y r_z}{r^2}, \\ \alpha_{31}\alpha_{11} + \alpha_{32}\alpha_{12} &= -\alpha_{33}\alpha_{13} = -\frac{r_z r_x}{r^2}.\end{aligned}$$

Подставим эти выражения в уравнения для центробежных моментов инерции.

$$\begin{aligned}J_{xy} &= mr_x^c r_y^c - \frac{r_x r_y}{r^2} (J_z^0 - J_x^0), \\ J_{yz} &= mr_y^c r_z^c - \frac{r_y r_z}{r^2} (J_z^0 - J_x^0), \\ J_{zx} &= mr_z^c r_x^c - \frac{r_z r_x}{r^2} (J_z^0 - J_x^0).\end{aligned}\quad (9)$$

Поскольку центральная ось симметрии  $z_0$  проходит через точку  $O$  неподвижной системы координат, то  $J_x^0 = J_x' - mr^2$ ,  $J_y^0 = J_y' - mr^2$ ,  $J_z^0 = J_z'$ . Подставляя эти соотношения в уравнения (9) и полагая координаты центра масс тела равными  $r_x^c = r_x$ ,  $r_y^c = r_y$ ,  $r_z^c = r_z$ , получаем компактную форму уравнений для центробежных моментов инерции.

$$\begin{aligned}J_{xy} &= -Cr_x r_y, \\ J_{yz} &= -Cr_y r_z, \\ J_{zx} &= -Cr_z r_x,\end{aligned}\quad (10)$$

где коэффициент  $C$  определяется с помощью формулы (6).

Теперь найдем производные центробежных моментов. Для этого продифференцируем уравнения (10).

$$\begin{aligned}\frac{dJ_{xy}}{dt} &= -C \left( \frac{dr_x}{dt} r_y + \frac{dr_y}{dt} r_x \right), \\ \frac{dJ_{yz}}{dt} &= -C \left( \frac{dr_y}{dt} r_z + \frac{dr_z}{dt} r_y \right), \\ \frac{dJ_{zx}}{dt} &= -C \left( \frac{dr_z}{dt} r_x + \frac{dr_x}{dt} r_z \right).\end{aligned}$$

Подставим выражения для производных из уравнений (1) в последние уравнения. В результате получим

$$\begin{aligned}\frac{dJ_{xy}}{dt} &= -C (V_x r_y + V_y r_x), \\ \frac{dJ_{yz}}{dt} &= -C (V_y r_z + V_z r_y), \\ \frac{dJ_{zx}}{dt} &= -C (V_z r_x + V_x r_z).\end{aligned}\quad (11)$$

Вернемся к векторному уравнению (4). Запишем его подробно

$$\begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{d\omega_x}{dt} \\ \frac{d\omega_y}{dt} \\ \frac{d\omega_z}{dt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{dJ_x}{dt} & -\frac{dJ_{xy}}{dt} & -\frac{dJ_{xz}}{dt} \\ -\frac{dJ_{yx}}{dt} & \frac{dJ_y}{dt} & -\frac{dJ_{yz}}{dt} \\ -\frac{dJ_{zx}}{dt} & -\frac{dJ_{zy}}{dt} & \frac{dJ_z}{dt} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_x^u \\ M_y^u \\ M_z^u \end{pmatrix}$$

Или в координатной форме

$$\begin{aligned}M_x^u &= J_x \dot{\omega}_x - J_{xy} \dot{\omega}_y - J_{xz} \dot{\omega}_z + \dot{J}_x \omega_x - \dot{J}_{xy} \omega_y - \dot{J}_{xz} \omega_z, \\ M_y^u &= -J_{yx} \dot{\omega}_x + J_y \dot{\omega}_y - J_{yz} \dot{\omega}_z - \dot{J}_{yx} \omega_x + \dot{J}_y \omega_y - \dot{J}_{yz} \omega_z, \\ M_z^u &= -J_{zx} \dot{\omega}_x - J_{zy} \dot{\omega}_y + J_z \dot{\omega}_z - \dot{J}_{zx} \omega_x - \dot{J}_{zy} \omega_y + \dot{J}_z \omega_z.\end{aligned}\quad (12)$$

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ ЭЛЕКТРОАНАЛОГИЙ

Чтобы построить математическую модель гироскопа с применением метода электроаналогий, необходимо составить уравнения кинестатики для главных векторов и для главных моментов активных сил, реакций связей и сил инерции, действующих на гироскоп. Все моменты должны быть вычислены относительно полюса, совмещенного с центром масс гироскопа. Тогда результирующее движение гироскопа, происходящее под действием указанных выше сил и моментов, можно рассматривать как сумму поступательного движения гироскопа с его вращательным движением вокруг центра масс.

Все векторные уравнения будем проектировать на оси подвижной системы координат  $Sx_1y_1z_1$ , начало которой совмещено с центром масс гироскопа, т. е. с точкой  $C$ , а оси параллельны соответствующим осям системы  $Oxyz$  (рис. 3).

Силы реакции  $R_x, R_y, R_z$  в опорной точке  $O$  гироскопа теперь следует рассматривать как внешние силы. Моменты, создаваемые этими силами относительно координатных осей  $x, y$  и  $z$ , зависят от величин проекций  $r_x, r_y$  и  $r_z$  вектора оси  $\mathbf{r}$  гироскопа.

Осевые моменты инерции гироскопа относительно осей подвижной системы координат

$C_{x_1 y_1 z_1}$  будем рассчитывать с помощью формул, которые выводятся аналогично формулам (7).

$$\begin{aligned} J_{1x} &= C_1 r_x^2 + J_x^0, \\ J_{1y} &= C_1 r_y^2 + J_y^0, \\ J_{1z} &= C_1 r_z^2 + J_z^0, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $J_x^0, J_y^0, J_z^0$  – моменты инерции относительно главных центральных осей  $x_0, y_0, z_0$ ;  $\tilde{N}_1$  – постоянный коэффициент.

$$C_1 = \frac{J_z^0 - J_x^0}{r^2}. \quad (14)$$

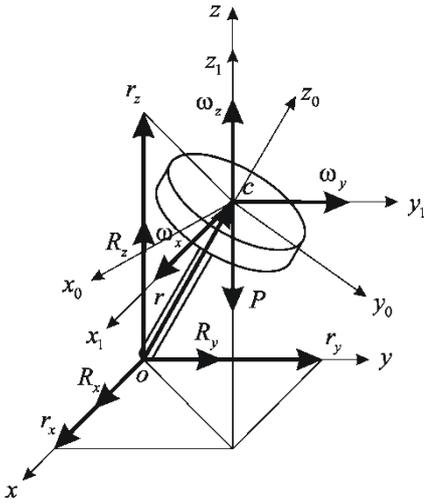


Рис. 3

Уравнения для производных моментов инерции (8), уравнения для центробежных моментов инерции (10) и уравнения для производных центробежных моментов (11) в системе координат  $C_{x_1 y_1 z_1}$ , отличаются лишь постоянной  $C_1$ .

Рассмотрим движение гироскопа в каждой из трех плоскостей, образованных системой координат  $C_{xyz}$ .

### Движение в плоскости $C_{xy}$

Рассмотрим движение, которое совершает гироскоп в плоскости  $C_{xy}$  (рис. 4). В соответствии с данной схемой запишем уравнения равновесия сил и моментов. Уравнения равновесия сил для оси, соединяющей две смежные координатные плоскости, будут одинаковы для этих плоскостей. Чтобы исключить дублирование уравнений, каждое из уравнений сил и моментов отметим соответствующей литерой, номер которой свяжем с индексом координатной оси.

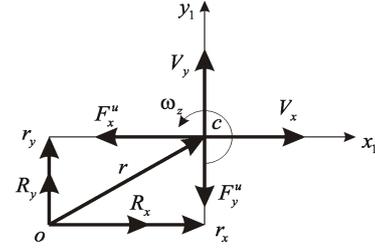


Рис. 4

Пусть оси  $x$  соответствует номер 1 литеры, оси  $y$  – номер 2 литеры, а оси  $z$  – номер 3 литеры. Буквенно-цифровые символы литеров будем записывать с левой стороны уравнений. В результате уравнения сил и моментов для плоскости  $C_{xy}$  примут следующий вид:

- C1)  $R_x - F_x^u = 0,$
- C2)  $R_y - F_y^u = 0,$
- M3)  $-M_z^{Ry} + M_z^{Rx} - M_z^u = 0,$

где  $M_z^{Rx} = R_x r_y,$   $M_z^{Ry} = R_y r_x.$

Далее запишем компонентные уравнения, номера литеров для которых свяжем с индексами осей

- K1)  $F_x^u = m\dot{V}_x,$
- K2)  $F_y^u = m\dot{V}_y.$

В качестве компонентных уравнений для инерционных моментов используем уравнения (12). Перепишем третье из них в сжатом виде. Для данных уравнений связанный с индексом оси номер литеры надо увеличить на 3

$$K6) M_z^u = -J_{1zx} \dot{\omega}_x - J_{1zy} \dot{\omega}_y + J_{1z} \dot{\omega}_z - \dot{J}_{1zx} \omega_x - \dot{J}_{1zy} \omega_y + \dot{J}_{1z} \omega_z.$$

Входящие в уравнение осевой момент инерции  $J_{1z}$  и его производную  $\dot{J}_{1z}$  вычислим с помощью формул (13) и (8). Центробежные моменты инерции  $J_{1zx}, J_{1zy}$  и их производные  $\dot{J}_{1zx}$  и  $\dot{J}_{1zy}$  необходимо вычислить для центра масс гироскопа, т. е. в точке  $c$ , с помощью формул (10) и (11). Принять в формулах (8), (10), (11) коэффициент  $C = C_1$ .

На основании записанных уравнений равновесия и компонентных уравнений строим эквивалентную электрическую схему замещения (рис. 5) [2]. Электрические величины на схеме будем обозначать с помощью соответствующих символов, принятых в механике. Эта схема строится в два этапа. Вначале следует вычертить нижние два контура, в которых напряжения и ЭДС. должны соответствовать уравнениям равновесия сил  $C1$  и  $C2$ . В соответствии со вторым законом Кирхгофа сумма напряжений и

ЭДС. в каждом контуре должна быть равна нулю.

На втором этапе чертим верхний контур, отвечающий уравнению равновесия моментов МЗ. Чтобы выполнить содержащиеся в уравнении МЗ операции умножения, в электрическую схему введены два идеальных трансформатора с коэффициентами трансформации, соответствующими плечам действующих сил.

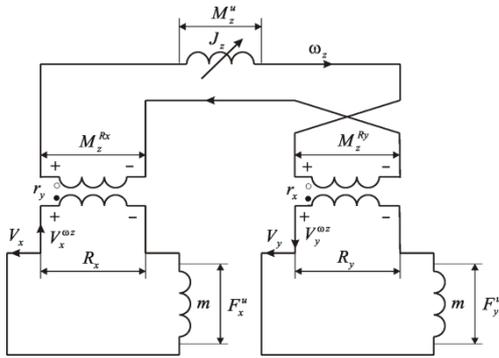


Рис. 5

Запишем уравнения идеальных трансформаторов, входящих в рассматриваемую электрическую схему, причем соотношения токов продифференцируем

- T1.1)  $R_x r_y = M_z^{Rx}$ ,
- T1.2)  $\omega_z r_y = V_x^{\omega_z}$ ,
- T1.3)  $\dot{\omega}_z r_y + \omega_z \dot{r}_y = \dot{\omega}_z r_y + \omega_z \dot{V}_y^{\omega_z} = \dot{V}_x^{\omega_z}$ ,
- T2.1)  $R_y r_x = M_z^{Ry}$ ,
- T2.2)  $\omega_z r_x = V_y^{\omega_z}$ ,
- T2.3)  $\dot{\omega}_z r_x + \omega_z \dot{r}_x = \dot{\omega}_z r_x + \omega_z \dot{V}_x^{\omega_z} = \dot{V}_y^{\omega_z}$ .

**Движение в плоскости Cxz**

Рассмотрим движение, которое совершает гироскоп в плоскости Cxz (рис. 6).

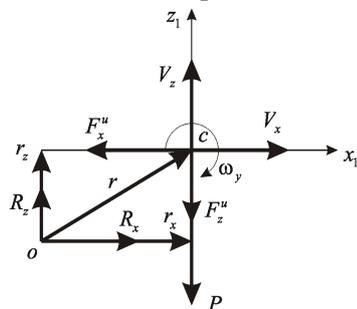


Рис. 6

Используя установленные выше правила для присвоения номеров литерным уравнениям, запишем уравнения равновесия сил и моментов

- C1)  $R_x - F_x^u = 0$ ,
- C3)  $-P + R_z - F_z^u = 0$ ,
- M2)  $-M_y^{Rx} + M_y^{Rz} - M_y^u = 0$ ,

где  $M_y^{Rx} = R_x r_z$ ,  $M_y^{Rz} = R_z r_x$ , в свою очередь,  $r_x, r_z$  – проекции вектора  $\mathbf{r}$  на координатные оси.

Запишем компонентные уравнения.

- K1)  $F_x^u = m \dot{V}_x$ ,
- K3)  $F_z^u = m \dot{V}_z$ ,
- K5)  $M_y^u = -J_{1yx} \dot{\omega}_x + J_{1y} \dot{\omega}_y - J_{1yz} \dot{\omega}_z - \dot{J}_{1yx} \omega_x + \dot{J}_{1y} \omega_y - \dot{J}_{1yz} \omega_z$ .

На основании записанных уравнений равновесия и компонентных уравнений строим эквивалентную электрическую схему замещения (рис. 7).

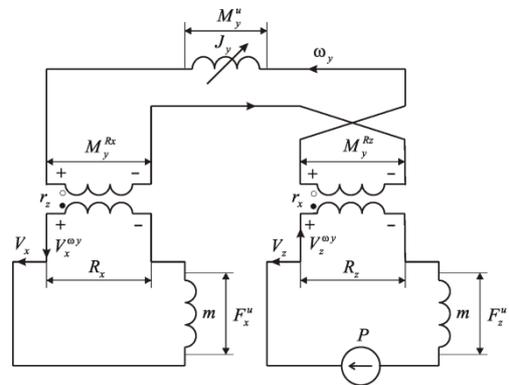


Рис. 7

Уравнения идеальных трансформаторов

- T3.1)  $R_x r_z = M_y^{Rx}$ ,
- T3.2)  $\omega_y r_z = V_x^{\omega_y}$ ,
- T3.3)  $\dot{\omega}_y r_z + \omega_y \dot{r}_z = \dot{\omega}_y r_z + \omega_y \dot{V}_z^{\omega_y} = \dot{V}_x^{\omega_y}$ ,
- T4.1)  $R_z r_x = M_y^{Rz}$ ,
- T4.2)  $\omega_y r_x = V_z^{\omega_y}$ ,
- T4.3)  $\dot{\omega}_y r_x + \omega_y \dot{r}_x = \dot{\omega}_y r_x + \omega_y \dot{V}_x^{\omega_y} = \dot{V}_z^{\omega_y}$ .

**Движение в плоскости Суz**

Рассмотрим движение гироскопа в плоскости Суz (рис. 8).

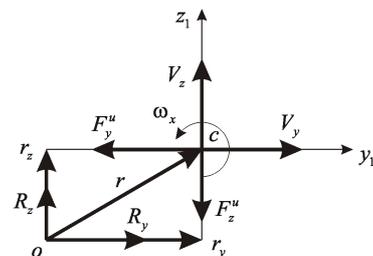


Рис. 8

Запишем уравнения сил и моментов.

$$C2) R_y - F_y^u = 0,$$

$$C3) -P + R_z - F_z^u = 0,$$

$$M1) -M_x^{Rz} + M_x^{Ry} - M_x^u = 0,$$

где  $M_x^{Ry} = R_y r_z$ ,  $M_x^{Rz} = R_z r_y$ , в свою очередь,  $r_y, r_z$  — проекции вектора  $\mathbf{r}$  на координатные оси.

Компонентные уравнения

$$K2) F_y^u = m \dot{V}_y,$$

$$K3) F_z^u = m \dot{V}_z,$$

$$K4) M_x^u = J_{1x} \dot{\omega}_x - J_{1xy} \dot{\omega}_y - J_{1xz} \dot{\omega}_z + J_{1yx} \omega_x - J_{1xy} \omega_y - J_{1xz} \omega_z.$$

На основании записанных уравнений равновесия и компонентных уравнений строим электрическую схему замещения (рис. 9).

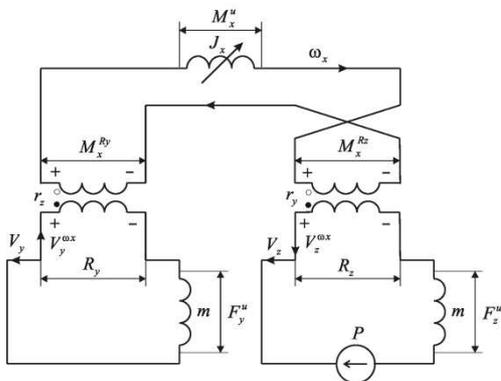


Рис. 9

Уравнения идеальных трансформаторов

$$T5.1) R_y r_z = M_x^{Ry},$$

$$T5.2) \omega_x r_z = V_y^{ox},$$

$$T5.3) \dot{\omega}_x r_z + \omega_x \dot{r}_z = \dot{\omega}_x r_z + \omega_x V_z^u = \dot{V}_y^{ox},$$

$$T6.1) R_z r_y = M_x^{Rz},$$

$$T6.2) \omega_x r_y = V_z^{ox},$$

$$T6.3) \dot{\omega}_x r_y + \omega_x \dot{r}_y = \dot{\omega}_x r_y + \omega_x V_y^u = \dot{V}_z^{ox}.$$

**Общая электрическая схема замещения**

Объединяя полученные выше схемы замещения, построим общую электрическую схему замещения гироскопа (рис. 10).

Данная электрическая схема замещения, полученная на основе метода электроаналогий, не является в полном смысле электрической, поскольку размерности электрических величин заменены в ней соответствующими размерностями механических величин. В действительности такая электрическая схема представляет собой образ механического устройства, представленного в виде электрической схемы. С помощью известных теорем подобия [4], можно определить коэффициенты подобия электрической схемы и перейти от механических величин к электрическим величинам, т. е. тем самым привести эквивалентную электрическую схему замещения к натуральному виду.

Рассмотренный переход от эквивалентных электрических схем замещения к натуральным электрическим схемам имеет лишь теоретический интерес.

При построении математических моделей такой переход не требуется, поскольку из тео-

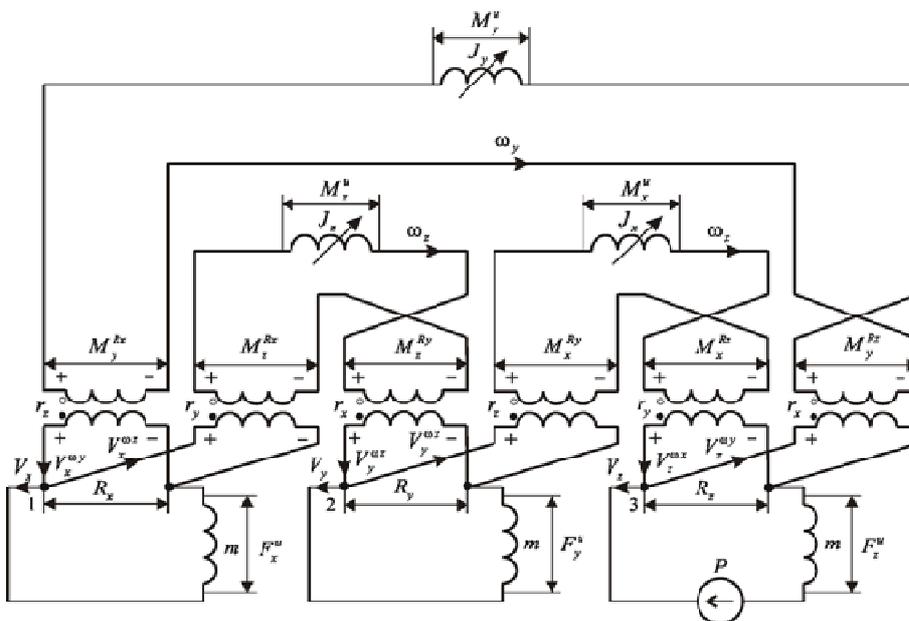


Рис. 10. Общая электрическая схема замещения гироскопа

рии размерностей физических величин известно, что основные единицы измерений выбираются произвольно, и они не зависят от остальных единиц. Следовательно, к описанию процессов в эквивалентных электрических схемах замещения применимы как законы электротехники, так и законы механики. Таким образом, метод электроаналогий позволяет строить математические модели механических устройств путем совмещения законов механики с законами электротехники.

Схема замещения (рис.10) содержит узлы 1, 2 и 3. Запишем для этих узлов уравнения по первому закону Кирхгофа и продифференцируем эти уравнения.

$$\begin{aligned}
 \text{Кр1.1)} \quad & -V_x - V_x^{\omega z} + V_x^{\omega y} = 0, \\
 \text{Кр1.2)} \quad & -\dot{V}_x - \dot{V}_x^{\omega z} + \dot{V}_x^{\omega y} = 0, \\
 \text{Кр2.1)} \quad & -V_y - V_y^{\omega x} + V_y^{\omega z} = 0, \\
 \text{Кр2.2)} \quad & -\dot{V}_y - \dot{V}_y^{\omega x} + \dot{V}_y^{\omega z} = 0, \\
 \text{Кр3.1)} \quad & -V_z - V_z^{\omega y} + V_z^{\omega x} = 0, \\
 \text{Кр3.2)} \quad & -\dot{V}_z - \dot{V}_z^{\omega y} + \dot{V}_z^{\omega x} = 0.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Законы Кирхгофа позволяют составить полную систему линейных уравнений, из которой могут быть найдены все неизвестные переменные на входах интегрирующих звеньев, входящих в математическую модель. В данной системе используются девять интегрирующих звеньев, т. е. это система 9-го порядка. Запишем дифференциальные уравнения указанных интегрирующих звеньев.

$$\begin{aligned}
 \text{D1)} \quad & p\omega_x = \dot{\omega}_x, & \text{D6)} \quad & pr_z = V_z, \\
 \text{D2)} \quad & p\omega_y = \dot{\omega}_y, & \text{D7)} \quad & pV_x = \dot{V}_x, \\
 \text{D3)} \quad & p\omega_z = \dot{\omega}_z, & \text{D8)} \quad & pV_y = \dot{V}_y, \\
 \text{D4)} \quad & pr_x = V_x, & \text{D9)} \quad & pV_z = \dot{V}_z. \\
 \text{D5)} \quad & pr_y = V_y,
 \end{aligned} \tag{16}$$

Далее в соответствии с процедурой метода электроаналогий построим сеть связей (рис. 11) [2]. Каждая стрелка в сети связей отмечена литерой соответствующего уравнения, с помощью которого будет определяться переменная, на которую указывает стрелка. Сеть связей используется как основа для построения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которая имеет следующий вид:

$$M \cdot U = B,$$

где  $U$  – вектор неизвестных переменных,  $B$  – вектор свободных членов,  $M$  – матрица коэффициентов системы.

Решение СЛАУ определяет правые части системы дифференциальных уравнений (16).

Сеть связей представляет собой прототип структурной схемы динамической системы. За-

менив в сети связей ветви на передаточные функции элементарных звеньев, получим классическую структурную схему, которая является подробной имитационной моделью динамической системы. Такую модель можно исследовать методами теории управления, применять для моделирования известные математические системы, выполнять эквивалентные преобразования, исследовать амплитудно-фазовые частотные характеристики динамической системы и др.

Анализируя сеть связей, выделим из нее СЛАУ. Для упрощения записей введем обозначения переменных:

$$\begin{aligned}
 J_{1x} &= C_1 r_x^2 + J_x^0, & J_{1xy} &= -C_1 r_x r_y, \\
 J_{1y} &= C_1 r_y^2 + J_x^0, & J_{1yz} &= -C_1 r_y r_z, \\
 J_{1z} &= C_1 r_z^2 + J_x^0, & J_{1zx} &= -C_1 r_z r_x, \\
 dJ_{1x} &= 2C_1 r_x V_x, & dJ_{1xy} &= -C_1 (V_x r_y + V_y r_x), \\
 dJ_{1y} &= 2C_1 r_y V_y, & dJ_{1yz} &= -C_1 (V_y r_z + V_z r_y), \\
 dJ_{1z} &= 2C_1 r_z V_z, & dJ_{1zx} &= -C_1 (V_z r_x + V_x r_z).
 \end{aligned}$$

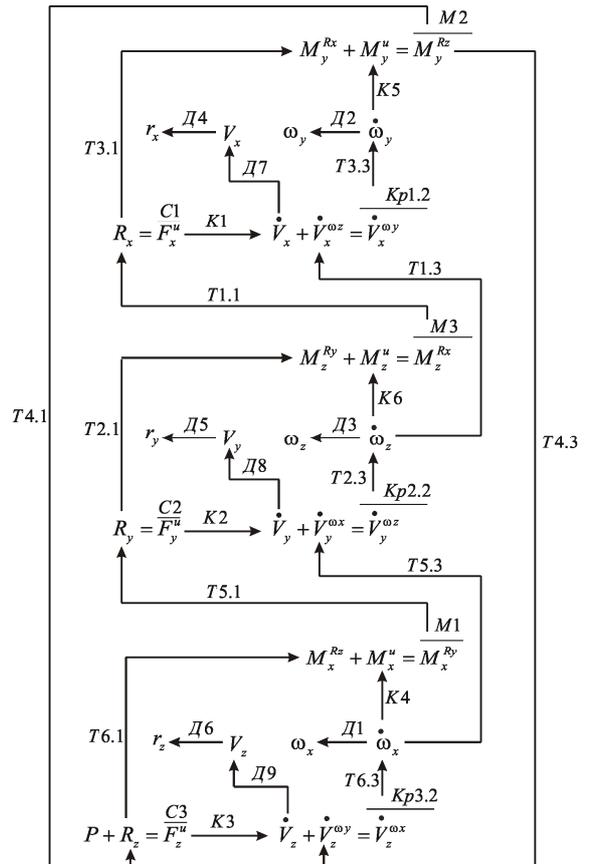


Рис. 11. Сеть связей

Можно сократить число алгебраических уравнений гироскопа путем исключения внутренних переменных. Объединяя уравнения

$Kp1.2, Kp2.2, Kp3.2, M1, M2, M3$  с трансформаторными уравнениями, а уравнения  $C1, C2, C3$  с компонентными уравнениями  $K1, K2, K3$ , придем к системе из 12 линейных уравнений.

Запишем эти уравнения в виде следующего реестра:

$$\begin{aligned}
 U_1 = \dot{V}_x & & -\dot{V}_x - \dot{\omega}_z r_y + \dot{\omega}_y r_z & = \omega_z V_y - \omega_y V_z, \\
 U_2 = \dot{V}_y & & -\dot{V}_y - \dot{\omega}_x r_z + \dot{\omega}_z r_x & = \omega_x V_z - \omega_z V_x, \\
 U_3 = \dot{V}_z & & -\dot{V}_z - \dot{\omega}_y r_x + \dot{\omega}_x r_y & = \omega_y V_x - \omega_x V_y, \\
 U_4 = M_x'' & & -R_x r_y + R_y r_z - M_x'' & = 0, \\
 U_5 = M_y'' & & -R_x r_z + R_z r_x - M_y'' & = 0, \\
 U_6 = M_z'' & & -R_y r_x + R_x r_y - M_z'' & = 0, \\
 U_7 = R_x & & R_x - m\dot{V}_x & = 0, \\
 U_8 = R_y & & R_y - m\dot{V}_y & = 0, \\
 U_9 = R_z & & R_z - m\dot{V}_z & = P_z, \\
 U_{10} = \dot{\omega}_x & & J_{1x} \dot{\omega}_x - J_{1xy} \dot{\omega}_y - J_{1xz} \dot{\omega}_z - M_x'' & = \\
 & & -dJ_{1x} \omega_x + dJ_{1xy} \omega_y + dJ_{1xz} \omega_z, \\
 U_{11} = \dot{\omega}_y & & -J_{1xy} \dot{\omega}_x + J_{1y} \dot{\omega}_y - J_{1yz} \dot{\omega}_z - M_y'' & = \\
 & & dJ_{1xy} \omega_x - dJ_{1y} \omega_y + dJ_{1yz} \omega_z, \\
 U_{12} = \dot{\omega}_z & & -J_{1xz} \dot{\omega}_x - J_{1yz} \dot{\omega}_y + J_{1z} \dot{\omega}_z - M_z'' & = \\
 & & -dJ_{1xz} \omega_x + dJ_{1yz} \omega_y - dJ_{1z} \omega_z.
 \end{aligned}$$

Соответственно вектор свободных членов принимает вид:

$$\begin{aligned}
 B_1 & = \omega_z V_y - \omega_y V_z, \\
 B_2 & = \omega_x V_z - \omega_z V_x, \\
 B_3 & = \omega_y V_x - \omega_x V_y, \\
 B_9 & = P_z, \\
 B_{10} & = -dJ_{1x} \omega_x + dJ_{1xy} \omega_y + dJ_{1xz} \omega_z, \\
 B_{11} & = dJ_{1xy} \omega_x - dJ_{1y} \omega_y + dJ_{1yz} \omega_z, \\
 B_{12} & = dJ_{1xz} \omega_x + dJ_{1yz} \omega_y - dJ_{1z} \omega_z.
 \end{aligned}$$

С учетом новых обозначений переменных перепишем систему дифференциальных уравнений (16)

$$\begin{aligned}
 p\omega_x & = \dot{\omega}_x & pY_1 & = U_{10}, \\
 p\omega_y & = \dot{\omega}_y & pY_2 & = U_{11}, \\
 p\omega_z & = \dot{\omega}_z & pY_3 & = U_{12}, \\
 pr_x & = V_x & pY_4 & = U_7, \\
 pr_y & = V_y & pY_5 & = U_8, \\
 pr_z & = V_z & pY_6 & = U_9, \\
 pV_x & = \dot{V}_x & pY_7 & = U_1, \\
 pV_y & = \dot{V}_y & pY_8 & = U_2, \\
 pV_z & = \dot{V}_z & pY_9 & = U_3.
 \end{aligned}$$

## РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

В целом мы получили совместную систему, которая включает в себя 12 линейных уравнений и 9 дифференциальных уравнений.

Численное решение системы ДУ на каждом шаге интегрирования включает несколько стадий, каждая из которых предусматривает вычисление правых частей системы ДУ при различных значениях аргумента. Значения сигналов на входе каждого интегратора математической модели определяются с помощью СЛАУ, которая решается на каждом шаге интегрирования ДУ столько раз, сколько стадий содержит алгоритм численного решения системы ДУ.

Например, если использовать для решения системы ДУ численный метод Рунге–Кутты 4-го порядка, то на каждом шаге интегрирования надо четыре раза решать систему линейных алгебраических уравнений.

Чтобы повысить производительность вычислений, можно путем исключения внутренних переменных уменьшить количество уравнений в системе. Однако информативность имитационной модели в этом случае снизится, поскольку будет потеряна доступ к исключенным внутренним переменным.

Траектории движения гироскопа, рассчитанные с помощью метода электроаналогий, получены при следующих значениях параметров:

$$m = 1.0, R = 0.1, r = 0.2, H = 0.05, \omega = 500,$$

$$J_x^0 = m \left( \frac{1}{12} H^2 + \frac{1}{4} R^2 \right), J_y^0 = J_x^0, J_z^0 = \frac{1}{2} m R^2, \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

На рис. 12 представлены графики движений гироскопа. На этом рисунке показано:  $a, б, в$  – изменения проекций оси гироскопа,  $г, д, е$  – изменения реакций связи в точке  $\tilde{N}$ . Время интегрирования дифференциальных уравнений выбрано равным одному периоду прецессии.

Из теории гироскопов известно, что этот период определяется по формуле [1, 3]

$$t_k = \frac{2\pi J_z^0}{P \cdot r}.$$

Графики движения подтверждают, что период прецессии испытываемого гироскопа соответствует данной формуле.

Кроме основного движения прецессии в гироскопе происходят высокочастотные нутационные колебания.

Поскольку математическая модель гироскопа представлена в виде сети связей, она легко преобразуется в структурную схему, состоящую из передаточных функций, не обязательно линейных. Благодаря этому для исследования ди-

намических свойств системы можно применить универсальные методы теории автоматического управления.

На основе данной модели можно построить модели других, более сложных гироскопов. Они накладываются на все основные движения гироскопа. На графиках линейных скоростей  $V_x$  и  $V_y$

(рис. 13, *a, б*) видны огибающие скоростей, на которые наложены высокочастотные нутационные колебания. В увеличенном масштабе эти графики показаны на рис. 13, *в, г*. Нутационные колебания влияют также на величины проекций оси гироскопа (рис. 13, *д, е*).

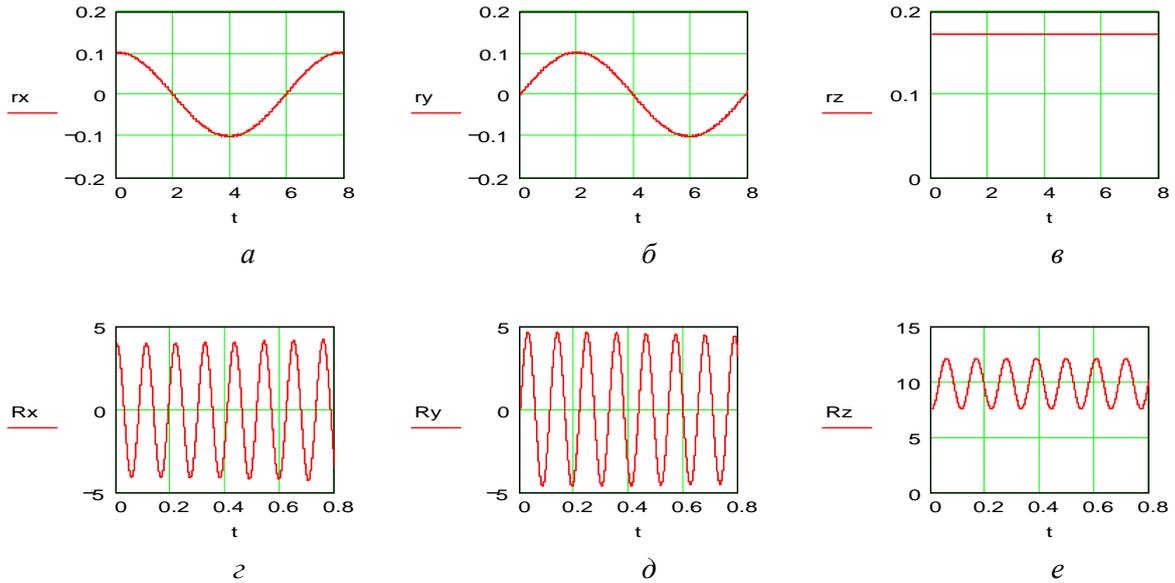


Рис. 12. Результаты испытаний модели гироскопа

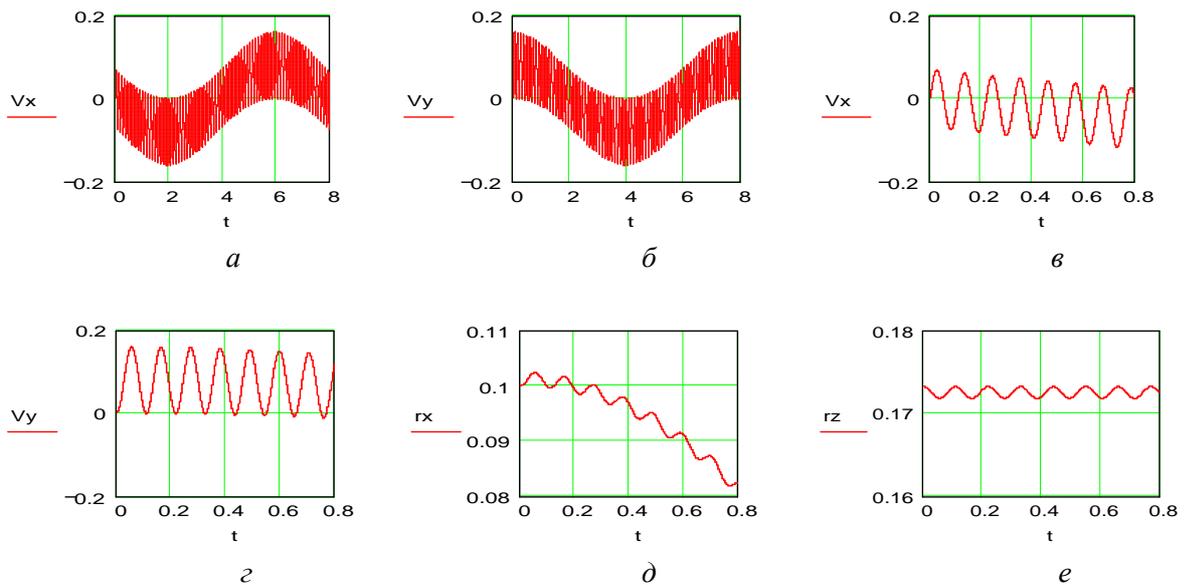


Рис. 13. Нутационные колебания гироскопа

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренная математическая модель относится к классу имитационных моделей. С ее помощью можно изучить, как влияют на работу гироскопа силы вязкого и сухого трения, внешние воздействия в виде толчков и вибраций, размеры ротора, значения его массы и скорости, нелинейные характеристики элементов и др.

В данной модели гироскопа определены реакции связи  $R_x, R_y, R_z$ . Это важное преимущество. Оно позволяет строить точные динамические модели гироскопов с учетом их взаимодействия с внешней средой. Появляется возможность смоделировать собственную скорость прецессии гироскопа, зависящую от действующих на него возмущающих моментов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пельпор Д. С. Гироскопические системы. Теория гироскопов и гироскопических стабилизаторов: учеб. для вузов. 2-е изд. М.: Высш. шк., 1986. 423 с.
2. Чикуров Н. Г. Синтез математических моделей технических систем методом электроаналогий // Вестник УГАТУ. 2009. Т. 12, № 2 (31). С. 156–165.
3. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики: в 2 т. СПб.: Лань, 2007. 736 с.
4. Введение в математическое моделирование: учеб. пособие / Под ред. П. В. Трусова. М.: Логос, 2004. 440 с

## ОБ АВТОРЕ

**Чикуров Николай Георгиевич**, доц., каф. автоматизации технол. процессов. Дипл. инж. по станкостроен. и технол. машиностроен. (УАИ, 1965). Канд. техн. наук по электрооборуд. металлореж. станков (МОССТАНКИН, 1971). Иссл. в обл. комп. систем ЧПУ класса ICNC.

## METADATA

**Title:** Modelling of movements of a gyroscope by a method of electro-mechanical analogies.

**Authors:** N. G. Chikurov

**Affiliation:** Ufa State Aviation Technical University (UGATU), Russia.

**Email:** tchikurov@yandex.ru.

**Language:** Russian.

**Source:** Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 17, no. 2 (55), pp. 53-63, 2013. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

**Abstract:** On an example of a gyroscope with three degrees of freedom the technique of mathematical modeling of mechanical systems is shown by a method of electro-mechanical analogies. The dynamic model of a gyroscope in the form of the differential algebraic equations is constructed.

**Key words:** Mathematical modeling of systems; a method of electromechanical analogies; a gyroscope.

## References (English Transliteration):

1. D. S. Pelpor, *Gyroscopic Systems. The Theory of Gyroscopes and Gyroscopic Stabilizers*, (in Russian). Moscow, Vysshaya shkola, 1986.
2. N. G. Tchikurov, "Mathematical simulation of technical systems by a method of electroanalogies," (in Russian), *Vestnik UGATU*, vol. 12, no. 2 (31), pp. 156-165, 2009.
3. N. V. Butenin, Y. L. Lunz, D. R. Merkin, *Course of Theoretical Mechanics*, (in Russian). St.-Petersburg: Lan', 2007.
4. *Introduction in Mathematical Modelling*, (in Russian), P. V. Trusov Ed. Moscow: Logos, 2004.

## About author:

Chikurov, Nikolai Georgievich, Technological Processes Automation Dept., Cand. (PhD) Tech. Sci. Researches in the field of control systems on the basis of computers.