

УДК 519.633.6

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ДВУХФАЗНОЙ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ РАПОПОРТА–ЛИСА

К. О. АЛЕКСЕЕВА<sup>1</sup>, А. В. АКСАКОВ<sup>2</sup>

<sup>1</sup>csusha-aleks@yandex.ru, <sup>2</sup>AksakovAV@ufanipi.ru

<sup>1</sup>ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

<sup>2</sup>ОАО «РН-Уфанипинефть»

Поступила в редакцию 04.12.2013

**Аннотация.** Рассматривается математическая модель двухфазной неизотермической фильтрации. Приведены результаты моделирования некоторых задач двухфазной фильтрации методом конечных элементов. Проведена проверка адекватности численной реализации одномерных задач неизотермической фильтрации их аналитическим решениям. Также приведены примеры расчетов некоторых задач двумерной двухфазной неизотермической фильтрации.

**Ключевые слова:** двухфазная неизотермическая фильтрация; метод конечных элементов; FreeFEM++.

### ВВЕДЕНИЕ

Движение природных жидкостей (нефти, газа и подземных вод) через поры и трещины горных пород называется фильтрацией. Это движение может быть следствием как естественных процессов, так и вмешательства человека, связанного с процессом нефтегазодобычи [1].

По прогнозам аналитиков, в связи с истощением запасов традиционной нефти, преобладающий объем добычи в будущем будет приходиться на трудноизвлекаемые запасы (высоковязкие нефти, природные битумы). Одной из альтернатив стандартным методам добычи при разработке месторождений высоковязких нефтей является метод теплового воздействия на пласт [2]. Поэтому растет потребность в изучении неизотермических процессов фильтрации пластовых флюидов, сопровождающих тепловые способы добычи. В связи с этим актуальным направлением исследования является моделирование задач неизотермической фильтрации жидкостей.

В работах [1–5] авторами рассматривались вопросы многофазной фильтрации флюидов, среди которых работы [2, 5] посвящены неизотермической фильтрации.

В рамках данной статьи приведены результаты работы программного модуля двухфазной неизотермической фильтрации, разработанного на базе пакета конечных элементов FreeFEM++ [6].

### ДВУХФАЗНАЯ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ

Рассмотрим модель двухфазной неизотермической фильтрации пластовых флюидов. Введем следующие предположения:

- существуют две отдельные фазы: вода и нефть, которые не смешиваются, не обмениваются массами и не меняют фазы;
- жидкости и породы несжимаемы;
- гравитационные эффекты и источники члены отсутствуют;
- температура пласта постоянно меняется. Перенос тепла в пластовых условиях происходит в результате движения жидких фаз и теплопроводности;
- вязкость нефти зависит от температуры.

Система уравнений неизотермической фильтрации имеет вид [1–3]:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \\ \Phi \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (f(S, T) \vec{u}) = \\ = -\vec{\nabla} \cdot \left( \lambda_o(S, T) f(S, T) \frac{dP_c(S)}{dS} \vec{\nabla} S \right), \\ \frac{\partial(c_* T)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (c_i \vec{u} T) = \vec{\nabla} \cdot (\chi \vec{\nabla} T), \\ \vec{u} = -(\lambda_o(S, T) + \lambda_w(S)) \vec{\nabla} p_w - \\ - \lambda_o(S, T) \vec{\nabla} P_c. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $S$  – водонасыщенность;  $(1 - S)$  – нефтенасыщенность;  $\vec{u}$  – суммарная скорость фильтрации флюидов;  $T$  – температура;  $\phi$  – пористость;  $p_w$  – давление воды;  $P_c = p_o - p_w$  – капиллярное давление;  $p_o$  – давление пористости;  $\lambda_w(S) = \frac{k k_{rw}(S)}{\mu_w}$  – подвижность воды;  $\lambda_o(S, T) = \frac{k k_{ro}(S)}{\mu_o(T)}$  – подвижность нефти;  $k$  – абсолютная проницаемость породы;  $k_{rw}, k_{ro}$  – относительные фазовые проницаемости породы;  $\mu_w$  – вязкость воды;  $\mu_o(T)$  – вязкость нефти;  $f(S, T) = \frac{\lambda_w(S)}{\lambda_w(S) + \lambda_o(S, T)}$  – функция Баклея–Левретта;  $c_l = c_w S + c_o(1 - S)$  – объемная удельная теплоемкость пластовой смеси;  $c_* = \phi c_l + (1 - \phi) c_r$  – средняя объемная удельная теплоемкость пласта;  $c_o, c_w, c_r$  – объемные удельные теплоемкости нефти, воды и породы;  $\chi$  – коэффициент теплопроводности пластового флюида.

Данная модель рассматривается при условии, что  $c_w = c_o, c_l = c_w = c_o$  и  $\chi = \text{const}$ .

Уравнение на насыщенность из системы (1) при отсутствии гравитационных эффектов известно в литературе как уравнение Рапорпорта–Лиса [1].

### АПРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЙ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Пусть область, в которой ищется решение, разбита на конечное число треугольников  $\Omega_n$ . С каждой вершиной треугольников  $A_i$  свяжем некоторую функцию  $\varphi_i$ , которая линейна (или квадратична) во всех элементах, и  $\varphi_i(A_j) = \delta_{ij}$ . Эта функция отлична от нуля только в тех треугольниках, одной из вершин которых является точка  $A_i$ .

Будем искать решение для некоторой величины в виде

$$u = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x, y),$$

где  $N$  – число вершин.

Интегральное уравнение, соответствующее уравнению Лапласа, имеет вид

$$\int_{\Omega} -\vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} u) v \, d\Omega = 0.$$

При помощи формулы Грина–Гаусса получим

$$\int_{\Omega} k \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega - \int_{\Gamma} k \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma = 0.$$

Функции  $u$  и  $v$  имеют вид:  $u = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i, v = \varphi_j$ . Используя данное представление, получим аппроксимацию уравнения Лапласа

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N u_i \int_{\Omega} k \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) d\Omega = \\ = \int_{\Gamma} k \frac{\partial u}{\partial n} \varphi_j \, d\Gamma, \quad j = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Аппроксимация уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{w} \cdot \vec{\nabla} u = 0$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N u_i^{k+1} \int_{\Omega} \varphi_i^{k+1} \varphi_j \, d\Omega = \\ = dt \sum_{i=1}^N u_i^k \int_{\Omega} \varphi_i^k \varphi_j \, d\Omega - \\ - dt \sum_{i=1}^N u_i^k \int_{\Omega} w(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \varphi_j + \\ + w_y \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \varphi_j \, d\Omega, \end{aligned}$$

где  $u^k = \sum_{i=1}^N u_i^k \varphi_i^k, v = \varphi_j$ .

Аппроксимация уравнения адвекции-диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{w} \cdot \vec{\nabla} u = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} u)$$

имеет вид

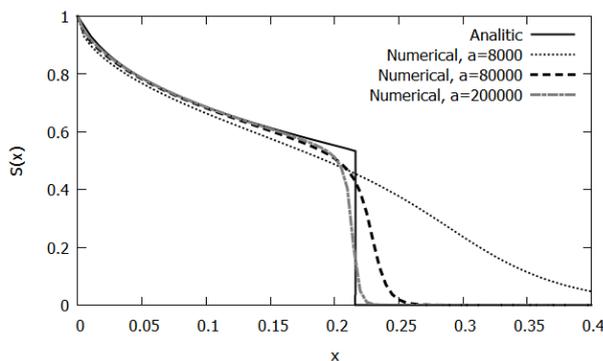
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N u_i^{k+1} \int_{\Omega} \varphi_i^{k+1} \varphi_j \, d\Omega = \\ = dt \sum_{i=1}^N u_i^k \int_{\Omega} \varphi_i^k \varphi_j \, d\Omega - \\ - dt \sum_{i=1}^N u_i^k \int_{\Omega} w(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \varphi_j + \\ + w_y \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \varphi_j \, d\Omega - \\ - \sum_{i=1}^N u_i \int_{\Omega} k \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) d\Omega + \\ + \int_{\Gamma} k \frac{\partial u}{\partial n} \varphi_j \, d\Gamma, \end{aligned}$$

где  $u^k = \sum_{i=1}^N u_i^k \varphi_i^k, v = \varphi_j$ .

### ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА ИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ВЫТЕСНЕНИЯ

Для задачи изотермического вытеснения система (1) переходит к виду:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \\ \phi \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (f(S)\vec{u}) = \\ = -\vec{\nabla} \cdot \left( \lambda_o(S) f(S) \frac{dP_c(S)}{dS} \vec{\nabla} S \right), \\ \vec{u} = -(\lambda_o(S) + \lambda_w(S)) \vec{\nabla} p_w - \\ - \lambda_o(S) \vec{\nabla} P_c. \end{cases} \quad (2)$$



**Рис. 1.** Распределение водонасыщенности в одномерном пласте при изотермическом вытеснении

Классические относительные фазовые проницаемости и функция Баклея–Левретта имеют вид:

$$\begin{aligned} k_{rw}(S) &= S^2, \quad k_{ro}(S) = (1 - S)^2, \\ f(S) &= \frac{S^2}{S^2 + \frac{\mu_w}{\mu_o} (1 - S)^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Рассмотрим частный случай модели капиллярного давления ванн Генухтена:

$$P_c(S) = \frac{1}{a} (S - 1)^2. \quad (4)$$

Система уравнений (2) рассматривается с начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} S(x, 0) &= \begin{cases} S_1, & x = 0, \\ S_0, & 0 < x \leq L, \end{cases} \\ \begin{cases} S(0, t) = S_1, \\ S(L, t) = S_0, \end{cases} & 0 < t \leq t_{\text{end}}, \\ p(x, 0) &= \begin{cases} p_1, & x = 0, \\ p_0, & 0 < x \leq L, \end{cases} \\ \begin{cases} p(0, t) = p_1, \\ p(L, t) = p_0, \end{cases} & 0 < t \leq t_{\text{end}}. \end{aligned} \quad (5)$$

При малом значении капиллярного давления численное решение уравнения Рапопорта–Лиса

можно сравнить с аналитическим решением задачи Баклея–Левретта [1]:

$$\begin{aligned} x(S, t) &= \begin{cases} \frac{1}{\phi} u f'(S) t, & S \geq S_c, \\ \frac{1}{\phi} u f'(S_c) t, & S < S_c, \end{cases} \\ S_c &= \sqrt{\frac{\mu_w}{\mu_w + \mu_o}}, \end{aligned}$$

где  $u$  – суммарная скорость фильтрации,  $S_c$  – фронтальная водонасыщенность.

Численные расчеты проводились для линейных и квадратичных конечных элементов. При использовании линейных конечных элементов возникали осцилляции, поэтому для дальнейших расчетов были выбраны квадратичные конечные элементы.

На рис. 1 приведены результаты численного расчета при трех различных коэффициентах для капиллярного давления  $a = 8 \cdot 10^3$ ;  $8 \cdot 10^4$ ;  $2 \cdot 10^5$ . Необходимо отметить, что при уменьшении параметра  $a$  (т. е. при уменьшении влияния капиллярных сил) численное решение уравнения Рапопорта–Лиса стремится к аналитическому решению уравнения Баклея–Левретта.

### ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ВЫТЕСНЕНИЯ

Рассмотрим одномерную задачу (1) неизо-термического вытеснения в однородном линейном теплоизолированном пласте. К условиям (5) на водонасыщенность и давление добавляются условия на температуру:

$$\begin{aligned} T(x, 0) &= \begin{cases} T_w, & x = 0, \\ T_o, & 0 < x \leq L, \end{cases} \\ \begin{cases} T(0, T) = T_w, \\ T(L, T) = T_o, \end{cases} & 0 < t \leq t_{\text{end}}. \end{aligned} \quad (6)$$

При малых значениях капиллярного давления численное решение одномерной задачи неизо-термического вытеснения можно сравнить с аналитическим решением данной задачи в отсутствие капиллярного давления, построение которого описано в работе [2].

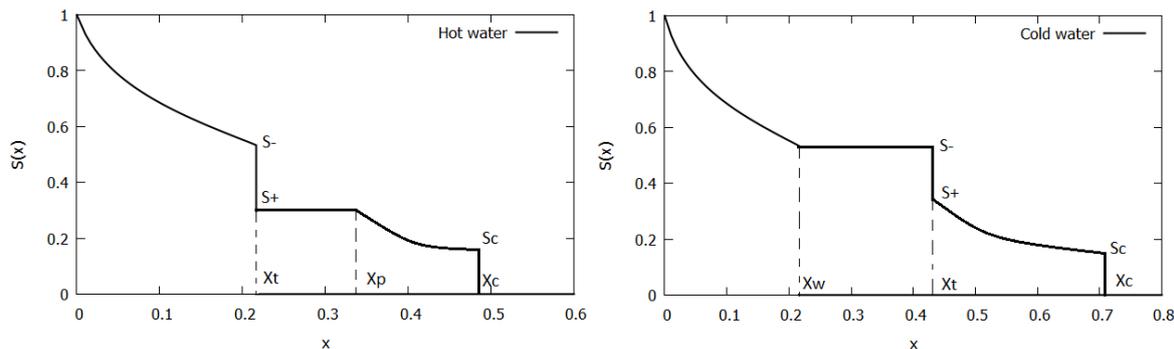


Рис. 2. Аналитическое решение задачи горячего (слева) и холодного (справа) заводнения пласта

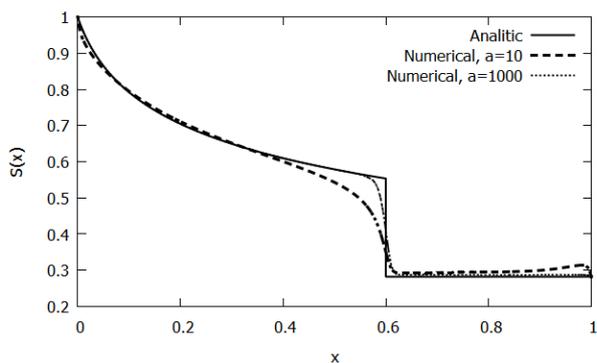


Рис. 3. Распределение водонасыщенности в одномерном пласте при горячем заводнении

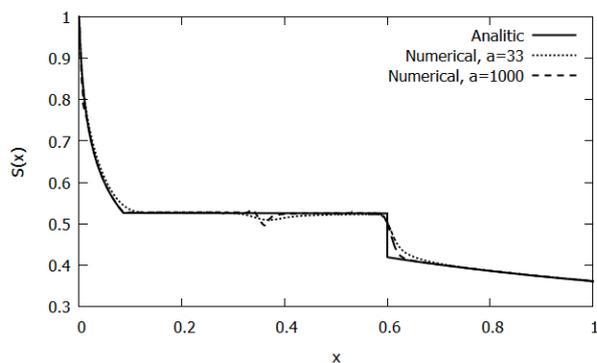


Рис. 4. Распределение водонасыщенности в одномерном пласте при холодном заводнении

На рис. 2 представлено аналитическое решение неизо термической задачи в отсутствие капиллярного давления. Стоит отметить, что при закачке горячей или холодной воды помимо скачка насыщенности  $S_c$  возникает второй разрыв насыщенности в точке расположения температурного фронта  $x_t$ .

В описанных далее численных экспериментах будет проводиться сравнение численного и аналитического решения для области в зоне температурного фронта. Будем полагать, что скачок фронтальной насыщенности располагается вне области расчета, т. е.  $x_c > L$ .

На рис. 3 приведены результаты численного расчета задачи о закачке горячей воды в нефтяной пласт при коэффициентах для капиллярного давления  $a = 10; 1000$ . Можно отметить, что как и в изотермическом случае, с увеличением действия сил капиллярного давления мы получаем более размытое решение.

Аналогичные расчеты были проведены и для задачи о закачке холодной воды при коэффициентах для капиллярного давления  $a = 33; 1000$ . Результаты данных расчетов приведены на рис. 4.

Можно увидеть, что в середине расчетной области есть небольшой скачок насыщенности, который, по всей видимости, является особенностью численной схемы. При увеличении времени расчета данный скачок становится меньше.

#### ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ВЫТЕСНЕНИЯ

Пусть дана прямоугольная область длины  $L$  ширины  $H$ . Пусть в начальный момент времени на контуре питания пласта расположена полукруглая зона, полностью заполненная водой, давление равно некоторому пластовому  $p_0$ , а температура равна  $T_0$ . На контуре питания всегда поддерживается водонасыщенность  $S = 1$ , температура равна  $T_w$ , давление равно некоторой величине  $p_1$ .

Тогда начальные и граничные условия для задачи (1) имеют вид:

$$p(x, y, 0) = p_0, \\ S(x, y, 0) = \begin{cases} S_1, & x \leq \sqrt{\frac{H^2}{16} - \left(y - \frac{H}{2}\right)^2}, \\ S_0, & x > \sqrt{\frac{H^2}{16} - \left(y - \frac{H}{2}\right)^2}, \end{cases} \quad (7)$$

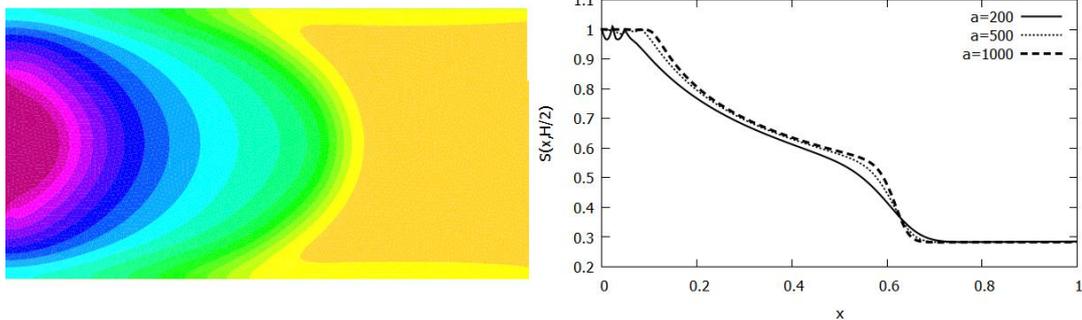


Рис. 5. Поле водонасыщенности (слева) и ее распределение в центральном сечении (справа)

$$T(x, y, 0) = \begin{cases} T_w, & x \leq \sqrt{\frac{H^2}{16} - \left(y - \frac{H}{2}\right)^2}, \\ T_o, & x > \sqrt{\frac{H^2}{16} - \left(y - \frac{H}{2}\right)^2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} p(0, y, t) = p_1, & \frac{H}{4} \leq y \leq \frac{3H}{4}, \\ p(L, y, t) = p_0, & 0 < y < H, \\ p(x, 0, t) = p(x, H, t), & 0 < x < L, \end{cases}$$

$$\begin{cases} S(0, y, t) = S_1, & \frac{H}{4} \leq y \leq \frac{3H}{4}, \\ S(L, y, t) = S_*, & 0 < y < H, \\ S(x, 0, t) = S(x, H, t), & 0 < x < L, \end{cases}$$

$$\begin{cases} T(0, y, t) = T_w, & \frac{H}{4} \leq y \leq \frac{3H}{4}, \\ T(L, y, t) = T_o, & 0 < y < H, \\ T(x, 0, t) = T(x, H, t), & 0 < x < L. \end{cases}$$

Здесь  $S_*$  – значение решения в точках  $(L, y)$ .

Расчеты данной задачи проводились на адаптивной сетке. Данный прием был использован для устранения осцилляций, возникающих в связи с особенностями разбиения двумерной области на конечные элементы. Механизм адаптации, реализованный в пакете FreeFEM++, основан на измельчении сетки в участках с высоким градиентом величины, по которой проводится адаптация [7].

На рис. 5 представлено распределение водонасыщенности по прямоугольному пласту и ее зависимость от координаты  $x$  в центральном сечении при различных параметрах капиллярного давления.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье представлены результаты разработки программного модуля двухфазной неизоэтермической фильтрации. Численные решения некоторых фильтрационных задач, полу-

ченные с помощью данного модуля, совпадают с аналитическими решениями и качественно соответствуют моделируемому процессу.

В результате исследования работы модуля можно сделать вывод, что повышение порядка конечных элементов и использование адаптивных сеток в двумерных задачах позволяет улучшить точность расчета и сократить время работы программы.

Таким образом, можно сделать заключение, что данный модуль применим для моделирования процесса двухфазной неизоэтермической фильтрации, и может стать основой для моделирования более сложных фильтрационных процессов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Басниев К. С., Дмитриев Н. М., Каневская Р. Д., Максимов В. М.** Подземная гидромеханика. М., Ижевск: Ин-т компьютер. исследований, 2006. 488 с. [K. S. Basniev, N. M. Dmitriev, R. D. Kanevskaya, and V. M. Maksimov, *Underground Fluid*, (in Russian). Moscow-Izhevsk: Institute of Computer Studies, 2006. ]
2. **Алишаев М. Г., Розенберг М. Д., Теслюк Е. В.** Неизоэтермическая фильтрация при разработке нефтяных месторождений / Под ред. Г. Г. Вахитова. М.: Недра, 1985. 271 с. [M. G. Alishaev, M. D. Rosenberg, and E. V. Teslyuk, *Nonisothermic filtration with oil development*, (in Russian), ed. G. G. Vakhitova. Moscow: Nedra, 1985. ]
3. **Азиз Х., Сеттари Э.** Математическое моделирование пластовых систем. М., Ижевск: Ин-т компьютер. исследований, 2004. 416 с. [K. Aziz, A. Settari, *Petroleum Reservoir Simulation*, (in Russian). Moscow-Izhevsk: Institute of Computer Studies, 2004. ]
4. **Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.** Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с. [G. I. Barenblatt, V. M. Entov, and V. M. Ryzhik, *The non-stationary fluids and gas filtration theory*, (in Russian). Moscow: Nedra, 1972. ]
5. **Бурже Ж., Сурко П., Комбарну М.** Термические методы повышения нефтеотдачи пластов / Пер. с фр. М.: Недра, 1989. 422 с. [J. Burget, P. Surco, M. Kombarnu, *Thermal EOR methods*, (in Russian). Moscow: Nedra, 1989. ]
6. **Hecht F.** FreeFem++. Third Edition, Version 3.19. Laboratoire Jacques-Louis Lions, Universit'e Pierre et Marie

Curie, Paris, 2012 [Электронный ресурс]. URL: <http://www.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf> (Дата обращения 11.04.2013). [ F. Hecht, *FreeFem++*. Third Edition, Version 3.19. Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 2012 [Online]. Available: <http://www.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf> ]

7. Hecht F. A few snags in mesh adaptation loops. Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Paris [Электронный ресурс]. URL: <http://www.imr.sandia.gov/papers/imr14/hecht.pdf> (Дата обращения 11.04.2013). [ F. Hecht, *A few snags in mesh adaptation loops*. Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Paris [Online]. Available: <http://www.imr.sandia.gov/papers/imr14/hecht.pdf>. ]

#### ОБ АВТОРАХ

**АЛЕКСЕЕВА Ксения Олеговна**, студ. каф. высокопроизводитель. выч. технологий и систем.

**АКСАКОВ Алексей Владимирович**, гл. спец. отдела разработки. Дипл. физик (Ижевск, 1998). Канд. физ.-мат. наук по мат. моделированию, числ. методам и комплексам программ (Пермь, 2005). Иссл. в обл. многофазной фильтрации и ее применения в нефтепромысловой практике.

#### METADATA

**Title:** Two-phase nonisothermic filtration modeling based on Rapoport–Lis equation.

**Authors:** K. O. Alekseeva<sup>1</sup>, A. V. Aksakov<sup>2</sup>.

**Affiliation:**

<sup>1</sup> Ufa State Aviation Technical University (UGATU), Russia.

<sup>2</sup> JSC Rosneft-UfaNIPIneft, Russia.

**Email:** <sup>1</sup>csusha-aleks@yandex.ru, <sup>2</sup>AksakovAV@ufanipi.ru.

**Language:** Russian.

**Source:** Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 18, no. 1 (62), pp. 174-179, 2014. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

**Abstract:** Mathematical model of two-phase nonisothermic filtration is considered. Simulation results for some two-phase nonisothermic filtration models by finite element method are presented. The adequacy of the numerical realization is tested by comparing the simulation results to the analytic solution of one-dimensional problems. The examples of two-dimensional two-phase nonisothermic filtration problems simulations are also presented.

**Key words:** two-phase nonisothermic filtration; finite element method; FreeFEM++.

**About authors:**

**ALEKSEEVA, Ksenya Olegovna**, Postgrad. (PhD) Student, Dept. of High-performance computing technologies and systems (USATU).

**AKSAKOV, Aleksey Vladimirovich**, Chief Specialist of JSC Rosneft-UfaNIPIneft. Dipl. Physicist (Izhevsk, 1998). Cand. Ph.-Math. Sci. (Perm, 2005).