

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

О. В. Старожилова

olgst@mail.ru

ФГБОУ ВПО «Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики» (ПГУТИ)

Поступила в редакцию 14.06.2013

Аннотация. Статья посвящена численному моделированию тонкостенных элементов конструкций в виде пластин и оболочек, исследованию и построению нелинейных математических моделей напряженно-деформированного состояния. Модели учитывают сжимаемость материала, реальный вид диаграммы и позволяют исследовать деформирование гибких неоднородных оболочек переменной жесткости при поперечном, продольном и комбинированном нагружении.

Ключевые слова: пластины; оболочки; нелинейное деформирование; переменная жесткость.

В современной авиационной технике широко используются тонкостенные элементы конструкций в виде пластин и оболочек, обеспечивающие высокие прочностные показатели при достаточной технологичности.

Тонкостенные конструкции оболочечного типа весьма чувствительны к локальным нагрузкам. Исследования несущей способности таких конструкций при локальных силовых воздействиях имеют большое практическое значение. Условия эксплуатации при этом характеризуются внешними воздействиями, которые часто приводят к тому, что материал начинает работать за пределами упругости. Учет нелинейных факторов позволяет более адекватно смоделировать процессы деформирования конструкций. Реальные условия эксплуатации требуют решения задач в упругопластической постановке, позволяющей определить истинный запас прочности и использовать этот резерв для решения проблемы снижения материалоемкости конструкций. В ряде случаев в сложных условиях эксплуатации конструкций возникает необходимость оценки напряженно-деформированного состояния (НДС), прочности и жесткости конструкции работающих за пределом упругости при значительных перемещениях.

Нелинейные задачи деформирования тонких оболочек принадлежат к числу наиболее сложных из-за геометрически и физически нелиней-

ности задач. Результаты получены для класса задач, ограниченного по характеру распределения нагрузки, граничным условиям, свойствам материала.

Исследован большой класс симметричных задач упругопластического изгиба пластин и оболочек [1], а также апробирован численный алгоритм для класса несимметричных задач упругопластического деформирования, сочетающих простоту реализации с достаточно быстрой сходимостью, позволяющей использовать их в инженерной практике.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются прямоугольные в плане размера $2a$ и $2b$ неоднородные однослойные и многослойные пластины и оболочки переменной толщины и кривизны: толщина $h(x,y)$, кривизны k_1, k_2 , модуль упругости E , коэффициент Пуассона μ , предел текучести σ_T являются некоторыми функциями координат (рис. 1).

Математическая модель решения дважды нелинейных задач деформирования гибких неоднородных оболочек использует пятимерное девиаторное пространство с последующим итерационным процессом.

Рассматриваются неоднородные многослойные оболочки переменной толщины и кривиз-

ны, удовлетворяющие условиям текучести Мизеса в каждом из слоев модели.

Процесс нагружения реализован компонентами в девiatorных пространствах А. А. Ильюшина: пространства напряжений $\bar{\sigma}$, деформаций \bar{E}' , деформаций срединной поверхности \bar{E}^c , изменений кривизны срединной поверхности $\bar{\chi}$.

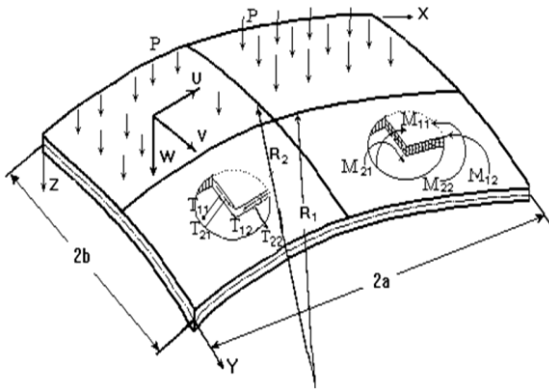


Рис. 1. Пологая оболочка на прямоугольном плане

Исходные уравнения для тонкостенных конструкций оболочечного типа с учетом физической и геометрической нелинейности записываются на основе деформационной теории пластичности и теории гибких пластин и оболочек в предположении малости сдвигов в нормальных сечениях. Применяется гипотеза прямых нормалей Кирхгофа–Лява с учетом деформаций по толщине.

Компоненты деформаций срединной поверхности панелей и кривизны выражаются нелинейно через перемещения соответственно вдоль координатных осей соотношениями по теории Т. Кармана [3].

2. ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Выбираем в качестве основной неизвестной функции прогиб оболочки $w = w(x, y)$. В ортонормированном базисе $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ напряжения представляются в виде:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \sigma_1 \bar{e}_1 + \sigma_2 \bar{e}_2 + \sigma_3 \bar{e}_3, \\ \sigma_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}} s_{11}, \quad \sigma_2 = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} s_{11} + s_{22} \right), \\ \sigma_3 &= \sqrt{2} s_{12}, \\ s_{ij} &= \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}, \\ \sigma' &= (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2, \\ \sigma'' &= (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + 6 \cdot (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2), \\ \sigma_u &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\sigma' + \sigma''}, \end{aligned}$$

где s_{ij} – компоненты девiatorа напряжений, σ_{ij}, σ_0 – компоненты тензора напряжений и среднее напряжение, δ_{ij} – символ Кронекера, σ_u – интенсивность напряжений.

Процесс нагружения в пространстве напряжений однозначно определяется компонентами девiatorа напряжений s_{ij} , средним напряжением σ_0 .

Аналогичные соотношения можно выписать для вектора деформаций.

$$\begin{aligned} \bar{E}' &= E_1 \bar{e}_1 + E_2 \bar{e}_2 + E_3 \bar{e}_3, \\ E_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}} e_{11}, \quad E_2 = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} e_{11} + e_{22} \right), \quad E_3 = \sqrt{2} e_{12}. \end{aligned}$$

Связь между векторами напряжений и деформаций имеет вид:

$$\bar{\sigma} = N \cdot \bar{E}' + \bar{q}.$$

Соотношения теории упругости получаются при $N = 2G, \bar{q} = 0$, соотношения теории малых упругопластических деформаций $N = 2G_s, \bar{q} = 0$; $G = E/(2(1 + \mu))$ – модуль сдвига, E – модуль упругости, $G_s = \sigma_u/(3\varepsilon_u)$ – секущий модуль к диаграмме деформирования.

Деформации в эквидистантных слоях в произвольной точке оболочки записываются в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \varepsilon_{11}^c + z \cdot \chi_{11}, \\ \varepsilon_{22} &= \varepsilon_{22}^c + z \cdot \chi_{22}, \\ \varepsilon_{12} &= \varepsilon_{12}^c + z \cdot \chi_{12}. \end{aligned}$$

Таким образом, деформация оболочки полностью определяется совокупностью шести функций $\varepsilon_{11}^c, \varepsilon_{22}^c, \varepsilon_{12}^c, \chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12}$. Напряжения, действующие в нормальном сечении, заменяются статически эквивалентной системой усилий и моментов, приложенных к срединной поверхности.

Расчет упругопластических деформаций в оболочках и пластинах выполняется с использованием последовательных приближений. Усилия и моменты определяются интегрированием

напряжений σ_{ij} по толщине. Поскольку интегрирование с переменными параметрами упругости затруднительно, то применяется итерационный путь.

3. МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Решение дважды нелинейной краевой задачи проводится на основе сочетания метода переменных параметров упругости и двухступенчатого метода, разработанного автором. Двухступенчатый итерационный метод содержит в основе замену исходного оператора сложной структуры более простым с последующим итерационным процессом.

Дискретизация нелинейных операторов осуществлена методом конечных разностей. Схема вычислений построена таким образом, чтобы максимально использовать экстраполяцию решения для получения нулевого приближения не только по параметру нагрузки, но и по другим параметрам задачи (прогиб и др.). Для получения разрешающей системы уравнений равновесия гибких оболочек в перемещениях и граничных условий используется вариационный принцип Лагранжа для квазистатического процесса деформирования.

Оболочка находится под действием нормальной распределенной по поверхности нагрузки $p = p(x, y)$, по кромкам оболочки реализуются граничные условия жесткого защемления и шарнирного закрепления в любом сочетании.

Разработанный алгоритм позволяет решать несимметричные задачи упругопластического деформирования оболочек при любых сочетаниях граничных условий. Ограничением является лишь то, что вдоль каждой кромки может быть реализовано только одно из них. Физическая нелинейность учитывается по методу переменных параметров упругости, а геометрически нелинейные задачи решаются методом прямого поиска.

Исследуется напряженно-деформированное состояние гибких пластин и оболочек из неоднородного материала. В качестве параметра прослеживания равновесных состояний выбирается параметр нагрузки. Расчет гибких упругопластических слоистых оболочек и пластин основан на гипотезе недеформируемой нормали для всего пакета в целом [1].

Слои обладают соизмеримой жесткостью на сдвиг и деформируются совместно, без проскальзывания (рис. 2).

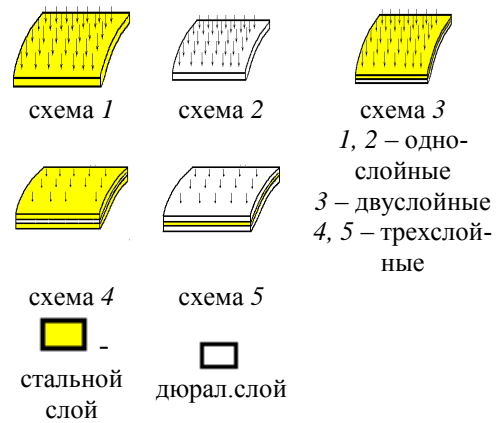


Рис. 2. Взаимное расположение слоев в многослойных оболочках

Численные результаты представлены для однослойных, двухслойных и трехслойных пластин и оболочек, состоящих из стальных и дюралюминиевых слоев. В качестве материала слоев принималась сталь 30ХГСА с характеристиками:

$$E = 194,2 \text{ гН/м}^2, G = 74,5 \text{ гН/м}^2, \mu = 0,3$$

$$G_k = 14,5 \text{ гН/м}^2, \sigma_{mo} = 0,95 \text{ гН/м}^2,$$

$$e_{mo} = 4,28 \cdot 10^{-3} \text{ гН/м}^2$$

и сплав Д16 с характеристиками:

$$E = 74,5 \text{ гН/м}^2, G = 28,6 \text{ гН/м}^2,$$

$$\mu = 0,3, G_k = 1,55 \text{ гН/м}^2,$$

$$\sigma_m = 0,314 \text{ гН/м}^2, e_m = 3,65 \cdot 10^{-3} \text{ гН/м}^2.$$

Разработанный пакет программ позволяет единообразно проводить расчет гибких однослойных и слоистых пластин и оболочек с учетом упругопластических деформаций, проследить развитие зон пластичности, разгрузки, вторичных пластических деформаций. Многослойные оболочки могут иметь симметричную и несимметричную структуру относительно срединной поверхности. В геометрически нелинейной и линейной постановках проведен сравнительный анализ упругопластического поведения однослойных и слоистых пластин и оболочек в зависимости от граничных условий, характера нагружения.

Эпюры для разных типов пластин отличаются количественно и качественно.

Так, наибольший прогиб возникает в пластине с утонченной средней частью. Однако большая интенсивность напряжений возникает в месте изменения толщин в пластине с утолщенной средней частью. Отметим резкое изменение интенсивности напряжений в местах из-

менения толщин. При этом независимо от изменения толщины, напряжения уменьшаются в месте изменения толщин к центру, видно влияние геометрической нелинейности. Большие величины интенсивности напряжений возникают в верхних слоях из-за разномодульности материала, так как модуль упругости на сжатие выше модуля упругости на растяжение.

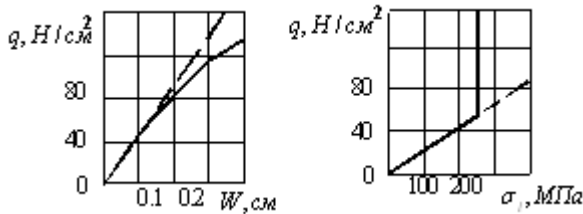


Рис. 3. Пластина под действием локальной нагрузки: график нагрузка-прогиб и нагрузка-интенсивность напряжений в центре пластины

4. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА

Анализ результатов расчета показывает существенное влияние на НДС многослойных пластин геометрической нелинейности и разномодульности материала. Отметим, что более жесткой и напряженной является пластина с утолщенной средней частью.

Учет пластических деформаций приводит к существенному снижению уровня напряжений σ_y на нижней поверхности. Изменение расположения слоев со схемы 4 на схему 5 приводит к перераспределению напряжений. Так, для оболочек с внешним расположением стальных слоев максимальное значение напряжения σ_y на нижней поверхности превышает максимальное значение напряжения σ_x более чем в 2 раза. Замена внешних слоев на стальные (схема 4) приводит к уменьшению прогиба при нагрузке $p = 100$ на 30 % по сравнению с панелью из алюминиевого сплава. На внешних поверхностях панели $z = \pm 1$ происходит перераспределение напряжений по сравнению с однослойной, и максимальное напряжение в трехслойной панели (схема 4) увеличивается в 1,4 раза.

Отметим ряд особенностей, обнаруженных при сравнении результатов расчетов однослойных и двухслойных цилиндрических оболочек с шарнирно закрепленными и заделанными краями. В отличие от шарнирно закрепленных панелей напряжения в панелях с жестко заделанными краями менее чувствительны к изменению характеристик слоев.

Несмотря на различную комбинацию материалов по слоям оболочки, напряжения σ_x в основном претерпевают изменения лишь в области края, причем для оболочки из сплава Д16 влияние жесткого защемления выражено слабо. В центральной зоне оболочки напряжения σ_y мало зависят от комбинации слоев, а влияние жесткого защемления тем значительнее, чем большую толщину имеет стальной слой.

На рис. 4 показано распределение зон пластичности в сечении $z = -1$ для жестко заделанной по всему контуру цилиндрической панели $k_1 = 0, k_2 = 20$, где k_1, k_2 – кривизны панели при различных вариантах нагружения $p = 50, p = 75, p = 100$.

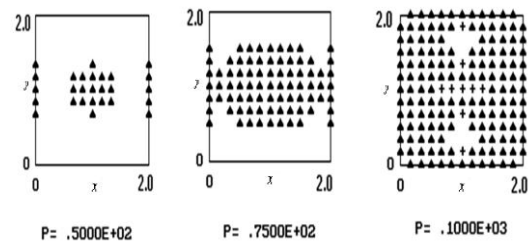


Рис. 4. Распределение зон: зона пластичности \blacktriangle , зона разгрузки $+$

Интенсивность нагрузки выбиралась таким образом, чтобы главный вектор нагрузки был постоянен для всех схем нагружения и соответствовал равномерно распределенному по всей поверхности давлению интенсивности. Зоны пластичности появляются при нагрузке $p = 50$, с увеличением p развиваются более интенсивно, занимают почти всю поверхность и уже при нагрузке $p = 100$ появляются зоны разгрузки. Локальное нагружение приводит к существенному изменению характера деформирования пластин и оболочек.

Зоны пластичности и зоны разгрузки в двухслойных панелях с разными толщинами слоев появляются практически при одних и тех же нагрузках, влияние стального слоя проявляется в том, что зоны разгрузки захватывают большую площадь нижнего слоя. При увеличении нагрузки в центральной части нижней лицевой поверхности однослойной оболочки из дюралевого сплава появляется зона вторичных пластических деформаций, а вблизи краев образуется зона разгрузки. В двухслойных оболочках зона вторичных пластических деформаций захватывает большую часть зоны разгрузки, по-

лученной на предыдущей стадии нагружения, а рядом с ней появляются новые точки разгрузки.

Построенная математическая модель учитывает сжимаемость материала и реальный вид диаграммы деформирования. Вычислительные эксперименты показывают, что предложенный метод и алгоритм позволяют учитывать плавное изменение толщины тонкостенных элементов и могут быть применены при их оптимальном проектировании.

Анализ результатов расчетов показывает, что построенный алгоритм позволяет учитывать дискретное подкрепление ребрами и учитывать поперечную нагрузку в виде полосовой.

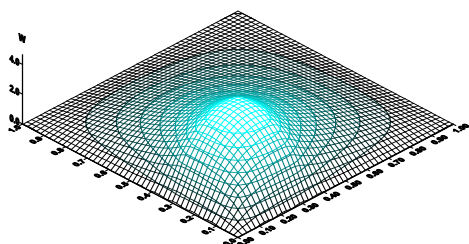


Рис. 5. Моделирование процесса деформирования гибкой оболочки

Установлено, что неоднородность свойств материала по толщине оболочки может приводить к качественному изменению распределения напряжений. Моделирование задач деформирования нелинейных оболочек показали хорошую сходимость двухступенчатого итерационного метода, разработанного автором, при расчете упругопластического деформирования гибких неоднородных оболочек. Пример моделирования жестко заделанной по всему контуру цилиндрической панели, локально нагруженной, представлен на рис. 5.

Схема вычислений построена таким образом, чтобы максимально использовать экстраполяцию решения для получения нулевого приближения не только по параметру нагрузки, но и по другим параметрам задачи (прогиб и др.).

ВЫВОДЫ

Установлено, что неоднородность свойств материала по толщине оболочки может приводить к качественному изменению распределения напряжений. Результаты получены с учетом геометрической и физической нелинейности.

При увеличении нагрузки в центральной части нижней лицевой поверхности однослойной оболочки из дюралевого сплава появляется

зона вторичных пластических деформаций, а вблизи краев образуется зона разгрузки.

В двухслойных оболочках зона вторичных пластических деформаций захватывает большую часть зоны разгрузки, полученной на предыдущей стадии нагружения, а рядом с ней появляются новые точки разгрузки. Выявлены зоны активного нагружения, разгрузки, вторичных пластических деформаций по объему оболочки, проведен анализ влияния характера распределения нагрузки, граничных условий, распределения толщин на упругопластическое деформирование пластин и оболочек. Исследованы траектории напряжений и деформаций в характерных точках пластин и оболочек. Модель учитывает сжимаемость материала, реальный вид диаграммы и позволяет исследовать деформирование гибких неоднородных оболочек переменной жесткости при поперечном, продольном и комбинированном нагружении.

Реализация предложенного метода и алгоритма компьютерного численного анализа напряженно-деформированного состояния конструкции осуществлена в виде пакета прикладных программ. Реализован экспорт из программного комплекса значений перемещений для расчета напряжений и деформаций программой МКЭ ANSYS. Приводится сравнительный анализ результатов, полученных обоими способами.

Программный продукт предназначен для применения в отраслевых САПР и ERP-системах, допускает автономное использование.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Старожилова О. В. Метод моделирования нелинейных задач деформирования тонких оболочек // Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела: 2-я Междунар. конф. (8–11 дек. 2009, Казань): тр. конф. Казань: Казанск. гос. ун-т, 2009. С. 367–369.
2. Старожилова О. В. Двухступенчатый итерационный метод в прикладных задачах упруго-пластичности // Обзорные прикладной и промышленной математики. 2002. Т. 9, № 3. С. 655.
3. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 398 с.

ОБ АВТОРЕ

СТАРОЖИЛОВА Ольга Владимировна, доц. каф. высш. математики, докторант Московск. авиац. ин-та (нац. иссл. ун-та). Дипл. математик-преп. (Самарск. гос. ун-т, 1984). Канд. техн. наук по мех. деформ. тв. тела (СамГТУ, 1997). Иссл. в обл. упр.-пласт. деформ. гибких неоднородных оболочек.

METADATA

Title: Investigation of the stress-strain state of thin-walled structural elements.

Authors: O. V. Starozhilova

Affiliation: Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics (PSUTI), Russia.

Email: olgst@mail.ru.

Language: Russian.

Source: Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 17, no. 4 (57), pp. 38-43, 2013. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

Abstract: The article is devoted to numerical modeling of thin-walled structural elements in the form of plates and shells, research and the building of nonlinear mathematical models of stress-strain state. The model takes into account compressibility of the material, the real appearance of the chart and allow to investigate the deformation of a flexible inhomogeneous shells of variable rigidity with a transverse, longitudinal and combined loading.

Key words: plate; shell; nonlinear deformation; variable rigidity.

References (English Transliteration):

1. O. V. Starozhilova, "Method of modeling of nonlinear deformation of thin shells," (in Russian), *Problems of Nonlinear Mechanics of Deformable Solids: Proc. 2nd Int. Conf. Kazan*, 2009. Kazan State Univ., Russia, 2009. pp. 367-369.
2. O. V. Starozhilova, "Two-step iterative method in applied problems elasto-plasticity," (in Russian), *Obozrenie Prikladnoy I Promyshlennoy Matematiki* (Surveys of Applied and Industrial Mathematics), vol. 9, no. 3, p. 655, 2002.
3. N. Malinin, *Applied Theory of Plasticity and Creep*, (in Russian). Moscow: Mashinostroyenie, 1975.

About author:

STAROZHILOVA, Olga Vladimirovna, associate professor of the Higher Mathematics Dept., doctoral candidate of the Moscow Aviation Institute (National Research University). Dipl. mathematician (Samara State Univ., 1984). Cand. (PhD) Tech. Sci. (SamGTU, 1997).