Уфа : УГАТУ, 2013 Вестник УГАТУ Т. 17, № 5 (58). С. 125–127

УДК 519.216

Экспериментальное нахождение параметров случайного процесса Заико с равномерным законом распределения

А. И. Заико

zaiko@ugatu.ac.ru

ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

Поступила в редакцию 22.12.2012

Аннотация. Описаны методы экспериментального нахождения параметров оригинального случайного процесса с равномерным законом распределения.

Ключевые слова: случайный процесс; параметры; экспериментальное нахождение

Случайный процесс с равномерным законом распределения плотности вероятности [1–4] получил распространение для описания аналого-цифровых преобразований [5, 6], выбора шага равномерной дискретизации [7, 8], статистическим и спектральным измерениям [9, 10]. Поэтому экспериментальное нахождение параметров такого процесса для его корректного описания и применения весьма актуально.

В статье излагаются разработанные для этой цели методы измерений и выдаются рекомендации по их применению.

Случайный процесс с равномерным законом распределения полностью характеризуется всего тремя параметрами: нижней $X_н$ и верхней $X_в$ границами изменения реализации $x(t)$ и нормированной корреляционной функцией $\rho(\tau)$, где $\tau = t_2 - t_1$ – сдвиг между моментами времени t_1 и t_2. Для нахождения оценок $\langle X_н \rangle$ и $\langle X_в \rangle$ границ изменения сигнала можно применить прямой и косвенный методы.

При цифровых измерениях реализация $x(t)$ случайного процесса оцифровывается в дискретные моменты времени t_i, где $i = -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n$ – номер отсчета, а $(2n+1)$ – количество отсчетов, и превращается в дискретные отсчеты x_{il}, где $l = 1, 2, \ldots, L$ – номер кванта, максимальное значение которого L. Погрешности квантования по уровню в моменты времени t_i [9, 10]

$$\delta(t_i, l) = x_{il} - x(t_i),$$

также считаем стационарной, центрированной и распределенной равномерно с дисперсией

$$D_\delta = \frac{\Delta_к^2}{3},$$

где $2\Delta_к$ – ширина кванта.

При измерении границ изменения **прямым методом** из всех результатов измерений выбирают отсчеты x_{il} с минимальным и максимальным значениями и оценки границ существования случайного процесса при $(2n+1) \to \infty$ полагаются равными:

$$\langle X_н \rangle = \min_{n\to\infty} x_{il} - \Delta_к, \qquad -n \le i \le +n;$$
$$\langle X_в \rangle = \max_{n\to\infty} x_{il} + \Delta_к. \qquad -n \le i \le +n.$$

Погрешность прямого измерения границ совпадает с погрешностью отсчетов x_{il} и имеет дисперсию погрешности оценок верхней $\langle X_в \rangle$ и нижней $\langle X_н \rangle$ границ

$$D_{\delta X} = D_\delta. \tag{1}$$

При измерении границ **косвенным методом** находят сначала оценки математического ожидания $\langle m_x \rangle$ и дисперсии $\langle D_x \rangle$ случайного процесса. Так, например, для ступенчатой корреляционной функции $R_x(\tau)$, изображенной на рис. 1, с интервалом корреляции τ_0 нормированная корреляционная функция равна

$$\rho(\tau) = \begin{cases} 1, & 0 \le |\tau| < \tau_0; \\ 0, & |\tau| \ge \tau_0. \end{cases} \qquad (2)$$

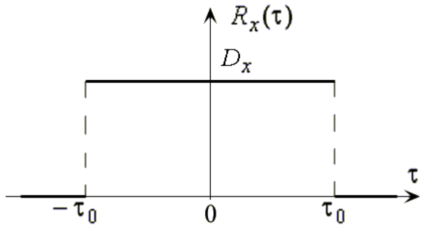

Рис. 1. Ступенчатая корреляционная функция

При экстраполяции процесса между отсчетами в будущее и шаге дискретизации $T_0 = \tau_0$ они равны [9]:

$$\left.\begin{aligned} \langle m_x \rangle &= \frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n} x_{il}; \\ \langle D_x \rangle &= \frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n} \left(x_{il} - m_x\right)^2 + D_\delta. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Дисперсии погрешностей оценок (3) соответственно равны [9]:

$$D_{\delta m} = \frac{D_\delta}{2n+1};$$

$$D_{\delta D} = \frac{D_\delta}{2n+1}\langle D_x \rangle - \frac{16}{5}\frac{D_\delta^2}{2n+1}.$$

С другой стороны, для равномерно распределенного случайного процесса:

$$\langle m_x \rangle = \frac{\langle X_н \rangle + \langle X_в \rangle}{2};$$

$$\langle D_x \rangle = \frac{\left(\langle X_в \rangle - \langle X_н \rangle\right)^2}{12}.$$

Из этих выражений следует, что оценки:

$$\left.\begin{aligned} \langle X_н \rangle &= \langle m_x \rangle - \sqrt{3\langle D_x \rangle}; \\ \langle X_в \rangle &= \langle m_x \rangle + \sqrt{3\langle D_x \rangle}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Дисперсия погрешности оценок (4) равна

$$D_{\delta X} = D_{\delta m} + 3\sqrt{D_{\delta D}} =$$

$$= \frac{D_\delta}{2n+1} + 3\sqrt{\frac{D_\delta}{2n+1}\langle D_x \rangle - \frac{16}{5}\frac{D_\delta^2}{2n+1}}, \qquad (5)$$

где $D_{\delta m}$ и $D_{\delta D}$ – дисперсии погрешностей оценок $\langle m_x \rangle$ и $\langle D_x \rangle$.

Сравнивая между собой дисперсии погрешностей (1) и (5), выбирают прямой или косвенный метод нахождения оценок $\langle X_н \rangle$ и $\langle X_в \rangle$.

Оценка корреляционной функции $\langle R_x(\tau) \rangle$ при введенных выше допущениях [9]

$$\langle R_x(\tau) \rangle =$$

$$= \begin{cases} \left(\langle\langle D_x \rangle + D_\delta\right)\dfrac{T_0 - |\tau|}{T_0} + \\ \qquad + \langle\langle R_x(T_0) \rangle\dfrac{|\tau|}{T_0}, & 0 \le |\tau| \le T_0 < \tau_0; \\ \langle\langle R_x(\mu T_0) \rangle\dfrac{T_0 - |\tau| + \mu T_0}{T_0} + \\ + \langle\langle R_x((\mu+1)T_0) \rangle\dfrac{|\tau| - \mu T_0}{T_0}, & T_0 \le |\tau| \le \mathrm{M} T_0, T_0 < \tau_0, \end{cases} \qquad (6)$$

где T_0 – шаг равномерной дискретизации; μ – целая часть частного $|\tau|/T_0$, максимальное значение которого M; традиционные оценки:

$$\langle\langle D_x \rangle = \frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}(x_{il} - m_x)^2;$$

$$\langle\langle R_x(T_0) \rangle = \frac{1}{2n}\sum_{i=-n}^{n-1}(x_{il} - m_x)(x_{(i+1)r} - m_x);$$

$$\langle\langle R_x(\mu T_0) \rangle = \frac{1}{2n - \mu + 1}\sum_{i=-n}^{n-\mu}(x_{il} - m_x)(x_{(i+\mu)k} - m_x);$$

$$\langle\langle R_x((\mu+1)T_0) \rangle = \frac{1}{2n - \mu}\sum_{i=-n}^{n-\mu-1}(x_{il} - m_x)(x_{(i+\mu+1)g} - m_x).$$

Корреляционная функция погрешности оценки (6) равна [9]

$$R_{\delta x}(\tau_1, \tau_2) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{D_\delta}{(2n+1)}\sum_{i=-n}^{n}\left\{\left[2(x_{il} - m_x)\dfrac{T_0 - |\tau_1|}{T_0} + (x_{(i+1)k} - m_x)\dfrac{|\tau_1|}{T_0}\right]\times\right. \\ \qquad \times\left[2(x_{il} - m_x)\dfrac{T_0 - |\tau_2|}{T_0} + (x_{(i+1)r} - m_x)\dfrac{|\tau_2|}{T_0}\right] + \\ \qquad \left. + \dfrac{4}{5}D_\delta\dfrac{T_0 - |\tau_1|}{T_0}\dfrac{T_0 - |\tau_2|}{T_0}\right\}, \; 0 \le |\tau_1|, |\tau_2| \le T_0; \\ 0, \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

где k, l=1, 2,..., L.

Поделив выражение $\langle R_x(\tau) \rangle$ (6) на $\langle D_x \rangle$ (3), получим оценку нормированной корреляционной функции

$$\langle\rho(\tau)\rangle = \frac{\langle R_x(\tau)\rangle}{\langle D_x\rangle}.$$

Таким образом, все три параметра $X_н$, $X_в$ и $\rho(\tau)$ случайного процесса с равномерным законом распределения можно найти экспериментально, причем оценки $\langle X_н\rangle$ и $\langle X_в\rangle$ измеряются двумя методами. Точность получаемых оценок оценивается по приведенным выше формулам и является предметом оптимизации при планировании измерительного эксперимента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Zaiko A. I.** Random signal with uniform distribution // Measurement Techniques. 1999. Vol. 41. June. P. 1113.
2. **Свид. № 72200700005.** Случайный процесс Заико А. И. с равномерным законом распределения. Математическая модель: описание. Зарег. ФГУП «ВНТИЦ» 28.02.2007. 10 с.
3. **Заико А. И.** Случайный процесс Заико с равномерным законом распределения // Вестник УГАТУ. 2008. № 1 (28). С. 188–193.
4. **Заико А. И.** Многомерные характеристики случайного процесса Заико с равномерным законом распределения // Вестник УГАТУ. 2010. № 1 (36). С. 117–122.
5. **Zaiko A. I.** Dynamic model of bitwise-balancing analog-to-digital converter // Measurement Techniques. 2000. Vol. 42. December. P. 627–631.
6. **Zaiko A. I.** Dynamic model of analog-to-digital tracking converter // Measurement Techniques. 2001. Vol. 43. December. P. 700–704.
7. **Zaiko A. I.** Using an information criterion to choose the time interval for discretization of signals with a uniform distribution lav // Measurement Techniques. 2002. Vol. 44. July. P. 146–150.
8. **Заико А. И.** Информационный критерий равномерной дискретизации случайного процесса Заико // Вестник УГАТУ. 2011. № 5 (45). С. 94–97.
9. **Заико А. И.** Случайные процессы. Модели и измерения: учеб. пособие. М.: Изд-во МАИ, 2006. 207 с.
10. **Заико А. И., Китов А. О.** Измерение характеристик процесса Заико с равномерным законом распределения // Вестник УГАТУ. 2010. № 2 (37). С. 96–103.

ОБ АВТОРЕ

ЗАИКО Александр Иванович, проф. каф. теор. основ электротехники. Дипл. инж. электрон. техники (УАИ, 1970). Д-р техн. наук по инф.-изм. системам (ЛЭТИ, 1990). Засл. изобретатель РБ и РФ. Дейст. член Междунар. инж. акад. Иссл. в обл. метрол. обеспеч., анализа и синтеза инф.-изм. систем и измерения случ. процессов.

METADATA

Title: Experimental estimation of parameters in Zaiko random process with the uniform law of distribution.

Author: A. I. Zaiko

Affiliation: Ufa State Aviation Technical University (USATU), Russia.

Email: zaiko@ugatu.ac.ru.

Language: Russian.

Source: Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 17, No. 5 (58), pp. 125-127, 2013. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

Abstract: Methods of experimental estimation of parametres in the original random process with the uniform law distribution are described.

Key words: Random process; parameters; experimental estimation.

References (English Transliteration):

1. A. I. Zaiko, "Random signal with uniform distribution," *Measurement Techniques*, vol. 41, June, pp. 1113, 1999.
2. Certif. № 72200700005. Zaiko random process with the uniform distribution law. Mathematical model: description, (in Russian), Registr. FSUE «A-RSTIC» 28.02.2007.
3. A. I. Zaiko, "Zaiko random process with the uniform distribution law," (in Russian), *Vestnik UGATU*, vol. 11, no. 1 (28), pp. 188-193, 2008.
4. A. I. Zaiko, "Multiple connected characteristics of the Zaiko random process uniform distribution law," (in Russian), *Vestnik UGATU*, vol. 14, no. 1 (36), pp. 117-122, 2010.
5. A. I. Zaiko, "Dynamic model of bitwise-balancing analog-to-digital converter," *Measurement Techniques*, vol. 42, December, pp. 627–631, 2000.
6. A. I. Zaiko, "Dynamic model of analog-to-digital tracking converter," *Measurement Techniques*, vol. 43, December. pp. 700–704, 2001.
7. A. I. Zaiko, "Using an information criterion to choose the time interval for discretization of signals with a uniform distribution law," *Measurement Techniques*, vol. 44, July. pp. 146–150, 2002.
8. A. I. Zaiko, "Informational criterion of uniform sampling in Zaiko's random process," (in Russian), *Vestnik UGATU*, vol. 15, no. 5 (45), pp. 94-97, 2011.
9. A. I. Zaiko, *Random Process. Models and Measurements*, (in Russian), text-book. Moscow: MAI, 2006.
10. A. I. Zaiko and A. O. Kitov, "Measurement of characteristics of the Zaiko process uniform distribution law", (in Russian), *Vestnik UGATU*, vol. 14, no. 2 (37), pp. 96-103, 2010.

About author:

ZAIKO, Alexander Ivanovich, Prof., Dept. of Teoretical Basics of Electrical Engineering. Dipl. Electronic Engineer (UGATU, 1970). Cand. (PhD) Tech. Sci. (KPtI, 1973), Dr. (Habil.) Tech. Sci. (LETI, 1990). Honoured inventor of RB and RF.