

УДК 621.9.06:531.3

## МАНИПУЛЯТОР НА ОСНОВЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО МЕХАНИЗМА

А. Х. Шамутдинов<sup>1</sup>, П. Д. Балакин<sup>2</sup>, А. Г. Кольцов<sup>3</sup>

<sup>1</sup> 1972id@list.ru, <sup>3</sup> kolzov75@mail.ru

ФГБОУ ВПО «Омский государственный технический университет»

Поступила в редакцию 11.03.2013

**Аннотация.** Рассмотрена разработка математических моделей кинематики и динамической системы манипулятора на основе пространственного механизма. Проведены исследования по разработанным математическим моделям. При разработке математических моделей кинематики и динамики использованы фундаментальные положения механики и теории колебаний. Решены прямая и обратная задачи кинематики для управления данным механизмом, определены коэффициенты жесткости и собственные частоты. Сфера применения манипулятора – приспособление для пространственной ориентации обрабатываемых деталей на станках.

**Ключевые слова:** пространственный механизм; математические модели кинематики и динамики; жесткость; собственные частоты.

### ОПИСАНИЕ МАНИПУЛЯТОРА НА ОСНОВЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО МЕХАНИЗМА

Особенностью современного машиностроения является то, что большая часть продукции выпускается в условиях многономенклатурного производства. Объектом данного вида производства являются детали сложной объемной формы с пространственной ориентацией обрабатываемых поверхностей. Значительная часть времени изготовления изделий в этих видах производства связана с временными затратами на переналадку оборудования, так как существует проблема пространственной ориентации детали или инструмента в процессе обработки.

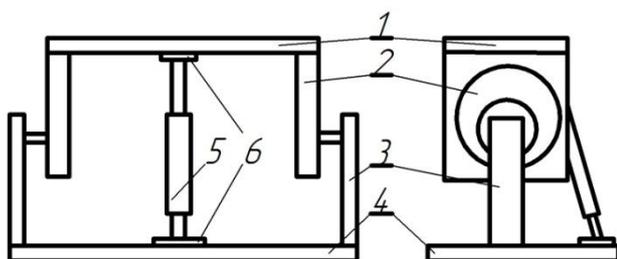


Рис. 1. Схема стола с эксцентриковыми опорами

Конструкция манипулятора на основе пространственного механизма построена на базе

стола с эксцентриковыми опорами [1], представленного на рис. 1. На рис. 1 обозначены: 1 – подвижная платформа; 2 – эксцентриковая опора; 3 – стойка; 4 – неподвижное основание; 5 – дополнительная опора; 6 – сферические шарниры.

Стол с эксцентриковыми опорами может ориентировать инструмент или обрабатываемую заготовку по пяти обобщенным координатам. Но в то же время имеет недостатки, такие как:

- незначительные углы поворотов вокруг соответствующих осей;
- незначительные перемещения по осям;
- для задания линейных и угловых перемещений необходимо задавать сложные законы движения эксцентрикам, расположенным в опорах.

Исходя из вышеизложенного, необходимо разработать и исследовать манипулятор в виде пространственного механизма, в котором отсутствуют вышеперечисленные недостатки.

Одним из решений данной проблемы является манипулятор с пространственной ориентацией детали или инструмента.

Этот манипулятор имеет значительное преимущество по сравнению с традиционными приспособлениями для ориентации обрабатываемых деталей, его конструкция обеспечивает высокую жесткость при малой материалоемкости. Эти преимущества позволяют повысить

эффективность обработки в условиях многономенклатурного производства.

Особенностью данного вида манипуляторов является то, что каждой точке рабочего пространства соответствуют определенные значения жесткости, динамических характеристик и, следовательно, точности. Рабочее пространство такого технологического оборудования, имеет сложную форму, определение которой является необходимой задачей.

Рассмотрим схему манипулятора в виде пространственного механизма, имеющего подвижность равную шести (рис. 2) [2, 3].

Подвижность механизма определим по формуле Сомова–Малышева:

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2n_2 - p_1$$

$$W = 6 \cdot 6 - 5 \cdot 6 = 6 \quad (1)$$

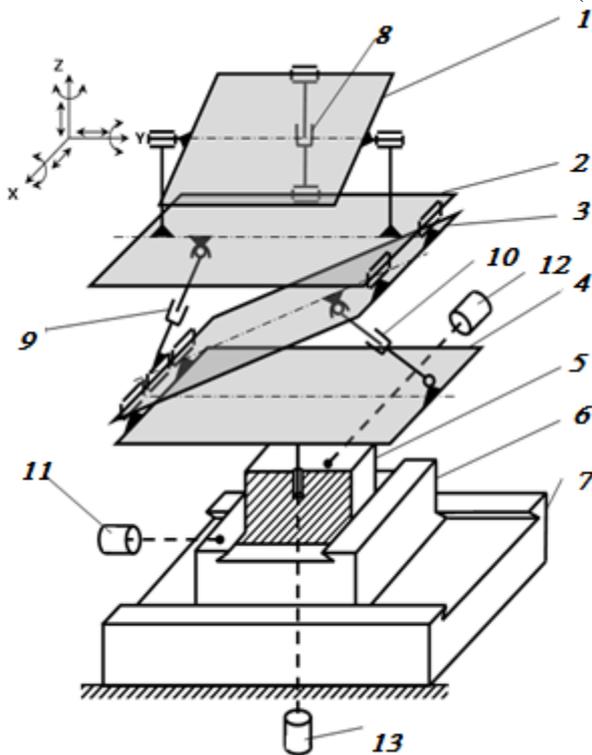


Рис. 2. Пространственный механизм манипулятора

На рис. 2 обозначены: 1 – установочное звено (рабочий стол); 2 – опорно-поворотное устройство; 3 – наклонная платформа; 4 – поворотный стол; 5 – поперечная каретка; 6 – продольная каретка; 7 – станина (основание); 8, 9 и 10 – приводы поступательного перемещения, как правило, гидро- и электромеханические двигатели; 11, 12 и 13 – электромеханические двигатели поступательных движений и поворота стола.

Установочное звено 1 способно иметь шесть независимых движений: три поступательных вдоль осей  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  и три вращения вокруг этих осей.

Особенностью схемного решения является достижение поступательного движения по оси  $Z$  путем сложения двух встречных вращений звеньев 2 и 3 [4], тогда как раздельное угловое движение этих звеньев приводит к вращению исполнительного органа вокруг оси  $X$ .

Реализация других парциальных движений не имеет особенностей (рис. 2). Отметим, что электромеханические приводы 11, 12, 13 могут иметь различное конструктивное исполнение (шарико-винтовые пары или гидроцилиндры) и преобразование движения в них целиком определяется кинематической схемой привода.

### ЭЛЕМЕНТЫ КИНЕМАТИКИ ПРИВодОВ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРЕДЛОЖЕННОГО МЕХАНИЗМА

При унификации всех приводов поступательного перемещения расчетная схема кинематических характеристик преобразования движения сводится к моделированию соотношений в изменяемом «треугольнике», одна сторона которого изменяет свой размер и конструктивно исполнена, например, гидроцилиндром со штоком (рис. 2).

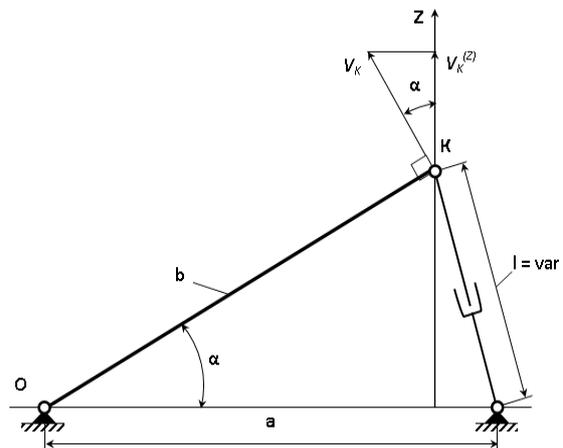


Рис. 3. Расчетная схема изменяемого треугольника механизма при  $l = \text{var}$

Интерес представляют две характеристики движения, а именно:

1) изменение  $\alpha$  и при  $l = \text{var}$ , причем  $\frac{dl}{dt} = \text{const}$ ;

2) изменение  $z$  и  $\alpha$  при сложении двух встречных вращений при  $\frac{dl}{dt} = \text{const}$ , где  $\alpha$  и  $\dot{\alpha}$  – соответственно угол поворота, и скорость изменения этого угла во времени наклонной платформы 3 (или опорно-поворотного устройства 2),  $l$  – длина штока 10,  $z$  и  $\dot{z}$  – соответственно вертикальная координата точки  $K$  платформы 3 (или опорно-поворотного устройства 2) и скорость изменения этой точки.

Из рис. 3 имеем:  $l^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \alpha$ , откуда

$$\alpha = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - l^2}{2ab}\right), \quad (2)$$

при этом  $a = \text{const}$ ,  $b = \text{const}$ .

Полагая, что  $l = V \cdot t$ , т. е. изменение суммарной длины  $l$  штока с гидроцилиндром происходит с постоянной скоростью, т. е.  $V = \text{const}$ , выражение (2) запишется:

$$\begin{aligned} \alpha &= \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - l^2}{2ab}\right) = \\ &= \arccos\left(\frac{a}{2b} + \frac{b}{2a} - \frac{V^2}{2ab} \cdot t^2\right) \end{aligned}$$

или в обобщенной форме

$$\alpha = \arccos(m - n \cdot t^2), \quad (3)$$

где  $m = \left(\frac{a}{2b} + \frac{b}{2a}\right)$  и  $n = \frac{V^2}{2ab}$ .

Выбирая конструктивно параметры так, что  $a = b$ , выражение (3) можно преобразовать:

$$\alpha(n, t) = \arccos(1 - n \cdot t^2). \quad (4)$$

Обозначим  $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$  – угловая скорость дви-

жения наклонной платформы 3 (рис. 2) или  $OK$  (рис. 2). Тогда  $V_K = \omega \cdot OK = \omega \cdot b$  – линейная скорость точки  $K$  платформы 3 и  $V_K^{(Z)} = \omega \cdot b \cdot \cos \alpha$  – вертикальная скорость поступательного движения исполнительного звена 1 при одновременном вращении опорно-поворотного устройства 2 и наклонной платформы 3, имеющих совпадающие линейные размеры и одинаковые режимы работ гидродвигателей 9 и 10.

Дифференцируя выражение (4) по времени  $t$ , найдем угловую скорость:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{d(\arccos(1 - n \cdot t^2))}{dt} = -\frac{-2n \cdot t}{\sqrt{1 - (1 - n \cdot t^2)^2}} = \\ &= \frac{2n \cdot t}{\sqrt{2nt^2 - n^2 \cdot t^4}} = \frac{2n}{\sqrt{2n - n^2 \cdot t^2}} \\ \text{или } \omega(n, t) &= \frac{2n}{\sqrt{2n - n^2 \cdot t^2}}. \quad (5) \end{aligned}$$

Используя пакет программы MathCAD, получаем зависимости выражений (4) и (5), которые представлены на рис. 4–5

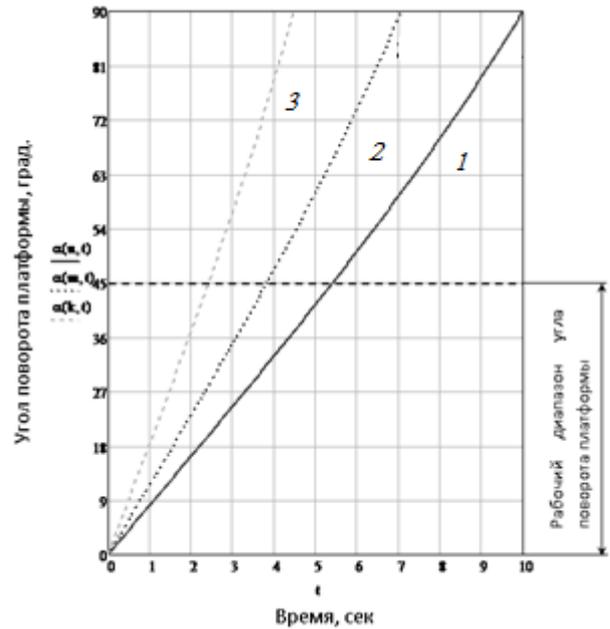


Рис. 4. Зависимость угла поворота платформы от времени

На рис. 4 обозначены: кривая 1 при  $n = 0,01 \text{ сек}^{-2}$ , кривая 2 при  $n = 0,02 \text{ сек}^{-2}$ , кривая 3 при  $n = 0,05 \text{ сек}^{-2}$ .

Анализируя эти графики, в зависимости от параметра  $n$  и времени  $t$  видно, что:

- с увеличением  $n$ , а следовательно, с увеличением скорости  $V$ , поворот платформы осуществляется быстрее;

- зависимость  $\alpha(n, t) = \arccos(1 - n \cdot t^2)$  при  $n = 0,01 - 0,05 \text{ с}^{-2}$  и  $t \leq 5,4 \text{ с}$  практически линейна;

- в рабочем диапазоне изменение угла  $\alpha = 0-45^\circ$  и угловая скорость движения наклонной платформы 3 (или опорно-поворотного устройства) изменяются незначительно.

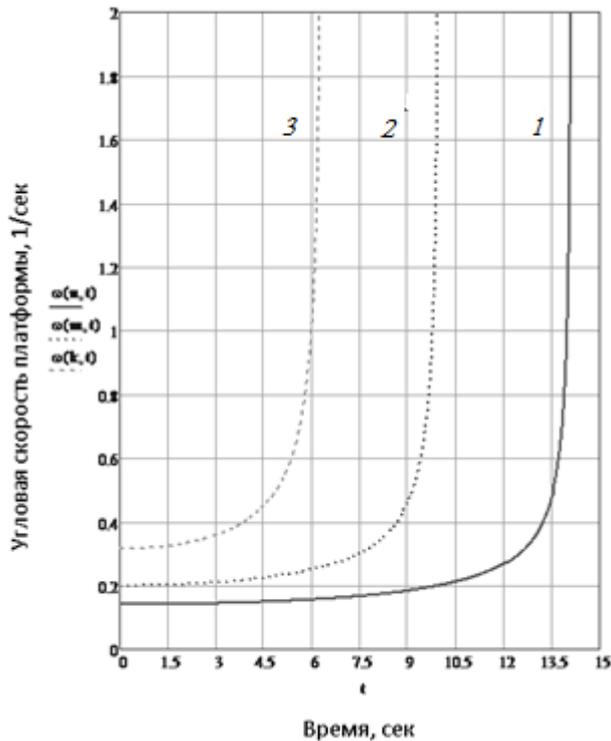


Рис. 5. Зависимость угловой скорости платформы от времени

На рис. 5 обозначены: кривая 1 при  $n = 0,01 \text{ с}^{-2}$ , кривая 2 при  $n = 0,02 \text{ с}^{-2}$ , кривая 3 при  $n = 0,05 \text{ с}^{-2}$ .

### ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА

Прямая задача для манипулятора – это вычисление положения  $(x_p, y_p, z_p)$  рабочего органа манипулятора по его кинематической схеме и значениям обобщенных координат  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ , где  $n$  – число степеней свободы манипулятора,  $q_i$  – обобщенные координаты.

Обратная задача – это вычисление величин обобщенных координат  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$  по заданному положению  $(x_p, y_p, z_p)$  рабочего органа при известной схеме кинематики манипулятора.

Таким образом, решение прямой задачи говорит о том, где будет находиться рабочий орган манипулятора, при заданных размерах и углах его звеньев, а обратная задача – как нужно изменить обобщенные координаты манипулятора, чтобы его рабочий орган оказался в заданном положении.

Алгоритм решения кинематической задачи позиционирования является составной частью алгоритма управления подвижной платформой от УЧПУ в реальном масштабе времени.

Прямую задачу кинематики манипулятора будем решать геометрически, для этого изобразим кинематическую схему манипулятора, обобщенные координаты его звеньев  $q_n$ , их длины  $l_n$  и привяжем к манипулятору абсолютную (неподвижную) систему координат  $(X, Y, Z)$ , обозначив координаты рабочего органа  $x_p, y_p, z_p$  (рис. 6).

Обозначения на рис. 6:  $(X, Y, Z)$  – абсолютная (неподвижная) система координат);  $P$  – точка, где находится рабочий орган (заготовка, инструмент) на рабочем столе;  $P'$  – положение рабочей точки  $P$  при вращении блока звеньев 2, 4–8 вокруг оси параллельной оси  $X$  в точке  $O_1$ ;  $P''$  – положение рабочей точки  $P$  при вращении блока звеньев 2, 5–8 вокруг оси параллельной оси  $X$  в точке  $O_4'' = O_4'''$ ;  $(x, y, z)$  – координаты точки  $P$ ;  $(x', y', z')$  – координаты точки  $P'$ ;  $(x'', y'', z'')$  – координаты точки  $P''$ ;  $(x''', y''', z''')$  =  $(x_p, y_p, z_p)$  – координаты точки  $P'''$ ;  $O_1P' = O_1P = l_p$ ;  $O_4P' = O_4P'' = O_4P = l_p'$ ;  $O_1O_4' = O_1O_4 = b$ .

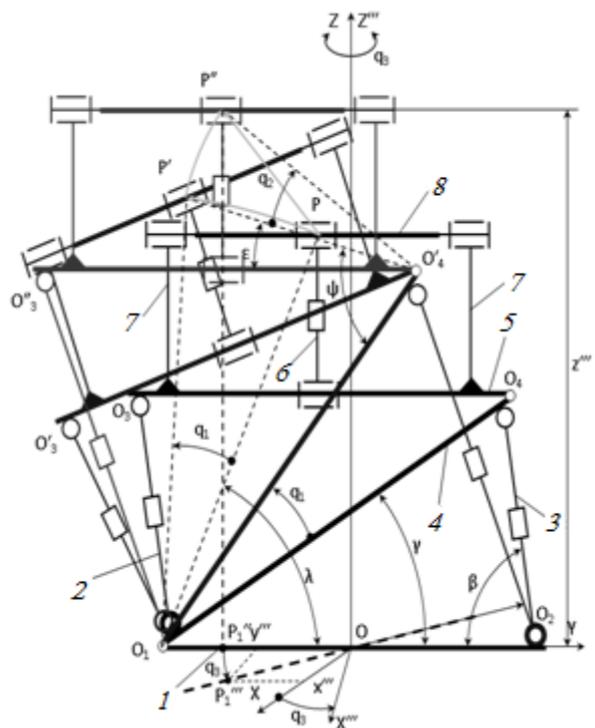


Рис. 6. Кинематическая схема манипулятора

На рис. 6 обозначены: 1 – поворотный стол; 2 – правый стержень (двигатель поступательного перемещения); 3 – левый стержень (двигатель поступательного перемещения); 4 – наклонная платформа; 5 – опорно-поворотное устройство; 6 – верхний стержень (двигатель

поступательного перемещения); 7– опоры; 8 – рабочий стол.

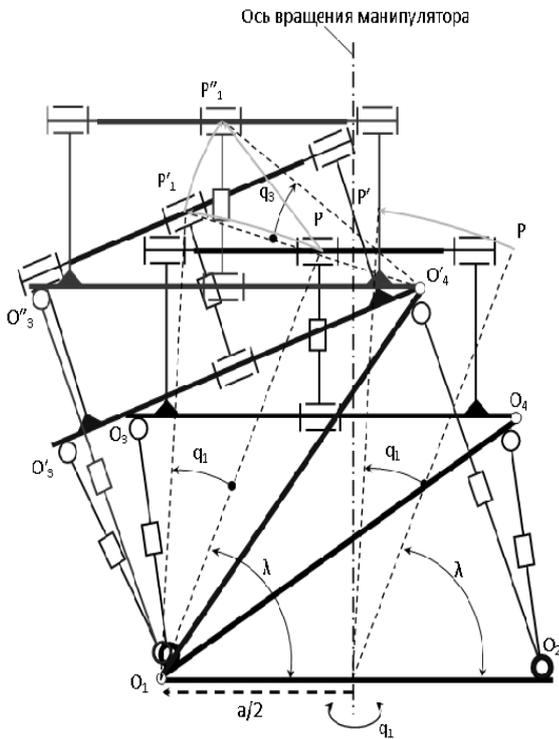


Рис. 7. Поворот манипулятора на угол  $q_1$

Последовательность поворотов стержней 2, 3 и поворотного стола 1 не изменяет итогового положения рабочего стола 8. Поэтому будем изменять, например положение стержня 3, потом стержня 2 и потом положение поворотного стола 1. По заданным обобщенным координатам найдем положение точки  $P$  рабочего органа. Из рис. 6 видно, что первоначальные координаты точки  $P$  будут:  $x = 0, y = -l_3 \cdot \cos \beta; z = H$ .

При изменении обобщенной координаты  $q_1$  (повороте) точка  $P$  займет положение  $P'$ . Представим вращение треугольника  $O_1P'P$  вокруг начала координат  $O$ : сначала нужно его повернуть против часовой стрелки на угол  $q_1$ , а потом параллельным переносом по оси  $Y$  сместить влево на величину  $a/2$  (рис. 7)

Из рис. 6 видно:  $x' = 0, y' = O_1P' \cdot \cos (q_1 + \lambda) - a/2, z = O_1P' \cdot \sin (q_1 + \lambda)$  или  $x' = 0, y' = l_p' \cdot \cos (q_1 + \lambda) - a/2, z = l_p' \cdot \sin (q_1 + \lambda)$ , где  $\lambda$  – угол наклона линии  $O_1P$  относительно горизонтали.

При изменении обобщенной координаты  $q_2$  (повороте) точка  $P'$  займет положение  $P''$ . Представим вращение треугольника  $O_4P'P''$  вокруг начала координат  $O$ : сначала нужно его повернуть по часовой стрелки на угол  $q_2$ , потом параллельным переносом сместить вправо на ве-

личину  $y_1$  и наконец параллельным переносом по оси  $Z$  переместить вверх на величину  $h_1$  (рис. 8):

$$x'' = 0, \quad y'' = -O_4P'' \cdot \cos (q_2 + \varepsilon) + x_1, \\ z'' = O_4P'' \cdot \sin (q_2 + \varepsilon) + h_1$$

или

$$x'' = 0, \\ y'' = -l_p' \cdot \cos (q_2 + \varepsilon) + x_1, \quad z'' = l_p' \cdot \sin (q_2 + \varepsilon) + h_1,$$

где  $\varepsilon$  – угол наклона линии  $O_4P'$  относительно горизонтали,

$$x_1 = b \cdot \cos (q_1 + \gamma) - a/2, \quad h_1 = b \cdot \sin (q_1 + \gamma).$$

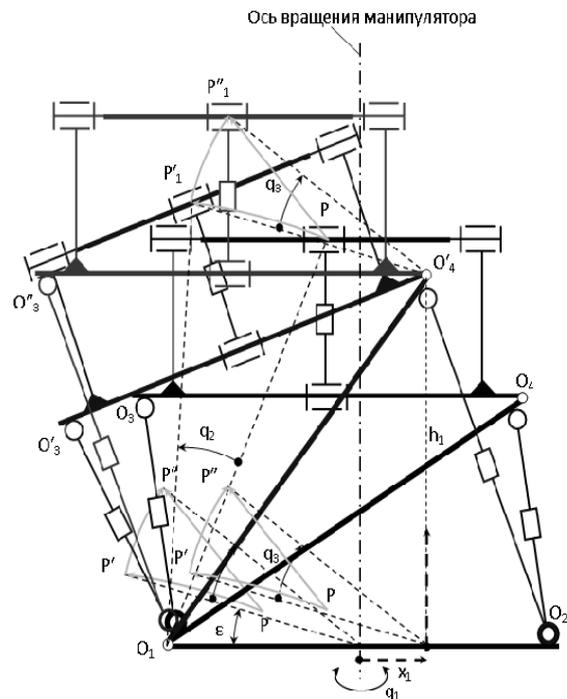


Рис. 8. Поворот манипулятора на угол  $q_2$

Из треугольника  $O_1P'O_4'$  (рис. 6) по известной теореме находим:

$$O_1P'^2 = O_4P'^2 + O_1O_4'^2 - 2O_4P' \cdot O_1O_4' \cdot \cos \psi$$

или

$$l_p'^2 = l_p'^2 + b^2 - 2b \cdot l_p' \cdot \cos \psi,$$

откуда

$$\psi = \arccos \left( \frac{b^2 + l_p'^2 - l_p'^2}{2b \cdot l_p'} \right).$$

Из рисунка видно, что  $\varepsilon = \psi - q_1 - \gamma$ .

При вращении манипулятора (системы  $XYZ$ ) вокруг оси  $Z \equiv Z'''$  (рис. 6) координаты точки  $P'''$  будут:  $x''' = y'' \sin q_3, y''' = y'' \cdot \cos q_3, z''' = z''$ .

Окончательно можно записать:

$$\begin{aligned}
 x''' &= x_p = [-l_p' \cos(q_2 + \psi - q_1 - \gamma) + b \cos(q_1 + \gamma) - a/2] \cdot \sin q_3, \\
 y''' &= y_p = [-l_p' \cos(q_2 + \psi - q_1 - \gamma) + b \cos(q_1 + \gamma) - a/2] \cdot \cos q_3, \\
 z''' &= z_p = l_p' \sin(q_2 + \psi - q_1 - \gamma) + b \sin(q_1 + \gamma).
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Таким образом, прямая задача кинематики для данного манипулятора решена.

Из соотношений (6) видно, что решение обратной задачи в явном виде невозможно. Для нашего случая, когда  $q_1 = q_2$ , т. е.  $\varphi_1 = \varphi_2$  для итогового положения рабочего органа манипулятора решение обратной задачи не представляет сложности. Запишем соотношения (6) при  $q_1 = q_2$ :

$$\begin{aligned}
 x_p &= [-l_p' \cos(\psi - \gamma) + b \cos(q_1 + \gamma) - a/2] \cdot \sin q_3, \\
 y_p &= [-l_p' \cos(\psi - \gamma) + b \cos(q_1 + \gamma) - a/2] \cdot \cos q_3, \\
 z_p &= l_p' \sin(\psi - \gamma) + b \sin(q_1 + \gamma).
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Из первых двух уравнений имеем:

$$\sin q_3 = \operatorname{tg} \left( \frac{x_p}{y_p} \right), \text{ откуда } q_3 = \operatorname{arctg} \left( \frac{x_p}{y_p} \right).$$

Из третьего уравнения находим:

$$\sin(q_1 + \gamma) = \frac{z_p - l_p' \cdot \sin(\psi - \gamma)}{b},$$

откуда

$$q_1 = q_2 = \arcsin \left( \frac{z_p - l_p' \cdot \sin(\psi - \gamma)}{b} \right) - \gamma.$$

Окончательно запишем:

$$\begin{aligned}
 q_1 &= q_2 = \arcsin \left( \frac{z_p - l_p' \cdot \sin(\psi - \gamma)}{b} \right) - \gamma, \\
 q_3 &= \operatorname{arctg} \left( \frac{x_p}{y_p} \right).
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

### РАСЧЕТНАЯ СХЕМА ПРОСТРАНСТВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА ДЛЯ ОЦЕНКИ ЕГО ЖЕСТКОСТИ

Выделим из общей схемы пространственного механизма оригинальную часть, реализующую угловые движения вокруг осей  $X$  и  $Y$  и поступательное перемещение вдоль оси  $Z$  за счет сложения двух встречных вращений [4]. Традиционные три связи (две поступательных и одно вращение) опустим, поскольку они реализованы в серийных станках и их жесткость достаточно известна (рис. 9).

На рис. 9 обозначены: 1 – поворотный стол; 2 – наклонная платформа; 3 – опорно-поворотное устройство; 4 – установочное звено (рабочий стол),  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – приводные устройства (гидроцилиндры).

Наиболее неблагоприятное нагружение связей будет, если исключить из расчетной схемы, параллельно действующие элементы, образуемые приводными устройствами  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Поэтому основу жесткости конструкции будет составлять жесткость их соединений, а именно – сдвоенные шарниры, которые с точки зрения теории механизмов и машин представляют собой кинематические цилиндрические пары.

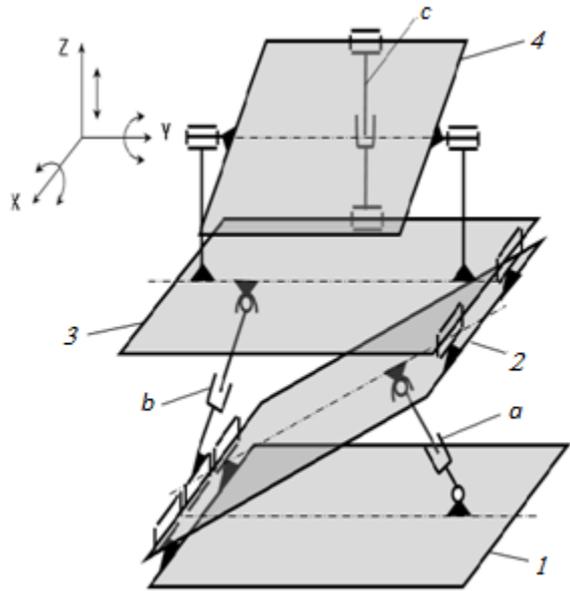


Рис. 9. Расчетная схема оригинальной части пространственного манипулятора

### НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ

Для решения поставленной задачи используем зависимости, приведенные в [5]. При взаимном сжатии равномерно распределенной нагрузкой  $q$  двух цилиндров, соприкасающихся параллельными образующими (рис. 9), полуширина прямоугольной площадки определится по формуле

$$b = 2,15 \cdot \sqrt{q \cdot \frac{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}}, \tag{9}$$

где  $q$  – распределенная нагрузка,  $E_1$ ,  $E_2$  и  $R_1$ ,  $R_2$  – модули упругости материалов и радиусы первого и второго цилиндров соответственно.

Наибольшее напряжение, действующее в точках оси площадки, будет:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= 1,27 \cdot \frac{q}{b} = \\ &= 0,418 \cdot \sqrt{2q \cdot \frac{E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Опасная точка в зоне контакта находится на оси Z на глубине, равной 0,4b. Главные напряжения в этой точке имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -0,180\sigma_{\max}; \\ \sigma_2 &= -0,288\sigma_{\max}; \\ \sigma_3 &= -0,780\sigma_{\max}. \end{aligned} \quad (11)$$

Максимальное касательное напряжение в опасной точке будет:  $\tau_{\max} = 0,3\sigma_{\max}$ .

Изменив в формуле (10) знак при  $R_2$  на противоположный, получим напряжение в случае давления цилиндра на вогнутую цилиндрическую поверхность:

$$\sigma_{\max} = 0,418 \cdot \sqrt{2q \cdot \frac{E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2} \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_1 \cdot R_2}}. \quad (12)$$

Приведенные выше формулы получены при значении коэффициента Пуассона  $\mu=0,3$ .

При  $E_1 = E_2 = E$  полуширина полоски контакта  $b$ , учитывая, что  $q = P/l$ , из формулы (9) будет

$$\begin{aligned} b &= 2,15 \cdot \sqrt{q \cdot \frac{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}} = 2,15 \cdot \sqrt{\frac{P}{l} \cdot \frac{2}{\frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2}}} = \\ &= 1,522 \cdot \sqrt{\frac{P}{l \cdot E} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 - R_1}}, \end{aligned} \quad (13)$$

а максимальное напряжение из формулы (10):

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= 0,418 \cdot \sqrt{2q \cdot \frac{E^2}{2E} \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_1 \cdot R_2}} = \\ &= 0,418 \cdot \sqrt{\frac{P \cdot E}{l} \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_1 \cdot R_2}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Сближение соприкасающихся тел, т. е. цилиндров, определяется по формуле

$$\Delta = 1,82 \cdot \frac{P}{l \cdot E} \cdot (1 - \ln b). \quad (15)$$

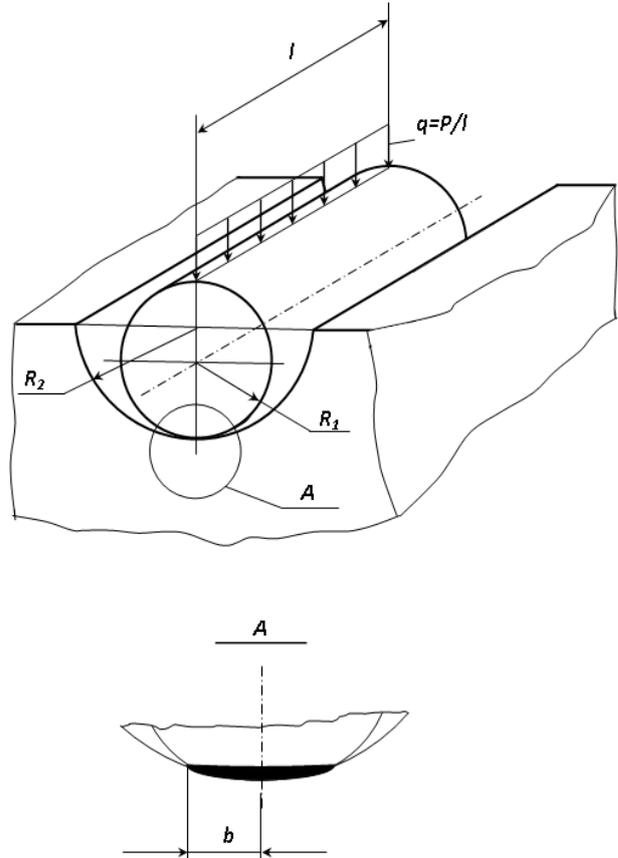


Рис. 10. Контакт цилиндра с цилиндрической впадиной

Из выражения (14) видно, что при малой разности  $(R_2 - R_1)$ , т. е. когда  $(R_2 - R_1) \rightarrow 0$ , будет:

- 1) из выражения (5):  $b \rightarrow \infty$ ;
- 2) из выражения (6):  $\sigma_{\max} \rightarrow 0$ .

Это свидетельствует о том, что если контакт между цилиндрами будет полным, зазоры отсутствуют, наибольшие напряжения будут иметь минимальные значения. Зная усилие  $P$  на цилиндры и их сближение  $\Delta$ , можно рассчитать жесткость данного сопряжения

$$c = \frac{P}{\Delta}. \quad (16)$$

Тогда 
$$c = \frac{P}{\Delta} = \frac{P}{1,82 \cdot \frac{P}{lE} \cdot [1 - \ln b]} = \frac{lE}{1,82[1 - \ln b]}$$

или окончательно:

$$c = \frac{lE}{1,82[1 - \ln \left( 1,522 \sqrt{\frac{P}{lE} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 - R_1}} \right)]}. \quad (17)$$

Рассчитаем коэффициенты жесткости при следующих параметрах модели:  $l = 5 \cdot 10^{-2}$  м,  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па;  $R_1 = 4,9 \cdot 10^{-3}$  м;  $R_2 = 5 \cdot 10^{-3}$  м.

Усилие  $P$  будем варьировать:  $P_1 = 10^2$  Н,  $P_2 = 10^3$  Н,  $P_3 = 10^4$  Н,  $P_5 = 10^5$  Н,  $P_6 = 10^6$  Н.

Расчеты приводят к следующим значениям:

$$\begin{aligned} c_1 &= 5,236 \cdot 10^8 \text{ Н/м}, \\ c_2 &= 5,881 \cdot 10^8 \text{ Н/м}, \\ c_3 &= 6,708 \cdot 10^8 \text{ Н/м}, \\ c_4 &= 7,805 \cdot 10^8 \text{ Н/м}, \\ c_5 &= 9,331 \cdot 10^8 \text{ Н/м}. \end{aligned} \quad (18)$$

Кроме того, надо учесть, что в предлагаемом схемном решении такие соединения (их 3 ед.) соединены последовательно, поэтому надо перевести жесткость в податливость и определить ее приведенное значение:

$$\frac{1}{c_{np}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3}, \quad (19)$$

откуда находим:

$$c_{np} = \frac{c_1 \cdot c_2 \cdot c_3}{c_1 \cdot c_2 + c_1 \cdot c_3 + c_2 \cdot c_3}. \quad (20)$$

Для упрощения принимаем  $c = c_1 = c_2 = c_3$ , тогда формула (20) переписывается как

$$c_{np} = \frac{c}{3}. \quad (21)$$

Используя расчетные значения жесткости (18):  $(c_{\min} \dots c_{\max}) = (5,236 \cdot 10^8 \dots 9,331 \cdot 10^8)$  Н/м.

По формуле (21) находим:

$$(c_{np.\min} \dots c_{np.\max}) = (1,745 \cdot 10^8 \dots 3,110 \cdot 10^8) \text{ Н/м}.$$

В [6] показано, что жесткость суппортов станков средних размеров составляет (30...100) Н/мкм или  $(3 \cdot 10^7 \dots 10^8)$  Н/м.

Таким образом, видно, что жесткость связей данного пространственного механизма сравнима с жесткостью суппортов современных станков, что доказывает принципиальную возможность использования пространственного механизма в качестве манипулятора, расширяющего возможности современного технологического оборудования.

### СОБСТВЕННАЯ ЧАСТОТА КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ

Рассматривая схемное решение пространственного манипулятора общего вида с шестью независимыми парциальными движениями как колебательную систему, определим качественный параметр этой системы – собственную частоту ее колебаний  $k$ . Из теории колебаний известно, что собственная частота  $k$  колебаний

зависит только от параметров системы и определяется как  $k = \sqrt{\frac{c_{np}}{a}}$ .

Здесь  $a$  – коэффициент инерции системы. В нашем случае  $a = m$ . Данное выражение имеет размерность  $c^{-1}$  или рад/с. Умножив его на коэффициент  $1/2\pi$ , выразим частоту в Гц:

$$k = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{c_{np}}{m}}, \quad (22)$$

где  $c_{np}$  – приведенная жесткость системы,  $m$  – масса системы.

Используя ранее рассчитанные значения  $c_{np}$  и задавая значения массы  $m$ :  $m_1 = 10$  кг,  $m_2 = 20$  кг,  $m_3 = 30$  кг, найдем собственные частоты системы:

- 1) При  $c_{np.1} = 1,745 \cdot 10^8$  Н/м:  
 $k_1 = 665$  Гц,  
 $k_2 = 470$  Гц,  
 $k_3 = 384$  Гц.
- 2) При  $c_{np.2} = 1,960 \cdot 10^8$  Н/м:  
 $k_1 = 705$  Гц,  
 $k_2 = 498,2$  Гц,  
 $k_3 = 407$  Гц.
- 3) При  $c_{np.3} = 2,236 \cdot 10^8$  Н/м:  
 $k_1 = 752,6$  Гц,  
 $k_2 = 532$  Гц,  
 $k_3 = 434,5$  Гц.
- 4) При  $c_{np.4} = 2,601 \cdot 10^8$  Н/м:  
 $k_1 = 812$  Гц,  
 $k_2 = 574$  Гц,  
 $k_3 = 469$  Гц.
- 5) При  $c_{np.5} = 3,110 \cdot 10^8$  Н/м:  
 $k_1 = 888$  Гц,  
 $k_2 = 627,6$  Гц,  
 $k_3 = 512,4$  Гц.

Сравнивая полученные значения с эксплуатационными частотами технологического оборудования [7, 8] видно, что оборудование, оснащенное предлагаемым манипулятором, будет работать в дорезонансной зоне. Используя пакет программы MathCAD, приводим графические зависимости выражения (17) в зависимости от массы  $m$  системы и приведенной жесткости  $c_{np}$ , которые представлены на рис. 11, 12.

На рис. 11 обозначены: кривая 1 ( $k(m_1)$ ) при  $m = 10$  кг, кривая 2 ( $r(m_1)$ ) при  $m = 20$  кг, кривая 3 ( $p(m_1)$ ) при  $m = 30$  кг;  $m_1, m_2, m_3$  – текущие значения массы  $m$ ,  $k(m_1), r(m_1), p(m_1)$  – собственные частоты системы при фиксированном значении массы  $m_1$ .

На рис. 12 обозначены: кривая 1 при  $c_{np} = 1,745 \cdot 10^8$  Н/м; кривая 2 при  $c_{np} = 1,960 \cdot 10^8$  Н/м; кривая 3 при

$c_{пр} = 2,236 \cdot 10^8$  Н/м;  $c_1, c_2, c_3$  – текущие значения приведенной жесткости системы  $c_{пр}$ ;  $k(c_1), r(c_1), p(c_1)$  – собственные частоты системы при фиксированном значении  $c_1$ .

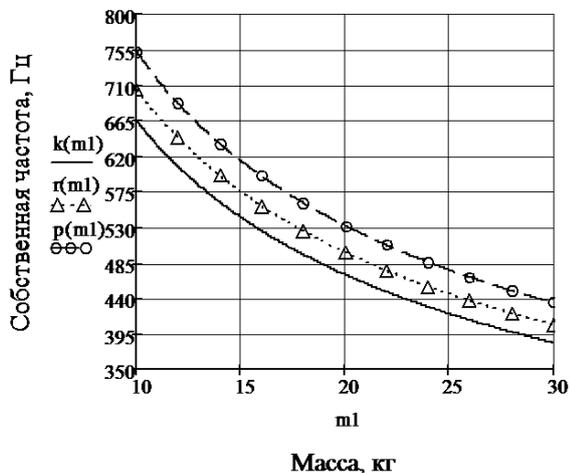


Рис. 11. Зависимость собственных частот колебаний от массы системы

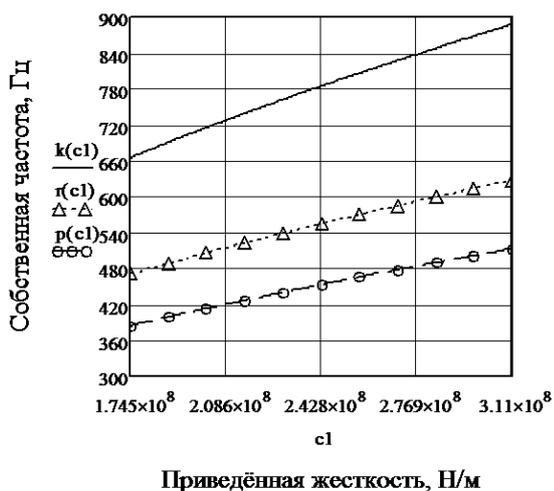


Рис. 12. Зависимость собственных частот колебаний от приведенной жесткости системы

### ВЫВОДЫ

1. При постоянной скорости перемещения штоков гидродвигателей угол поворота наклонной платформы в рабочем диапазоне изменяется по времени практически линейно, т. е. угловая скорость платформы практически постоянна.

2. Конечные повороты наклонной платформы и опорно-поворотного устройства идентичны, т. е. эти повороты коммутативны. Таким образом, схемное решение обеспечивает независимость исполнительных движений, в том

числе независимость последовательности исполнительных парциальных движений.

3. Предлагаемое схемное решение механизма пространственного манипулятора расширяет функциональные возможности устройства манипулирования в пространстве, за счет обеспечения степени подвижности по шести координатам на базе кинематической развязки и допускает максимальную унификацию связей звеньев и приводов парциальных движений.

4. Для исследуемой схемы механизма манипулятора аналитически решена прямая задача кинематики, а при  $\varphi_1 = \varphi_2$  – обратная задача, что позволит для каждого момента времени определить положение исполнительного органа манипулятора и выбрать схему нагружения для определения усилий, действующих на манипулятор. Эти задачи могут быть решены и при иных условиях или модификациях схемы.

5. Результаты расчетов приведенной жесткости показали, что жесткость предложенной модели пространственного манипулятора, в среднем, сравнима с жесткостью суппортной группы станков средних размеров.

6. Показано, что, при фиксированной приведенной жесткости, с увеличением приведенной массы манипулятора частота его собственных колебаний уменьшается, а при фиксированной приведенной массе и увеличении приведенной жесткости собственная частота колебаний возрастает, что соответствует основным положениям теории колебаний.

7. Аналитическим расчетом собственных частот предлагаемой конструкции манипулятора доказано, что они на порядок выше эксплуатационных частот силового возбуждения технологического оборудования.

8. Предлагаемое техническое решение механизма манипулятора можно реализовать унифицированными узлами, что перспективно к использованию в технологических машинах машиностроительных производств, в частности в шлифовальных станках.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гаврилов В. А., Кольцов А. Г. Многофункциональное оборудование на основе параллельной кинематики. Омск: ОмГТУ, 2006. 131 с. Деп. в ВИНТИ 29.11.2006, № 1481-В2006.
2. Балакин П. Д., Шамутдинов А. Х. Схемное решение механизма пространственного манипулятора // Омский научный вестник. 2012. № 1. С. 65–69.
3. Балакин П. Д., Шамутдинов А. Х. Исследование жесткости пространственного механизма // Омский научный вестник. 2012. № 3. С. 44–48.

4. Люкшин В. С. Теория винтовых поверхностей в проектировании режущих инструментов. М.: Машиностроение, 1967. 372 с.

5. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко [и др.] ; под общ. ред. Г. С. Писаренко. Киев: Наук. думка, 1988. 736 с.

6. Проектирование металлорежущих станков и станочных систем: справочник-учебник. В 3-х т. Т. 1: Проектирование станков / А. С. Проников, О. И. Аверьянов [и др.] ; Под ред. А. С. Проникова. М.: Машиностроение, 1994. 444 с.

7. Кедров С. С. Колебания металлорежущих станков. М.: Машиностроение, 1978. 198 с.

8. Кудинов В. А. Динамика станков. М.: Машиностроение, 1967. 360 с.

#### ОБ АВТОРАХ

**ШАМУТДИНОВ Айдар Харисович**, ст. преп. каф. теории механизмов и машин. Дипл. инж. по металлореж. станкам и инструментам (ОмГТУ, 1994).

**БАЛАКИН Павел Дмитриевич**, зав. той же каф. Дипл. инж. по технол. машиностроения, металлореж. станкам и инструментам. Д-р техн. наук (ОмПИ, 1989), проф.

**КОЛЬЦОВ Александр Германович**, доц. каф. металлореж. станков и инструментов. Дипл. инж. по металлореж. станкам и инструментам (ОмГТУ, 1997). Канд. техн. наук по динамике и прочности (ОмГТУ, 2002). Иссл. в обл. динамики и точн. технол. оборудования.

#### METADATA

**Title:** Manipulator on the basis of spatial mechanism.

**Authors:** A. H. Shamutdinov, P. D. Balakin, and A. G. Koltsov.

**Affiliation:** Omsk State Technical University (OmGTU), Russia.

**Email:** 1972id@list.ru, kolzov75@mail.ru.

**Language:** Russian.

**Source:** Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 17, no. 8 (61), pp. 69-78, 2013. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

**Abstract:** The paper discusses the development of mathematical models of kinematics and dynamic system of the manipulator based on the spatial mechanism. It is also conducted research on the developed mathematical models. In the development of mathematical models of the kinematics and dynamics of the fundamental assumptions used in mechanics and the theory of vibrations. Were solved direct and inverse kinematics to control this mechanism, defined coefficients stiffness and natural frequencies. Scope of the manipulator - the adaptation to the spatial orientation of the workpiece on the machine.

**Key words:** spatial mechanism; mathematical models of kinematics and dynamics; stiffness; natural frequencies.

#### References (English transliteration):

1. V. A. Gavrillov and A. G. Koltsov, *Multifunction devices based on parallel kinematics*, (in Russian). Omsk: Dep. in VINITI 29.11.2006, № 1481-B2006.
2. P. D. Balakin and A. H. Shamutdinov, "Schematic of the mechanism of spatial manipulator," (in Russian), *Omskiy Nauchnyy Vestnik* (Omsk Scientific Bulletin), no. 1, pp. 65-69, 2012.
3. P. D. Balakin and A. H. Shamutdinov, "The study of spatial rigidity of the mechanism," (in Russian), *Omskiy Nauchnyy Vestnik*, no. 3, pp. 44-48, 2012.
4. V. C. Lukshin, *Theory screw surfaces in the design of cutting tools*, (in Russian). Moscow: Mashinostroenie, 1967.
5. G. S. Pisarenko, *Reference materials strength*, (in Russian). Kiev: Naukova dumka, 1988.
6. A. S. Pronikov, *The design of machine tools and machine tools. Reference manual*, (in Russian). Moscow: Mashinostroenie, 1994.
7. S. S. Kedrov, *Fluctuations in metal-cutting machine tools*, (in Russian). Moscow: Mashinostroenie, 1978.
8. V. A. Kudinov, *The dynamics of machines*, (in Russian). Moscow: Mashinostroenie, 1967.

#### About authors:

**SHAMUTDINOV, Aidar Kharisovich**, Lecturer, Department "The theory of mechanisms and machines." Dipl. Ing. on machine tools and instruments (OmGTU, 1994)

**BALAKIN, Pavel Dmitrievich**, Doctor, Professor, Head of Department-extending. "The theory of mechanisms and machines." Dipl. Ing. by special order. "Technology of mechanical engineering, machine tools and instruments".

**KOLTSOV, Alexander Germanovich**, Associate Professor, Dept. "Metal Machine and Tools." Dipl. Eng. for metal-cutting machine tools and instruments (OmGTU, 1997). Ph.D. of the dynamics and strength (Omsk State Technical University, 2002). Researches of the dynamics and precision manufacturing equipment.