

## ОСОБЕННОСТИ СТАТИЧЕСКОГО И ДИНАМИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ В МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ. Задачи вибронной защиты

С. В. ЕЛИСЕЕВ<sup>1</sup>, Р. С. БОЛЬШАКОВ<sup>2</sup>, А. В. ЕЛИСЕЕВ<sup>3</sup>, Е. А. ПАРШУТА<sup>4</sup>

<sup>1</sup>eliseev\_s@inbox.ru, <sup>2</sup>bolshakov\_rs@mail.ru, <sup>3</sup>andrey.marketer@gmail.com, <sup>4</sup>parshuta@mail.ru

ФГБОУ ВПО «Иркутский государственный университет путей сообщения» (ИрГУПС)

Поступила в редакцию 27.10.2013

**Аннотация.** Обсуждается методологическая основа для решения задач определения положения статического равновесия и соответствующих реакций в соединениях элементов системы между собой и с опорными поверхностями. Предлагается алгоритмический базис расчета реакций при различных формах действующих внешних сил. Рассматриваются особенности формирования положения статического равновесия при нескольких элементах. Задача определения статических реакций в системе с упругими элементами может быть решена на основе динамических подходов, когда упругой механической системе сопоставляется структурная схема эквивалентной в динамическом отношении структурной схеме системы автоматического управления. При этом предполагается, что комплексная переменная в преобразованиях Лапласа, которая отражает действие внешней силы, принимается равной нулю. Такая ситуация следует из предварительного получения уравнения кинестатики на основе принципа Даламбера с последующим переходом к уравнениям статики при  $p \rightarrow 0$ . Особенностью предлагаемого подхода является доказательство возможности использования аппарата передаточных функций для решения задач статики. Получены рекомендации и соответствующие аналитические соотношения, позволяющие ввести в рассмотрение особенности формирования статических реакций в системах с несколькими степенями свободы при действии нескольких статических сил.

**Ключевые слова:** равновесие в системах с упругими связями; статические реакции между элементами системы; статические реакции в нескольких опорах; статическое равновесие при действии сил тяжести.

### ВВЕДЕНИЕ

Вопросы обеспечения надежности и безопасности рассматриваются на всех стадиях жизненного цикла машин и оборудования, что предопределяет интерес к этапам предварительных исследований и оценки динамических свойств технических объектов, в первую очередь, на уровне расчетных схем. Последние, как правило, представляют собой механические колебательные системы, имеющие одну и более степеней свободы. Действие внешних возмущений и внутренних неуравновешенных сил, если речь идет о вибрационных нагрузках, изучается с использованием математических моделей [1–3],

описывающих малые отклонения относительно положения статического равновесия. В [4, 5] предлагаются различные подходы по определению динамических реакций, возникающих между элементами механических колебательных систем, в том числе между соединительными элементами (а к ним относятся пружины, демпфера, устройства для преобразования движения и др.) и опорными поверхностями. Что касается опорных точек в системе, то их может быть достаточно много, что зависит от структуры системы и ее сложности. Кроме того, механические колебательные системы могут иметь твердые тела, которые не приводятся к материальным точкам, а это требует, в свою очередь, учета особенностей опоры объекта в нескольких контактах с опорной поверхностью.

При существующей развитости методологических и методических обоснований, связанных с определением параметров динамического состояния систем (перемещений, скоростей, уско-

---

Исследования выполнены по гранту в рамках федеральной целевой программы «Научные и педагогические кадры инновационной России» на 2012–13 гг. (XLVII очередь, мероприятие 1.3.2. – естественные науки) № 14.132.21.1362.

рений, динамических реакций и др.) в меньшей степени разработаны вопросы оценки статического состояния, то есть оценки статических реакций, статической устойчивости и др. в механических системах с упругими звеньями.

Учет статических составляющих реакций в сочленениях звеньев механических колебательных систем имеет, тем не менее, большое значение для определения режимов взаимодействия элементов, между которыми существуют неустойчивые связи. При необходимости обеспечения нераскрытия стыков, как правило, используют способы предварительного нагружения, что достигается деформированием упругих элементов (или пружин), созданием натягов, поджатий контактов, приложением дополнительных удерживающих сил, реализуемых специальными механизмами.

Таким образом, вопрос об определении статических реакций в механических колебательных системах можно рассматривать как необходимый этап в оценке уровня силовых взаимодействий элементов системы, в предположении целесообразности получения информации о полных реакциях в контактах как суммы статических и динамических компонент.

В дальнейшем рассматриваются особенности определения статических реакций в механических системах с целью разработки обобщенного подхода, позволяющего создать некоторые основы, допускающие переход к оценке динамических реакций, и при необходимости – их суммы.

## I. СТАТИЧЕСКИЕ РЕАКЦИИ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

### 1. Система с одной степенью свободы

Для определения статических реакций, возникающих в механических системах с упругими соединительными элементами (или пружинами), рассмотрим систему с одной степенью свободы. При горизонтальном расположении элемента с массой  $m$  (объекта) сила веса  $Q$  не будет оказывать действия. Предполагается, что длины пружин с жесткостями  $k_1$  и  $k_2$  выбраны соответствующим образом и обеспечивают равновесие в точках контакта  $A, A_1, B, B_1$  без возникновения усилий.

В положении равновесия  $y = 0$  в качестве внешнего статического воздействия принимается во внимание постоянная по величине сила  $F \neq 0$  (рис. 1). Под действием силы  $F$  происходит смещение точки равновесия на величину

ну  $y = \frac{F}{k_1 + k_2}$ , что позволяет определить реакции в тт.  $A, A_1, B, B_1$ ; получим соответственно

$$|R_A| = |R_{A1}| = k_1 y = \frac{k_1}{k_1 + k_2} F, \quad (1)$$

$$|R_B| = |R_{B1}| = k_2 y = \frac{k_2}{k_1 + k_2} F. \quad (2)$$

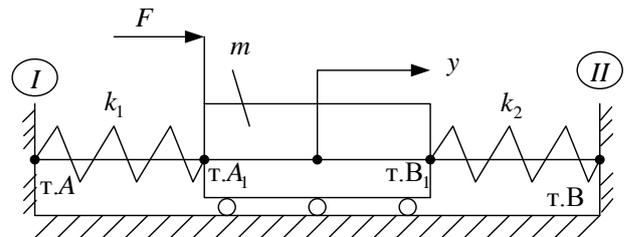


Рис. 1. Принципиальная схема статически уравновешенной системы

Показанное на рис. 1 твердое тело может быть представлено в виде материальной точки, к которой приложена постоянная сила  $F$ . Эта сила вызывает статические реакции: в точке  $A$  (точке контакта пружины  $k_1$  (рис. 1) с опорной поверхностью  $I$ ,  $R_A = k_1 y$ ), а также в т.  $B$  – точке контакта пружины  $k_2$  с опорной поверхностью  $II$  (рис. 1), где  $R_B = k_2 y$ . В свою очередь

$$R_A + R_B = F. \quad (3)$$

Учет геометрических размеров твердого тела (как это показано на рис. 1) приобретает смысл в определенных задачах, когда, например, предостают интерес взаимодействия в т.  $A_1$  –  $k_1$  и твердым телом  $m$ , или между пружиной  $k_2$  и твердым телом  $m$  (точка  $B_1$ ). В таких случаях может определяться усилие давления твердого тела, учет предварительной деформации пружин и т. д.

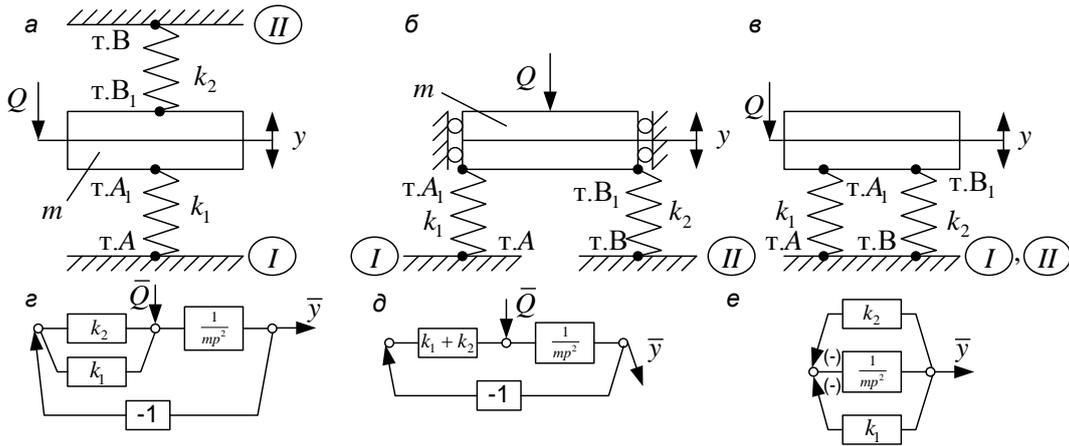
Отметим, что уравнение равновесия системы (рис. 1) может быть получено из уравнения кинестатики на основе применения принципа Даламбера:

$$m y'' + k_1 y_1 + k_2 y_2 = F. \quad (4)$$

В изображениях Лапласа (4) можно записать:

$$m p^2 \bar{y} + \bar{y}(k_1 + k_2) = \bar{F}, \quad (5)$$

где  $p = j\omega$  – комплексная переменная [6];  $\bar{y}$ ,  $\bar{F}$  – изображения  $y(t)$  и  $F(t)$  в области преобразований Лапласа. В статике можно полагать, что  $p = 0$ , тогда получим, что (5) соответствует (3).



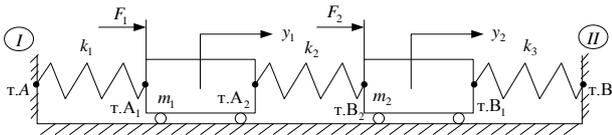
**Рис. 2.** Принципиальная схема отношения опорных поверхностей: *a* – отдельные, *б* – отдельные и параллельные, *в* – общие, и соответствующие структурные схемы: *г* – отдельные пружины, *д* – пружины в параллельном соединении, *е* – пружины как дополнительные обратные связи

Рассматриваемая задача может быть интерпретирована с использованием структурных подходов. На рис. 2, *a–e* показана последовательность соответствующих преобразований. При этом на рис. 2 исходная расчетная схема (рис. 1) приведена к вертикальному виду, а сила  $F$  заменена на силу веса  $Q$ .

Из сводного рис. 2 следует, что выбор опорных поверхностей *I* и *II* предопределяет особенности реакций, которые могут рассматриваться как отдельные взаимодействия или происходящие в параллельном соединении. Структурные схемы системы на рис. 2, *г, д, е* относятся к случаю динамического взаимодействия, но использование символики позволяет продемонстрировать некоторые общности, существующие при определении как статических воздействий, так и динамических сил, если они относятся к гармоническим.

### 2. Система с двумя степенями свободы

Рассматривается случай с двумя материальными телами  $m_1$  и  $m_2$ , соединенными упругими элементами  $k_1$  и  $k_2, k_3$ , как показано на рис. 3.



**Рис. 3.** Принципиальная схема системы с упругими связями  $k_1, k_2, k_3$  и постоянными силами  $F_1$  и  $F_2$

В данном случае, как и ранее, рассматривается линейная система, в которой при действии

постоянных сил  $F_1$  и  $F_2$  происходят отклонения системы  $y_1$  и  $y_2$  от положения равновесия.

Примем, что  $F_1 \neq 0$ , а  $F_2 = 0$ . Используем изложенный выше прием построения уравнений кинестатики и получим

$$(k_1 + k_2)\bar{y}_1 - k_2\bar{y}_2 = \bar{F}_1, \quad (6)$$

$$(k_2 + k_3)\bar{y}_2 - k_2\bar{y}_1 = 0. \quad (7)$$

Так как в соответствии с (7)

$$\bar{y}_2 = \frac{k_2}{(k_2 + k_3)}\bar{y}_1, \quad (8)$$

то после подстановки (8) в (6) получим, что

$$\begin{aligned} (k_2 + k_3)\bar{y}_1 - \frac{k_2^2}{(k_2 + k_3)}\bar{y}_1 &= \\ &= \frac{(k_2 + k_3)k_1 + k_2k_3}{(k_2 + k_3)}\bar{y}_1 = \bar{F}_1, \end{aligned} \quad (9)$$

откуда

$$\bar{y}_1 = \frac{(k_2 + k_3)}{(k_2 + k_3)k_1 + k_2k_3} = \bar{F}_1 \frac{1}{k_1 + \frac{k_2k_3}{k_2 + k_3}}. \quad (10)$$

То есть под действием силы  $\bar{F}_1$  масса  $m_1$  получит смещение, которое определяется при параллельном соединении  $k_1$  и блока последовательно соединенных пружин  $k_2$  и  $k_3$ . При этом можно найти реакцию в точке  $A$  (на опорной поверхности *I*):

$$\bar{R}'_A = \frac{k_1\bar{F}_1}{k_1 + \frac{k_2k_3}{k_2 + k_3}} = k_1\bar{y}_1, \quad (11)$$

Используя (6), получим, что

$$\bar{y}_1 = \frac{\bar{F}_1 + k_2 y_2}{k_1 + k_2} = k_1 \bar{y}_1, \quad (12)$$

тогда

$$(k_2 + k_3) \bar{y}_2 - \frac{k_2^2}{(k_1 + k_2)} \bar{y}_2 = \bar{F}_1 \frac{k_2}{k_1 + k_2}$$

или

$$\bar{y}_2 = \bar{F}_1 \frac{k_2}{k_3(k_1 + k_2) + k_1 k_2}. \quad (12')$$

В дальнейшем можно полагать, что  $\bar{y}_2 = y_2$  в силу свойств преобразования Лапласа (постоянные величины) [6]. Отметим, что смещение  $y_2$  отличается от  $y_1$ .

Реакция в т.  $B$ , то есть между упругим элементом  $k_3$  и опорной поверхностью  $II$ , определяется

$$\bar{R}'_B = k_3 y_2 = \frac{\bar{F}_1 k_2 k_3}{k_3(k_1 + k_2) + k_1 k_2}. \quad (13)$$

При этом  $|R_A| = |R_{A1}|$ , а  $|R_B| = |R_{B1}|$ . Что касается пружины с жесткостью  $k_2$ , то усилие ее деформации может быть определено

$$\begin{aligned} \bar{R}'_{12} &= (y_2 - y_1) k_2 = F_1 \left( \frac{(k_2 + k_3 - k_2) k_2}{k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3} \right) = \\ &= \frac{F_1 k_2 k_3}{k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (14), в частности, следует, что

$$|R_{A2}| = |R_{B2}|. \quad (15)$$

## II. УЧЕТ ИЗМЕНЕНИЯ РАСПОЛОЖЕНИЯ СИЛ

Будем полагать, что схема действия постоянных сил изменится и  $F_1 = 0$ , а  $F_2 \neq 0$ . Тогда уравнения равновесия примут вид

$$y_1(k_1 + k_2) - k_2 y_2 = 0, \quad (16)$$

$$y_2(k_3 + k_3) - k_2 y_1 = F_2. \quad (17)$$

Из (16) найдем, что

$$y_1 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} y_2. \quad (18)$$

Подставим (18) в (17) и получим

$$y_2(k_2 + k_3) - \frac{k_2^2 y_2}{k_1 + k_2} = F_2, \quad (19)$$

откуда следует, что

$$[(k_1 + k_2) \cdot k_3 + k_1 k_2] y_2 = F_2(k_1 + k_2)$$

или

$$y_2 = F_2 \frac{k_1 + k_2}{(k_1 + k_2) k_3 + k_1 k_2} = \frac{F_2}{k_3 + \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}. \quad (20)$$

Найдем (при  $F_1=0$ ,  $F_2 \neq 0$ ) реакцию в т.  $B$  ( $R_B = y_2 k_3$ ):

$$R''_B = \frac{k_3(k_1 + k_2)}{(k_1 + k_2)k_3 + k_1 k_2} F_2 = \frac{F_2 k_3}{k_3 + \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}. \quad (21)$$

В свою очередь реакция в т.  $A$  определится после ряда промежуточных преобразований

$$y_2 = \frac{F_2 + k_2 y_1}{k_2 + k_3}, \quad (22)$$

тогда

$$y_1(k_1 + k_2) - \frac{k_2^2 y_1}{k_2 + k_3} = \frac{k_2}{k_2 + k_3} F_2$$

или

$$y_1 = \frac{k_2 F_2}{k_2 k_1 + k_2 k_3 + k_2 k_3}. \quad (23)$$

В конечном итоге получим

$$R''_A = k_1 y_1 = \frac{k_1 k_2}{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3} F_2, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} R''_{12} &= k_2(y_2 - y_1) = \frac{(k_1 + k_2)k_2 - k_2^2}{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3} = \\ &= \frac{k_1 k_2}{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$R''_A = k_2(y_2 - y_1) = \frac{(k_1 + k_2)k_2 F_2 - k_2^2 y_1}{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3}.$$

## III. СЛУЧАЙ ОДНОВРЕМЕННОГО ДЕЙСТВИЯ ДВУХ СИЛ

Теперь можно перейти к определению полных статических реакций, которые находятся по принципу суперпозиций. Вначале найдем статические смещения, вызванные силами  $F_1$  и  $F_2$  –

$$y_1 = \frac{F_1(k_2 + k_3) \pm k_2 F_2}{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3}. \quad (26)$$

$$y_2 = \frac{k_2 F_1 \pm (k_1 + k_2) F_2}{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3}. \quad (27)$$

Сравнивая (26) и (27), можно отметить, что в системе с двумя степенями свободы при действии двух постоянных сил одновременно, необходимо учитывать знаки смещения масс по координатам  $y_1$  и  $y_2$  (они могут быть противоположными). Поэтому из (26) и (27) можно найти условия, когда  $y_1 = 0$ , что возможно, если выполняются соотношения

$$F_1(k_2 + k_3) = k_2 F_2.$$

или

$$F_2 = \frac{k_2 + k_3}{k_2} F_1 = F_1 \left(1 + \frac{k_3}{k_2}\right). \quad (28)$$

При этом  $F_2$  и  $F_1$  направлены противоположно. Такие процессы можно реализовать практически, например, на основе электромагнитных управляемых устройств.

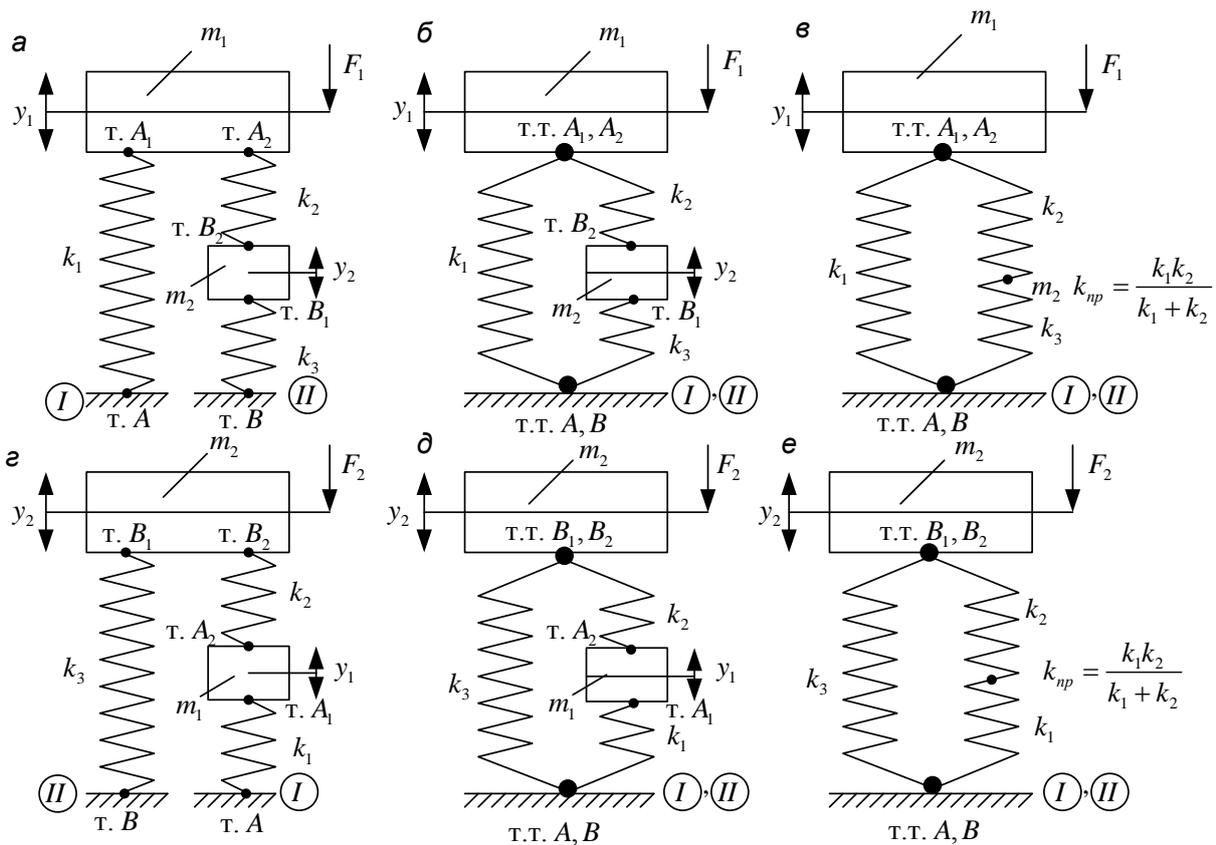


Рис. 4. Принципиальные схемы распределения упругих элементов при разных силах:  
 а, б, в –  $F_1 \neq 0, F_2 = 0$ ; г, д, е –  $F_1 = 0, F_2 \neq 0$

В свою очередь можно аналогичные условия найти для равновесия по  $y_2$ . Тогда необходимо обеспечить

$$F_1 = \frac{k_1 + k_2}{k_2} F_2 = F_2 \left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right). \quad (29)$$

Реакции в точках контакта с опорными поверхностями I и II и между пружинами и массами  $m_1$  и  $m_2$  могут быть найдены при использовании принципа суперпозиции. Найдем статические реакции при одновременном действии сил  $F_1$  и  $F_2$ :

$$R_A = R'_A + R''_A = \frac{(k_2 + k_3)k_1 \bar{F}_1 \pm (k_1 k_2) F_2}{A_0}, \quad (30)$$

$$R_B = R'_B + R''_B = \frac{F_1 k_2 k_3 \pm F_2 k_3 (k_1 + k_2)}{A_0}. \quad (31)$$

Соответственно  $|R_{A1} = R'_{A1} + R''_{A1}| = |R_A|$ ,  
 $|R_{B1} = R'_{B1} + R''_{B1}| = |R_B|$ .

На рис. 4 показана последовательность преобразования начальной расчетной схемы (рис. 3) с учетом особенностей соединения упругих элементов (в данном случае силы веса не

учитываются, это будет сделано в дальнейшем;  $F_1$  и  $F_2$  – просто постоянные силы).

Сравнительный анализ смещения точек, связанных с приложениями сил  $F_1$  и  $F_2$ , показывает, что смещение, например, по координате  $y_1$  от действия силы  $F_1$  определяется свойствами блока соединенных между собой пружин  $k_1, k_2, k_3$  (рис. 4, в) с приведенной жесткостью

$$k'_{np} = \frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3} + k_1. \quad (32)$$

Такой же результат следует из выражения (10). Если рассматривать случай  $F_1 = 0, F_2 \neq 0$ , то из рис. 4, е следует, что приведенная жесткость, определяющая смещение  $m_2$  по координате  $y_2$  от действия  $F_2$  может быть найдена

$$k''_{np} = k_3 + \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}. \quad (33)$$

Такой же результат следует из выражения (20). Вышеприведенное позволяет сделать вывод о том, что при статических взаимодействиях и выборе точки приложения постоянной силы и опорной поверхности, приведенная жесткость упругой системы может определяться в предпо-

ложении, что все промежуточные массы «обнуляются»; используются при этом правила параллельного и последовательного соединения пружин. Отметим, что такой подход применим для оценки действия постоянных сил (но силы веса не учитываются). Для учета сил тяжести, когда движения системы совпадают по направлению с силами веса, необходимы другие подходы для нахождения статических реакций и положения статического равновесия.

При рассмотрении действия сил  $F_1$  и  $F_2$ , в частности, раздельного, можно отметить, что при  $F_1 \neq 0$  ( $F_2 = 0$ ) смещение по координате  $y_1$  определяется приведенной жесткостью из выражения (32), что дает возможность найти общую статическую реакцию на поверхности  $I$  и  $II$ , как показано на рис. 4, в. Такая же реакция будет действовать и на тело массой  $m_1$ . В данном случае имеют место совпадение (или совмещение) тт.  $A$  и  $B$ , а также тт.  $A$  и  $A_2$ , хотя в общем случае, то есть при разделении опорных поверхностей, тт.  $A$  и  $B$  не совпадают. Аналогичная ситуация наблюдается при раздельном действии  $F_2 \neq 0$  ( $F_1 = 0$ ). Тогда может быть найдено смещение массы  $m_2$  по координате  $y_2$  от действия силы  $F_2$ , что определяется приведенной жесткостью упругой системы из выражения (33). В этом случае также при определении статических реакций можно наблюдать совмещение тт.  $A$  и  $B$  (рис. 4, е), а также тт.  $B_1$ ,  $B_2$ . Однако в обоих случаях остается открытым вопрос о деформациях упругого элемента  $k_2$  и статических реакциях, формируемых промежуточной массой  $m_2$  (при  $F_1 \neq 0$ ) или  $m_1$  (при  $F_2 \neq 0$ ). Упомянутые особенности связаны с тем, что при раздельном действии  $F_1 \neq 0$  (при  $F_2 = 0$ ) происходит также и смещение по координате  $y_2$ , определяемое, в частности, выражением (21).

Для случая  $F_2 \neq 0$  ( $F_1 = 0$ ) под действием силы происходит смещение, определяемое приведенной жесткостью (33). Одновременно происходит и смещение по координате  $y_1$ , определяемое из (23). Эти смещения будут одинаковыми, если  $F_1 \neq F_2$ . Если  $F_1 = F_2$ , то (21) и (23) совпадают, что является известным свойством механических колебательных систем, называемым эффектом взаимного влияния [6].

Для определения статических реакций на промежуточных массах можно воспользоваться приемом, который заключается в том, чтобы умножить смещение на промежуточной массе на соответствующее значение приведенной жесткости. Так, например, при  $F_1 \neq 0$  ( $F_2 = 0$ ) статическая реакция на  $m_2$  определится

$$R_{m_2} = \frac{k_2 F_1}{k_3(k_1 + k_2) + k_1 k_2} \cdot (k_3 + \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}) = \frac{k_2 F_1 [k_3(k_1 + k_2) + k_1 k_2]}{[k_3(k_1 + k_2) + k_1 k_2](k_1 + k_2)} = \frac{k_2}{k_1 + k_2} F_1. \quad (34)$$

В свою очередь, при  $F_2 \neq 0$  ( $F_1 = 0$ ) реакция на промежуточной массе определится как

$$R_{m_1} = \frac{k_2 F_2}{(k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3)} \cdot (k_1 + \frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3}) = \frac{k_2 F_2}{k_2 + k_3}. \quad (35)$$

Таким образом, если рассматривается система с двумя степенями свободы, в которой действуют постоянные силы  $F_1$  и  $F_2$ , то в такой системе могут быть определены статические реакции. Эти реакции отражают распределение смещений по координатам  $y_1$  и  $y_2$ , а также соответствующие параметры деформирования упругих элементов и усилия, возникающие в соединениях упругих элементов с твердыми телами и опорными поверхностями. При действии двух сил одновременно для определения реакций может быть использован принцип суперпозиции. Отметим также, что рассматриваются системы с линейными свойствами, а силы тяжести (или веса) в расчет не принимаются. Возможности приложения сил разных направлений могут приводить к появлению эффектов компенсации смещений.

#### IV. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ ПРИ ДЕЙСТВИИ СИЛ ВЕСА СОСТАВЛЯЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Расчетная схема системы с двумя степенями свободы показана на рис. 5, а–г, где силы веса обозначены соответственно  $Q_1 = m_1 g$ ,  $Q_2 = m_2 g$  ( $g = 9,81$  м/сек<sup>2</sup>).

Необходимые для определения статических реакций смещения могут быть найдены также, как и в предыдущих случаях, когда использовались силы  $F_1$  и  $F_2$ . С учетом (26) и (27) запишем

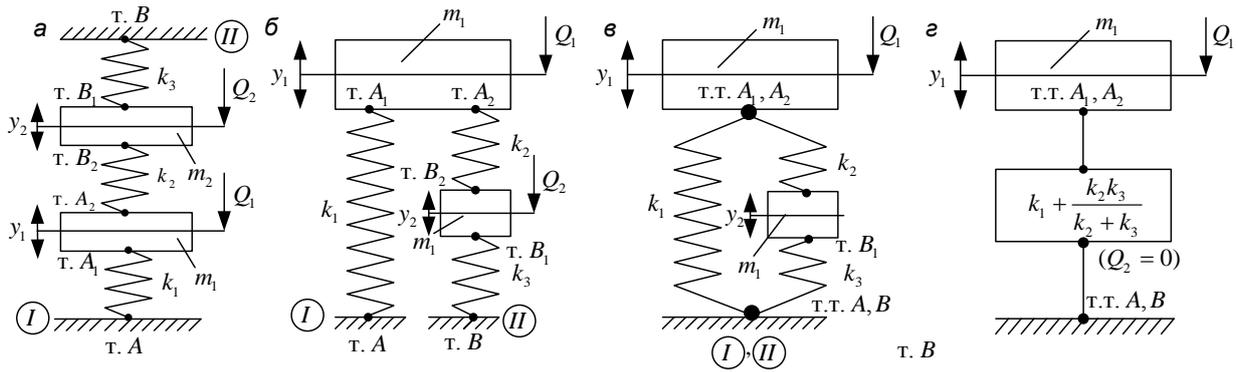
$$y_1 = \frac{m_1 g (k_2 + k_3) + m_2 g k_2}{A_0} = \quad (36)$$

$$= \frac{m_1 g}{A_0} (k_2 + k_3 + \frac{m_2}{m_1} k_2),$$

$$y_2 = \frac{m_1 g k_2 m_2 g + (k_1 + k_2)}{A_0} = \quad (37)$$

$$= \frac{m_1 g}{A_0} (k_2 + \frac{m_2}{m_1} k_2 + \frac{m_2}{m_1} k_1),$$

где  $A_0 = k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3$ .



**Рис. 5.** Принципиальная схема для расчета статических реакций от действия сил веса:  
*a* – расчетная схема с двумя силами веса  $Q_1$  и  $Q_2$ ; *б* – преобразованная схема с разделенными опорными поверхностями; *в* – схема с общей опорной поверхностью; *з* – схема при условии предположения  $Q_2 = 0$

Выражения (36), (37),  $y_1$  и  $y_2$  отражают так называемые статические смещения, определяющие положение статического равновесия системы. При приложении динамических нагрузок, то есть периодических внешних сил, система приходит в движение, и будет колебаться относительно положений статического равновесия, определяемых из (36), (37). При этом предполагается, что внешние периодические возмущения обладают симметрией и не имеют постоянных составляющих. Наличие таких составляющих потребует корректировки положения статического равновесия.

При использовании (36), (37) можно предположить, что в системе положение статического равновесия формируется только силой веса  $Q_1$ , тогда выражение, стоящее в скобках, можно преобразовать путем введения приведенной пружины с жесткостью

$$k_{\text{пр}} = \frac{A_0}{k_2 + k_3 + \frac{m_2}{m_1} k_2} = \frac{k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3}{k_2 + k_3 + \frac{m_2}{m_1} k_2} = \frac{k_1 + \frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3}}{1 + \frac{k_2}{k_2 + k_3} \cdot \frac{m_2}{m_1}}. \quad (38)$$

Отметим, что приведенная жесткость становится зависимой от соотношения масс элементов системы. При  $m_2 = 0$  можно получить,  $k_{\text{пр}} = k_1 + \frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3}$ , что соответствует схеме на рис. 4, *з*. Если  $k_3 = 0$ , то исчезает связь с опор-

ной поверхностью II, тогда  $A_0 = k_1 k_2$ , а (36) и (37) принимают вид

$$y_1 = m_1 g \left( \frac{1}{k_1} + \frac{m_2}{m_1} + \frac{1}{k_1} \right) = \frac{m_1 g}{k_1} \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) = \frac{g(m_1 + m_2)}{k_1}. \quad (39)$$

В этом случае смещение по координате  $y_1$  определяется суммарным весом приходящихся масс  $m_1$  и  $m_2$  на координату  $y_1$ . Все необходимые для определения статических реакций особенности могут быть получены из анализа выражений (36), (37).

### VI. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СТРУКТУРНЫХ ПОДХОДОВ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ СТАТИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ

Используя расчетную схему на рис. 5, *a*, можно построить структурную схему в соответствии с методикой, изложенной в работе [2], и преобразовать в специализированные схемы, связанные с материальными телами  $m_1$  и  $m_2$ .

Будем полагать, что внешние воздействия  $Q_1$  и  $Q_2$  могут рассматриваться и как силы веса, которыми обладают твердые тела  $m_1$  и  $m_2$ , а также, при необходимости, и как внешние воздействия периодического вида (рис. 6, *a–в*).

Математическая модель системы в изображениях переменных по Лапласу ( $p = j\omega$ ,  $j = \sqrt{-1}$  – комплексная переменная) имеет вид

$$\begin{cases} m_1 p^2 \bar{y}_1 + (k_1 + k_2) \bar{y}_1 - k_2 \bar{y}_2 = \bar{Q}_1, & (40) \\ m_2 p^2 \bar{y}_2 + (k_2 + k_3) \bar{y}_2 - k_2 \bar{y}_1 = \bar{Q}_2. & (41) \end{cases}$$

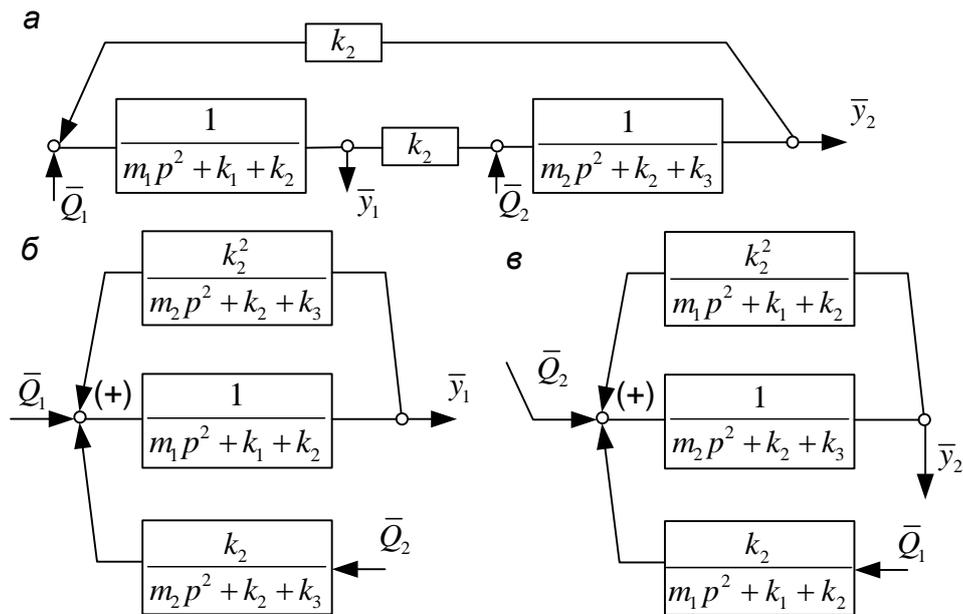


Рис. 6. Структурная схема системы на рис. 5, а (а); схема, приведенная к элементу  $m_1$  (б); схема, приведенная к элементу  $m_2$  (в)

Передаточные функции системы при двух внешних воздействия примут вид:

$$W_1(p)_{\bar{Q}_2=0} = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1} = \frac{m_2 p^2 + k_2 + k_3}{A_0}; \quad (42)$$

$$W_2(p)_{\bar{Q}_2=0} = \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1} = \frac{k_2}{A_0}; \quad (43)$$

$$W_1'(p)_{\bar{Q}_1=0} = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_2} = \frac{k_2}{A_0'}; \quad (44)$$

$$W_2'(p)_{\bar{Q}_1=0} = \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_2} = \frac{m_1 p^2 + k_1 + k_2}{A_0'}, \quad (45)$$

где  $A_0'$  – характеристическое уравнение системы [2]:

$$A_0' = (m_1 p^2 + k_1 + k_2)(m_2 p^2 + k_2 + k_3) - k_2^2. \quad (46)$$

Выражению (46) можно придать вид:

$$A_0' = m_1 m_2 p^4 + p^2 [m_1 (k_2 + k_3) + m_2 (k_1 + k_2)] + k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3, \quad (47)$$

откуда следует, что при  $p = 0$   $A_0' = A_0$ .

Приведенные структурные схемы (рис. 6, а–в) и передаточные функции (42)–(45) отражают особенности линейной механической колебательной системы при гармонических внешних воздействиях (с учетом того, что начальные условия динамического состояния имеют нулевые значения). Однако приведенные структурные схемы и передаточные функции содержат вполне определенную информацию, которая может быть использована для определения статических реакций, как это было показано в предыдущих разделах исследования. Так, напри-

мер, при  $p = 0$  из (42) следует, что  $\frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1} = \frac{k_2 + k_3}{A_0}$ ;

из (43) следует, что  $\frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1} = \frac{k_2}{A_0}$ ; из (44) –

$\frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_2} = \frac{k_2}{A_0}$ ; из (45) –  $\frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_2} = \frac{k_1 + k_2}{A_0}$ , что позволяет

получить выражения для смещений по координатам  $y_1$  и  $y_2$  (в предположении, что  $Q_1$  и  $Q_2$  в данном случае соответствуют силами тяжести твердых тел)

$$\bar{y}_1 = \frac{(k_2 + k_3)Q_1 + k_2 Q_2}{A_0}, \quad (48)$$

$$\bar{y}_2 = \frac{(k_1 + k_2)Q_2 + k_2 Q_1}{A_0}, \quad (49)$$

Это совпадает с выражениями (36) и (37).

Таким образом, структурная схема на рис. 6, а, а также выражения для передаточных функций (42)–(45) позволяют определить параметры статического равновесия системы, вызванных действием сил тяжести. Что касается статических реакций в характерных точках, то они могут быть найдены аналогичным вышеизложенным способом. Однако необходимая информация может быть получена из соответствующим образом преобразованных структурных схем, приведенных на рис. 6, б и в.

Если опорные поверхности на рис. 5, а разделены, то, используя структурную схему на рис. 6, б, можно ввести некоторую детализацию в построение структурной схемы, как это показано на рис. 7.

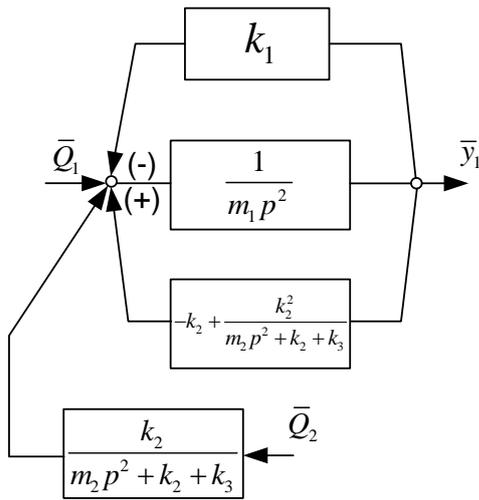


Рис. 7. Детализированная структурная схема для определения статических реакций, связанных с элементом  $m_1$

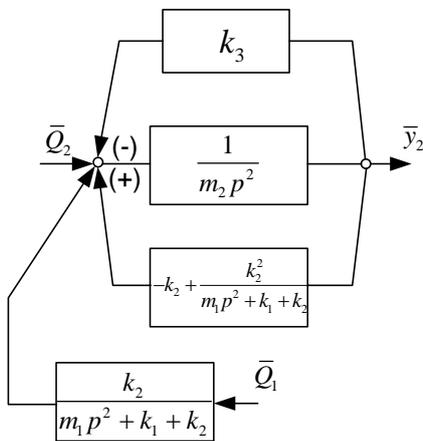


Рис. 8. Детализированная структурная схема (рис. 6, в) для определения статических реакций

Как было показано ранее, при взаимодействии с опорной поверхностью  $I$  (точка  $A$ ) статическая реакция от действия силы тяжести (в данном случае)  $Q_1$  определится  $R'_A = k_1 y_1$ , чему соответствует обратная отрицательная связь с передаточной функцией  $k_1$  (Рис. 7). Физический смысл такой обратной связи заключается в том, что она соответствует величине жесткости пружины между элементами  $m_1$  и опорной поверхностью  $I$  (рис. 5, а при  $Q_2 = 0$ ). Что касается силы  $Q_2$  (рис. 7), то она формирует  $R''_A = k_1 y_1 = k_1 W_1(p) Q_2$  (при  $Q_1 = 0$ , как это показано на рис. 7), что при  $p = 0$  дает  $R''_A = k_1 \cdot \frac{k_2}{k_2 + k_3} \cdot \frac{k_2 + k_3}{A_0} = \frac{k_1 k_2}{A_0} Q_2$ . Окончательно получим (используя принцип суперпозиции, имеется два входа  $Q_1$  и  $Q_2$ ):

$$R_A = \frac{k_1(k_2 + k_3)Q_1}{A_0} + \frac{Q_2 k_1 k_2}{A_0}, \quad (50)$$

что соответствует выражениям (30) и (36).

Аналогичным образом может быть использована структурная схема на рис. 8, которая детализирована путем раскрытия цепей обратных связей.

Для определения статической реакции, которая возникает между упругим элементом  $k_3$  и опорной поверхностью  $II$  (рис. 6, а) для случая отдельных опорных поверхностей, запишем (отдельно компоненты при  $Q_1 \neq 0, Q_2 = 0$ , а  $Q_1 = 0, Q_2 \neq 0$ , используя принцип суперпозиции):

$$R_B = k_3 y_2 + \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} y_2,$$

$$R_B = \frac{k_3(k_1 + k_2)Q_2}{A_0} + \frac{Q_1 k_2 k_3}{A_0}, \quad (51)$$

что совпадает выражениям (31) и (37).

Таким образом, статические реакции могут определяться несколькими способами при получении совпадающих результатов.

Важным обстоятельством является то, что статические реакции в необходимых точках механической систем могут определяться на основе использования структурных схем эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления, как это делается в структурной теории виброзащитных систем [1–3]. Отметим, что использование структурных подходов связано с определенными условиями, так как структурные схемы в обычном понимании используются при периодических сигналах и используются в частотном анализе. Однако необходимые для определения статических реакций соотношения между упругими элементами и правила преобразования структурных схем сохраняются при  $p = 0$ . В принципе, в этом случае нет принципиальных противоречий, поскольку в преобразованиях Лапласа линейные дифференциальные уравнения движения при гармонических воздействиях преобразуются в алгебраические, а принцип кинестатики при равенстве нулю сил инерции трансформируется в уравнение статики.

Отметим также, что при рассмотрении задач статики и статических реакций, вызванных силами веса или специальными постоянными силами, формирующимися специальными устройствами, используемые передаточные функции представляют собой отношения выходных сигналов в виде смещений при входных сигналах в виде постоянных сил. Разработанный метод, может быть распространен и на системы, в которых массоинерционные элементы могут быть

представлены не материальными точками, а твердыми телами.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Определение статических реакций в механических колебательных системах имеет особое значение при детализированном рассмотрении особенностей взаимодействия элементов системы между собой и между элементами и опорными поверхностями. В тех случаях, когда связи между элементами и с опорной поверхностью не являются двухсторонними, то знание статической реакции, которая является частью полной реакции, состоящей в свою очередь из суммы статической и динамической реакций, позволяет определить не только контактные усилия (реакции), но и условия возможного возникновения зазоров.

2. Предлагается метод определения статических реакций, удобный для последующих определений динамических составляющих реакций. Основная идея метода заключается в том, что уравнения равновесия или статики рассматриваются как часть уравнений кинестатики в предположении об отсутствии сил инерции. Такой подход позволяет использовать структурные методы исследования, в рамках которых механическая колебательная система рассматривается как эквивалентная в динамическом отношении система автоматического управления. При определении статических реакций предлагается использование передаточных функций, в которых комплексная переменная при получении соответствующих выражений принимается равной нулю.

3. Система действий, связанных построением структурных схем, выделением соответствующих связей и цепей, образованных соединениями элементов, а также последующее получение передаточных функций и их преобразования составляют алгоритмическую основу метода определения статических реакций.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Коловский М. З.** Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976. 320 с. [M. Z. Kolovskii, *Automation control of vibroprotection systems*, (in Russian). Moscow: Nauka, 1976. ]
2. **Елисеев С. В., Резник Ю. Н., Хоменко А. П.** Мехатронные подходы в динамике механических колебательных систем. Новосибирск.: Наука, 2011. 394 с. [S. V. Eliseev, Yu. N. Reznik, and A. P. Khomenko, *Mechatronics approaches in dynamics of mechanical oscillation systems*, (in Russian). Novosibirsk: Nauka, 2011. ]
3. **Хоменко А. П., Елисеев С. В., Ермошенко Ю. В.** Системный анализ и математическое моделирование в мехатронике виброзащитных систем. Иркутск: ИргУПС, 2012.

274 с. [A. P. Khomenko, S. V. Eliseev, and Yu. V. Ermoshenko, *System analysis and mathematical modeling in mechatronics of vibroprotection systems*, (in Russian). Irkutsk: IrGUPS, 2012. ]

4. **Белокобыльский С. В., Елисеев С. В.** Обобщенные представления о задачах вибрационной защиты // Системы. Методы. Технологии. 2013. № 1. С. 7–15. [S. V. Belokobilskii and S. V. Eliseev, "Generalized notions of tasks of vibration protection," (in Russian), *Systems. Methods. Technologies*, no. 1, pp. 7-15, 2013. ]

5. **Вибрации** в технике: справочник в 6 т. Т. 6. Защита от вибраций и ударов / Под ред. К. В. Фролова. М.: Машиностроение, 1983. 586 с. [ *Vibrations in technics: handbook in 6 v.*, vol. 6, (in Russian), Edited by K. V. Frolov. Moscow: Mashinostroenie, 1983. ]

6. **Бабакон И. М.** Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 650 с. [I. M. Babakov, *Theory of oscillations*, (in Russian). Moscow: Nauka, 1968. ]

### ОБ АВТОРАХ

**ЕЛИСЕЕВ Сергей Викторович**, дир. науч.-образоват. центра совр. технол., сист. анализа и моделир. ИргУПС. Дипл. инж.-мех. (ИрПИ, 1963). Д-р техн. наук (Ин-т механики АН УССР, 1973), проф. Иссл. в обл. мехатроники, виброзащиты, роботехники.

**БОЛЬШАКОВ Роман Сергеевич**, асп. науч.-образоват. центра совр. технол., сист. анализа и моделир. ИргУПС. Дипл. инж. ж/д тр-та (ИргУПС, 2010).

**ЕЛИСЕЕВ Андрей Владимирович**, асп. науч.-образоват. центра совр. технол., сист. анализа и моделир. ИргУПС. М-р математики (1998. Новосибирский государственный университет. Направление "прикладная математика и информатика").

**ПАРШУТА Евгений Александрович**, соискатель науч.-образоват. центра совр. технол., сист. анализа и моделир. ИргУПС. Дипл. инж. ж/д тр-та (ИргУПС, 2003).

### METADATA

**Title:** Features of statical and dynamical weighting in mechanical oscillation systems. Tasks of vibration protection

**Authors:** S. V. Eliseev, R. S. Bolshakov, A. V. Eliseev, E. A. Parshuta.

**Affiliation:** Irkutsk State Transport University (IrGUPS), Russia.

**Email:** eliseev\_s@inbox.ru.

**Language:** Russian.

**Source:** Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 18, no. 1 (62), pp. 37-47, 2014. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

**Abstract:** Methodological base for solution of tasks of identification position statical balance and appropriate responses in connections of system elements between themselves and base surface is offered. Algorithmical basis of responses estimation at different forms of acting external forces is developed. Features of formation of statical balance at several masses were considered. Is shown that statical balance is depend on external forces structure and on elastic compact structure. Such a elastic elements complex is formed in supposition of «nulling» of intermediate masses at certain points of forces application. Defini-

tions about displacement of system points at absence of straight application of external force. Is shown that estimation statical responses task in system with elastic elements can be solved on base dynamical approaches when elastic mechanical system is compared structural scheme of equivalent in dynamical relation of structural scheme of automation control system. Is supposed that in Laplas transformations complex variable which reflects external force action, is assumed equal zero. This situation follows from preliminary getting of kinetostatics equation on base of Dalamber principle with consequent conversion to statics equations at  $p \rightarrow 0$ . Proof of possibility of using of transfer functions apparatus for decision of statics tasks is feature of offering approach. Recommendations and appropriate analytical correlations are got which is allows to introduce in consideration features of formation of statical responses in systems with several degrees of freedom at action of several statical forces.

**Key words:** balance in systems with elastic elements; statical responses between system elements; statical responses in several support; statical balance at gravity action.

#### About authors:

**ELISEEV, Sergei Victorovich**, chief of science educational center of modern technologies, system analysis and modelling, IrGUPS. Dip. of ing. – mech. (IrPI, 1963), Doctor of science (Institute of mechanics AN USSR, 1973), prof. Mechatronics, vibroprotection, robototechnics.

**BOLSHAKOV, Roman Sergeevich**, Post-graduate student of IrGUPS. Dip. ing. railway transport (IrGUPS, 2010).

**ELISEEV, Andrei Vladimirovich**, Post-graduate student of IrGUPS. Master of mathematics (1998, NSU. Applied mathematics and informatics)

**PARSHUTA, Evgenii Aleksandrovich**, applicant of IrGUPS. Dip. ing. railway transport (IrGUPS, 2003).