

УДК 621.35, 004.02

ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЕСУРСОВ Л. В. КАНТОРОВИЧА В ЗАДАЧАХ РАСКРОЯ-УПАКОВКИ: ОБЗОР И ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ

Ю. И. Валиахметова¹, А. С. Филиппова²

¹julikas@inbox.ru, ²annamuh@mail.ru

¹ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный аграрный университет» (БГАУ)

²ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы» (БГПУ)

Поступила в редакцию 04.02.2014

Аннотация. Приводятся примеры постановок задач раскроя–упаковки, актуальность которых подтверждается их разнообразием и многогранностью прикладного значения. Основополагающими для развития методов решения подобных задач явились работы Л. В. Канторовича. Приведен обзор методов решения классических задач раскроя–упаковки, разработанных советскими и российскими учеными за последние 80 лет, в том числе и научными школами СССР и России. Даны краткие описания методов и история их развития.

Ключевые слова: раскрой; упаковка; рациональное использование ресурсов; оптимизация; точные методы; эвристические методы, алгоритмы

*Посвящается 100-летию со дня рождения
нобелевского лауреата Л. В. Канторовича*

решения задач рационального использования ресурсов актуальны и по сей день.

ВВЕДЕНИЕ

Вклад, сделанный замечательным и талантливым ученым Леонидом Витальевичем Канторовичем в различные области математики и экономики, имел огромное значение в развитии решения прикладных производственных задач. Кроме того, его концепция оптимальной экономической модели на макроэкономическом уровне и сегодня обладает огромным потенциалом. И в речи шведского профессора Рагнара Бенцеля, которую в 1975 г. он произнес, представляя лауреатов Нобелевской премии по экономике Л. В. Канторовича и Т. Купманса, отмечено всеобщее значение концепции для любой экономики, независимо от ее социально-политической формы: «Поскольку запас производственных ресурсов всюду ограничен, каждое общество сталкивается с кругом вопросов, касающихся оптимального использования имеющихся ресурсов и справедливого распределения доходов между гражданами. Точка зрения, с которой могут рассматриваться подобные нормативные вопросы, не зависит от политической организации рассматриваемого общества» [1]. Поэтому исследование и разработка методов

1. БАЗОВЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЕСУРСОВ

Основополагающую роль в становлении и развитии теории оптимального использования ресурсов и линейного программирования сыграла опубликованная профессором Л. В. Канторовичем в 1939 г. брошюра [2], где рассматривались различные практические задачи организации производства, в которых требовалось найти наилучший вариант решения. Книга была написана после консультации сотрудников Фарнерного треста по вопросам решения задач, которые не удавалось решить традиционными в то время методами. Л. В. Канторович предложил метод разрешающих множителей (индексов), который устанавливает принципиальную возможность нахождения наилучшего решения для многих задач народного хозяйства, в том числе и для задачи массового раскроя. Несмотря на огромный круг научных интересов, в последующие годы Л. В. Канторович неоднократно возвращался к проблеме рационального раскроя, например [3].

В 30-х гг. прошлого века были заложены основы теории раскроя пиловочного сырья, основоположником которой стал Х. Л. Фельдман [4]. Он предложил математический подход для

решения задачи о максимальных поставках при распиловке бревен. Вместе со своими последователями он создал систему, ориентированную на максимизацию объемного и качественного выхода обрезных пиломатериалов. Точная математическая схема решения не в полной мере учитывала реальные условия, такие как качественные характеристики сырья и пилопродукции, поэтому результаты на практике могли быть и неверными. Позднее В. А. Залгаллером разработан графический метод составления максимальных поставок, основанный на геометрическом признаке экстремума. Предложенный В. А. Залгаллером метод позволил приблизить теорию максимальных поставок к условиям производства [5].

Разработанная и усовершенствованная теория, однако, и в настоящее время не может дать ответа на многие проблемы технологии лесопиления, в связи с чем актуально ее дальнейшее совершенствование. Среди основных причин этого явления: технический прогресс, изменения размерно-качественной характеристики поступающего в раскрой пиловочного сырья и его породного состава, ужесточение требований экологов, изменение действующих стандартов на сырье и пиленую продукцию.

2. МНОГООБРАЗИЕ ЗАДАЧ РАСКРОЯ И УПАКОВКИ

Задачи раскроя представляют собой важную технологическую проблему, оптимальное решение которых позволяет минимизировать расход имеющихся ресурсов. Это такие задачи, как:

- раскрой линейного материала;
- продольная резка лент и рулонов;
- раскрой листов на прямоугольные заготовки;
- использование материалов смешанной длины;
- раскрой для серийных и несерийных изделий;
- упаковка трехмерных контейнеров;
- раскрой фигурных заготовок;
- размещение кругов;
- геометрическое покрытие областей с препятствиями элементами различной формы;
- задача о выборе наилучших размеров материала для последующего раскроя;
- упаковка/покрытие элементами случайных размеров, и многие другие.

Подобные задачи встречаются на практике в машиностроении, металлургии, деревообраба-

тывающей и швейной промышленности, целлюлозно-бумажной индустрии и др.

Многие задачи, на первый взгляд не относящиеся к классу задач раскроя и упаковки, в конечном итоге сводятся к ним. Например, задачи о составлении расписания, задачи маршрутизации, задачи декомпозиции многосвязных ортогональных полигонов, а также многие другие прикладные задачи.

Если ценность раскраиваемого ресурса высока, на практике рассматривают также и остаточные задачи: производится попытка использовать отходы материала, получившиеся при решении предыдущих задач раскроя, упаковки или геометрического покрытия.

Задачи раскроя, упаковки или покрытия могут возникать как промежуточное звено в других задачах или же чередоваться в рамках одной задачи. Например, можно рассмотреть логистическую задачу, где каждому транспортному средству сопоставляется маршрут следования по потребителям и набор соответствующих этим потребителям грузов. Тогда поиск маршрута следования каждого транспортного средства, а также нахождение плана размещения грузов в грузовом отсеке являются задачами класса раскроя-упаковки. Дополнительно при размещении грузов можно учесть порядок следования транспортного средства – так, чтобы грузы, предназначенные последнему клиенту, загружались первыми [6].

Каждая из предметных областей вносит свои дополнительные требования в способ решения задач, и, следовательно, в способ адаптации известных алгоритмов.

В данной статье приведен краткий обзор методов решения классических задач раскроя-упаковки, разработанных советскими и российскими учеными за последние 80 лет. Под задачами раскроя-упаковки (Cutting and Packing, C&P) понимается широкий класс проблем, допускающих различное прикладное толкование. К ним можно отнести следующие задачи:

- раскрой запаса материала (при раскрое на определенные заготовки минимизация исходного материала);
- плотное размещение геометрических объектов в заданной области (размещение грузов, товаров на складе и т.п.);
- загрузка рюкзака (выбор множества элементов с максимальной суммарной ценностью, объем которых не превосходит объема рюкзака);
- упаковка контейнеров (размещение предметов в ограниченную область);

- загрузка транспорта (размещение товаров в транспортном средстве с учетом технологичности);
- выбор ассортимента (выбор при заказе одного размера из стандартных);
- планировка помещений (максимизация полезных областей при планировании с учетом технологичных требований);
- обеспечение ритмичности производственного процесса (задачи о составлении расписания, составление расписания многопроцессорных систем);
- распределение производственных мощностей (распределение памяти вычислительной машины);
- задача о поставе в лесопилении (расположение пил при пилении бревна на доски разной толщины, выбор числа пил для максимизации выхода);
- раскрой древесного ствола по длине (максимизация продукции при раскрое ствола на круглые сортаменты);
- раскрой досок (раскрой на заготовки, более близкие к окончательной продукции; обойти пороки и максимизировать суммарную кубатуру или суммарную коммерческую цену);
- раскрой листового материала на случайные заготовки (раскрой материала с учетом опережения–запаздывания производства заготовок);
- максимальное (минимальное) геометрическое покрытие (расстановка минимального количества единиц оборудования на заданной области) и др.

В свою очередь каждая из них может быть различным образом конкретизирована.

Общим для задач этого класса является наличие двух групп объектов. Между элементами этих групп устанавливается и оценивается соответствие. Различаются задачи линейного (одномерного), прямоугольного (двухмерного) и параллелепипедного (трехмерного) раскроя-упаковки. Среди этих задач выделяются гильотинный раскрой и упаковка. Особо выделены проблемы нестинга – размещения деталей сложной геометрической формы в заданных областях. Для них на первый план выступают информационные проблемы задания фигур, учета и обеспечения их непересечения, кодировки и др. Перечень геометрических свойств заготовок и материала может дополняться и учитываться в математической модели некоторыми физическими и/или экономическими показателями. Подробная классификация основных моделей задач C&P в России приведена в [7].

В 40-х гг. методы для решения задач раскроя были направлены в первую очередь на задачи массового производства, где можно пренебречь целочисленностью результатов. Предложенный Л. В. Канторовичем способ решения [2] подобных задач позволял найти оптимальный раскрой, однако трудоемкость процесса решения вручную требовала адаптации к производственным условиям и совершенствования вычислительного математического аппарата. Именно этому вопросу в основном и были посвящены научные разработки последователей и соратников Л. В. Канторовича до 50–60-х гг. Далее появилась возможность реализации алгоритмов на ЭВМ. Программы позволяли находить оптимальные планы раскроя мерных линейных материалов и оптимальных планов раскроя прямоугольных листов на прямоугольные заготовки. Начиная с 70-х гг. особое внимание исследователей этой области было направлено на решение задач единичного и мелкосерийного производства.

Впервые детально вопросы раскроя были проработаны Л. В. Канторовичем совместно с В. А. Залгаллером в Ленинградском отделении Математического института АН СССР в 40-х гг. [8]. Практическая проверка успешности разработанных ими математических способов решения проведена на Ленинградском вагоностроительном заводе в 1948–1949 гг. Ввиду технологических требований и трудоемкости вычисления метода разрешающих множителей была проведена большая работа по развитию и адаптации математического аппарата к производственной действительности того времени за счет введения новых расчетных и технологичных приемов. Так, В. А. Залгаллер разработал способ подбора целочисленных индексов, предложил решение плоской задачи с помощью вспомогательной линейной задачи, приемы раскроя материала смешанной длины и различные технические приспособления. Все разработанные и практически апробированные методы того периода, методика их использования были описаны в книге «Рациональный раскрой промышленных материалов», изданной в начале 1951 г. [8]. Задачи раскроя рассматривались авторами как примеры применения линейного программирования (Linear Programming, LP). При решении задач раскроя применяется модель LP с неявно заданной информацией о раскроях (столбцах матрицы). Фактически эта книга была отчетом об удачном практическом внедрении в 1948–1949 гг. линейного программирования для решения промышленных задач. Первые зарубежные же публикации, посвященные LP, отно-

сятся к 1949 г. Основные расчеты, приведенные в книге [8], были выполнены вручную. Для преодоления трудностей, связанных с построением допустимых карт раскроя, авторами были предложены приемы, которые, по существу, предвосхитили идеи динамического программирования.

Для решения задачи генерирования раскроя были разработаны основанные на динамическом программировании методы для задачи линейного раскроя [9], для гильотинного раскроя – сеточный метод генерирования раскроев с максимальной оценкой [10], считающие полную таблицу индексов. И. В. Романовский предложил метод склейки [11], ограничивающийся состояниями, соответствующими скачкам. Позднее Э. А. Мухачева разработала условные методы генерирования раскроев на каждом шаге процесса линейного программирования, учитывающие специфику реального производства [12]. В то время основной целью этих и многих других работ являлось применение линейного программирования в сфере производственных задач. Эта цель в той или иной мере была достигнута в условиях массового и серийного производства.

3. ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ СОВЕТСКИХ НАУЧНЫХ ШКОЛ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ЗАДАЧ РАСКРОЯ-УПАКОВКИ

Несомненно, развитие и широкое применение это направление получило с появлением ЭВМ: например, первая программная реализация на ЭВМ метода шкалы индексов [9]. В [13] приведен способ и программа для рационального решения массовой линейной задачи, затрачивающий приемлемое время для расчета. Расчет рациональных карт раскроя прямоугольных листов в 60-е гг. для большого числа заготовок (более 60) практически не представлялся возможным. А примеры меньшей размерности требовали многих часов работы программ на ЭВМ [10].

Так, применение ЭВМ для решения и исследования задачи массового раскроя в начале 60-х гг. прошлого века стало первым шагом для зарождения уфимской научной школы под руководством Э. А. Мухачевой. Элита Александровна Мухачева в 1962 г. поступила в аспирантуру Новосибирского академического городка института математики СО АН СССР в отдел к создателю теории линейного программирования Леониду Витальевичу Канторовичу и получила задание разработать программу для массового раскроя материала, результат описан в [10].

Приоритет Л. В. Канторовича в этой области уже был признан в мире, он заведовал математико-экономическим отделом. Сотрудник отдела, ученик и соратник Л. В. Канторовича, доктор физико-математических наук Г. Ш. Рубинштейн стал научным руководителем Элиты Александровны. В начале 1967 г. она защитила диссертацию «Численные методы решения некоторых классов задач линейного программирования» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук¹. С тех пор в Уфимском государственном авиационном техническом университете ведутся активные исследования в данной области.

Для задач штучного производства, являющихся по своей сути проблемами дискретной оптимизации, решение с помощью LP – это упрощение, позволяющее получить результат, близкий к оптимальному, при дополнительных ограничениях, возникающих в условиях серийного и массового производства. В дальнейшем задачи С&Р рассматривались уже без этого упрощения, как прикладные проблемы комбинаторных задач исследования операций. Задачи С&Р являются типичными представителями NP-трудных проблем. Ввиду неполиномиальной сложности точных алгоритмов для задач С&Р авторами многих работ и по сей день уделяется значительное внимание приближенным методам, а при разработке точных алгоритмов – процедурам сокращения полного перебора и вычислению нижних границ.

При решении задач С&Р необходимо минимизировать используемый материал (количест-

¹ В 1983 г. Э. А. Мухачева (1930–2011) защищает докторскую диссертацию «Прикладные задачи комбинаторной оптимизации, в частности, задача раскроя и упаковки» и становится первой женщиной-доктором наук УАИ (Уфимского авиационного института). Работая над диссертацией, она консультировалась у Л. В. Канторовича, В. А. Залгаллера и в Новосибирском академическом городке. Из 59 лет работы в Уфимском авиационном университете (УАИ, УГАТУ) 34 года заведовала кафедрами. Научная значимость трудов Э. А. Мухачевой и ее учеников колоссальна. Студенты, аспиранты, ученые нашей страны изучали математическое программирование, математические методы исследования операций, теорию и методы расчета в задачах раскроя-упаковки по учебникам, монографиям и статьям, автором которых является Э. А. Мухачева. Многие из ее последователей по сей день продолжают разработки в России и за рубежом. Результаты многочисленных работ внедрены, например, на Кировском заводе (г. Ленинград), при производстве тракторов на Ижевском механическом заводе, в Ульяновском авиационном комплексе и др.

во, площадь или объем). При этом оптимальное значение будет больше либо равно нижней границы и меньше либо равно верхней границы.

С помощью границ оценивается решение, полученное тем или иным методом. Верхняя граница, например, полученная приближенно любым эвристическим методом и уточняемая в ходе вычислений, применяется в методе ветвей и границ для сокращения множества просматриваемых узлов дерева решений: отсеиваются узлы, у которых оценка не меньше верхней границы.

При решении задач точными методами использование границ позволяет сократить время работы алгоритма. Так, большее время работы точного алгоритма затрачивается на доказательство оптимальности найденного решения, возможно, полученного уже в начале вычислений. Для этого этапа как раз очень важна нижняя граница, значение которой должно быть максимально близко к оптимуму. Проблема подсчета нижних границ остается основной при разработке эффективных точных методов решения задач С&Р. Особый интерес для вычислений представляют уточняемые нижние оценки, они позволяют либо быстро отсекают «слабые» частичные решения либо просто остановить вычисления по достижении достаточно хорошего результата. В [14, 15] предложен метод построения нижних границ, основанный на линейной релаксации. Показано, что оптимальное значение исходной задачи можно оценить с помощью решения соответствующей задачи линейного раскроя. Предложено уточнение этой нижней границы, использующее метод фиксации определенных переменных.

Традиционными для единичных проблем С&Р являются математические модели целочисленного линейного программирования (ЦЛП). Но надо отметить и другие, например, предложенные в начале XXI в.: матричная модель – представление прямоугольной упаковки двумя бинарными матрицами, характеризующими всевозможные пересечения прямоугольников с сечениями контейнерной области параллельно координатным осям [16]; модель, предложенная В. Н. Марковым, в которой лист материала описывается растровой последовательностью точек [17].

Методы, основанные на ЦЛП, оказались приемлемыми для решения задач линейного (одномерного) и гильотинного раскроя. Что касается классов задач негильотинной упаковки, то алгоритмы ЛР вряд ли можно сейчас считать подходящими для их решения. Пока для этих задач большинство существующих точных ме-

тодов решения сводятся к перебору всего множества допустимых решений. Методы улучшенного перебора объединены и для этих задач под названием «метода ветвей и границ». Еще в 1973 г. И. В. Романовский и Н. П. Христова предложили для решения дискретных минимаксных задач метод дихотомии [18]. Для получения нижней оценки в [19] авторы предложили использовать релаксацию задачи, переходя от множества допустимых решений к некоторому его подмножеству.

В 60-х гг. в г. Харькове под руководством В. Л. Рвачева и Ю. Г. Стояна разрабатываются подходы к решению задач с фигурными заготовками [20]. Для описания фигур, ограниченных контуром из конечного числа отрезков и дуг окружностей, вводятся специального типа R-функции, которые позволяют определить принадлежность точки к фигуре одним неравенством, что позволяет упростить проверку непересечения фигур между собой. Поиск оптимальных размещений осуществляется методом составления большого числа случайных неналегающих положений, каждое из которых затем переводится градиентным методом в локально минимальное положение. Этот подход получил и дальнейшее развитие. Используемые как средство математического и компьютерного моделирования R-функции внесли существенный вклад в формализацию 2D- и 3D-задач С&Р и разработку методов их решения [21].

Следует отметить значительный вклад, внесенный в теорию и практику моделирования размещения геометрических объектов научной школой Ю. Г. Стояна (Украина, Институт проблем машиностроения НАН). В конце 60-х гг. на базе Уфимского авиационного института под руководством Э. А. Мухачевой зарождается еще одна научная школа, в которой активно и по сей день занимаются проблемами С&Р, в том числе и задачами с произвольной формой заготовок [22]. Начиная с 60-х гг. ведутся исследования задач фигурного раскроя в Горьковском университете, в коллективе Л. Б. Беляковой, в Институте технической кибернетики АП БССР, г. Минск. В это же время упрощенными алгоритмами для решения задач фигурного раскроя с применением ЭВМ занимаются на многих производственных предприятиях СССР [23].

Подробнее обзор публикаций до 70-х гг. представлен в дополненном втором (1951 г.) и третьем (2012 г.) [24] изданиях книги [8]. Третье переиздание было подготовлено с участием В. А. Залгаллера.

Далее происходит бурное развитие научных подходов к решению задач С&Р и учету специ-

альных условий, касающихся различных отраслей: металлургии, судостроения, деревообработки, бумажной и швейной промышленности. Например, в Карельском институте лесной промышленности под руководством И. В. Соболева [25], в Петрозаводском государственном университете под руководством В. А. Кузнецова ведется работа, связанная с применением методов оптимизации на промышленных предприятиях Карелии и Северо-Запада России. Здесь развиваются методики решения оптимизационных задач в целлюлозно-бумажной промышленности [26, 27]. Они реализованы в комплексах прикладных программ, направленных на решение проблем, связанных с раскромом и планированием работ в деревообрабатывающей промышленности. Помимо задач, связанных непосредственно с раскромом, рассматриваются технологические проблемы при организации производства: для удобства комплектации необходимо производить одновременно или почти одновременно все детали изделия, выпускаемого в данный момент, а особенности предварительного раскроа ограничивают возможности укладки этих деталей в прямоугольники, что приводит к большим отходам. Это, например, распиловка бревен, раскрой гофрокартона.

В 70-х гг. в Омском государственном университете под руководством А. А. Колоколова [28] также начинаются исследования и разработки алгоритмов решения задач дискретной оптимизации, сводящихся к задачам раскроа-упаковки. Основное внимание этой научной группы уделено задачам линейного целочисленного программирования, прикладным задачам размещения, задачам раскроа, встречающимся в легкой промышленности и швейном производстве. Разработаны и исследованы новые алгоритмы и подходы, основанные на использовании регулярных разбиений релаксационных множеств, L-разбиений. Надо отметить, что решением проблем с автоматизацией процесса раскроа занимаются и по сей день в Омске [29, 30], Новосибирске [31, 32]. Обзор существующих САПР конструкторской и технологической подготовки производства одежды представлен в [33]. Хотя главной задачей этих систем является моделирование индивидуальной и мелкосерийной одежды, а процесс раскроа материала не использует сложных оптимизационных методов расчета. Можно отметить работы А. А. Петунина проводимые в Екатеринбурге с конца 70-х гг., которые направлены на автоматизацию проектирования раскроа листового материала, [34]. Они позволили позже разработать универсальную систему «Сириус» с собствен-

ным графическим интерфейсом, ориентированную на широкий спектр оборудования для резки листовых материалов [35].

4. СОВРЕМЕННОЕ РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАСКРОА-УПАКОВКИ

Новые эффективные точные методы развивались по нескольким направлениям. С одной стороны, совершенствовались инструменты ЦПП: моделирование, методы ветвлений, секущие плоскости. С другой стороны, развивались чисто комбинаторные методы, получившие позже наиболее полное развитие в рамках методов искусственного интеллекта.

Например, в [36] представлен гибридный метод непрерывной оптимизации и переборного алгоритма решения задачи упаковки многоугольников, где в качестве частного случая рассматривается задача упаковки прямоугольников в полосу, разработана стратегия построения множества систем уравнений и набора правил для отсекания бесперспективных вершин дерева решений. Этот метод получил и дальнейшее развитие в конце 90-х гг.

Задача одномерного раскроа с единичными комплектностями является наиболее подходящей для решения комбинаторными методами. Одним из первых был метод ветвей и границ на основе релаксации ЛП с генерацией столбцов. В большинстве вариантов метода ветвление осуществляется по отдельным столбцам. В работе [37] автор для данной задачи применяет дихотомический вариант обобщенного метода решения дискретных минимаксных задач [18]. В нем на каждом этапе ветвление по дереву решений происходит по двум подмножествам, что сокращает перебор допустимых решений. Для задач одномерного раскроа с целочисленными комплектностями — 1D cutting-stock problem (1DCSP) – методы ЦПП являются более эффективными вследствие комбинаторного взрыва. В большинстве из них используется модель 1DCSP с генерацией столбцов, впервые предложенная в работе Л. В. Канторовича и А. А. Залгаллера [8]. Эта модель имеет очень маленький эмпирический разрыв двойственности. Количество переменных модели не ограничено полиномиально от размерности задачи (количества предметов), поэтому довольно трудно оценить количество столбцов, генерируемых при поиске оптимума. На практике задача быстрого нахождения ЛП оптимума, т. е. вопрос ускорения сходимости процесса генерации столбцов, является очень актуальной.

Вопрос об эффективном применении точных комбинаторных методов решения задач раскроя-упаковки большой размерности остается открытым до сих пор. Ведутся исследования для определения отсечений, которые позволяют не рассматривать симметричные варианты правил сокращения перебора. Например, в [14] рассмотрен метод с процедурами доминантности, группировки, определения допустимого резерва, позволяющий сократить перебор.

Математический аппарат, позволяющий вычислить оптимум в негильотинной задаче C&P за конечное число операций впервые предложен в [38], где задача упаковки прямоугольников сформулирована как проблема комбинаторной оптимизации и предложен «метод зон» для нахождения оптимального решения. На основе понятия «зоны» доказывалось, что для любой упаковки прямоугольников можно указать такой их порядок, при котором каждый следующий прямоугольник не пересекается ни с одной из зон предыдущих (топологическая сортировка). Показано, что среди упаковок, построенных на ступенчатых границах, есть оптимальные. Для сокращения числа вариантов предложен ряд отсечений, позволяющих отбрасывать варианты, симметричные уже рассмотренным, или заведомо не лучше других.

Для решения комбинаторных задач из класса NP-трудных с успехом применяются эвристические методы. Среди эвристик высокого уровня выделяются жадные алгоритмы, позволяющие достигать верхние границы [39]. К многопроходным эвристическим методам относится метод последовательного уточнения оценок (Sequential Value Correction, SVC), берущий начало от идеи объективно-обусловленных оценок Л. В. Канторовича [40]. Метод SVC реализуется по модифицированной схеме «первый подходящий с упорядочиванием» с процедурами приоритета и повторения. Упорядочивание элементов основано на экономическом смысле двойственных переменных в линейном программировании. Метод можно назвать общим для решения задач C&P: он применим для задач линейного и гильотинного раскроя, 2D- и 3D-упаковки, а также и для фигурного раскроя [22].

При реализации схем построения решений в комбинаторных задачах используют различные способы представления допустимого решения в виде кода, который с помощью соответствующего правила (декодера) однозначно преобразуется в план упаковки. Способы кодирования и декодирования существенным образом влияют на эффективность получаемых решений. При этом сам декодер является однопроходным ме-

тодом. Простым и популярным декодером является «нижний левый», который однозначно позволяет получить план упаковки по коду в виде последовательности (списка) прямоугольных деталей. В уфимском коллективе разработаны новые блочные декодеры [41], позволяющие представить прямоугольную упаковку в виде линейного раскроя специальной структуры, для которой используются линейные методы решения, за счет чего получают быстрые и эффективные решения. Аналогично представляется и 3D-упаковка.

Если при выбранном способе декодирования повторять решение, несколько изменяя уже использованный код, то значение целевой функции изменится в лучшую или худшую сторону. При многократном повторении можно получить достаточно хорошее решение. На этом принципе в сочетании с комбинацией различных декодеров разработаны технологии конструирования алгоритмов локального поиска для C&P [42, 6].

Таким образом, внесение в детерминированный алгоритм элементов случайности повышает его результативность. Так, например, повысилась эффективность упомянутого выше алгоритма SVC после внесения в него элементов стохастичности. Бурное развитие вероятностных методов локального поиска оптимума началось 20 лет назад с появлением метаэвристик для решения NP-трудных задач. В России обзор вероятностных методов локального поиска оптимума для NP-трудных задач сделан в [43]. В обзоре обсуждаются общие схемы алгоритмов поиска с запретами, имитации отжига, эволюционного и генетических алгоритмов. Показано, что эти разные по своей структуре алгоритмы используют общую математическую конструкцию конечных цепей Маркова, а также доказывалось, что при корректной реализации процедур поиска указанных метаэвристик, когда отсутствует эффект «застывания» в локальном оптимуме, будет наблюдаться сходимость по вероятности наилучшего найденного решения к оптимальному решению задачи.

Первыми среди сложных метаэвристик для задач C&P стали применяться генетические алгоритмы. Возможны различные способы кодирования и приемы идентификации простейших структур (ген, аллели, хромосома). Это порождает различные классы генетических алгоритмов [44, 45]. Генетические алгоритмы успешно разрабатываются и для решения задач фигурного раскроя [46]. Исследуются и используются и другие метаэвристики. Кроме того, в последние

годы активно развивается применение искусственного интеллекта [17, 47].

Изменения в стране, начатые в 80-х гг., позволили российским ученым активно публиковать свои работы за рубежом в изданиях, посвященных исследованиям операций, участвовать в международных конференциях. Сообщество под названием SICUP (Специальная группа по интересам в области раскроя-упаковки) объединяет многих исследователей, заинтересованных в данной проблеме по всему миру. SICUP организует сессии по проблемам C&P в рамках международных конференций. Было принято решение об организации нового сообщества ESICUP (<http://paginas.fe.up.pt/~esicup/tiki-index.php>). И обратная ситуация – участие зарубежных исследователей в российских специальных изданиях [48], совместные исследования, например [15, 21, 49, 50].

В СССР проводились научно-практические семинары и конференции в Ленинграде, Уфе, Звенигороде и других городах. В современный период организуются секции в рамках работы конференций: Математическое программирование и приложения (Екатеринбург, ИММ УРО АН РФ); Дискретный анализ и исследование операций (DAOR, Новосибирск, ИМ СО РАН); Компьютерные науки и информационные технологии (CSIT, Уфа, УГАТУ); Ресурсосберегающие технологии (ОПТИМ, С.-Петербург); Методы оптимизации и их приложения (Байкальская международная конференция по математическому программированию, Иркутск); Дискретная математика и экономические приложения (Омск, филиал ИМ СО РАН) и др.

В последнее десятилетие теоретические аспекты проблемы раскроя-упаковки и геометрического покрытия в виду их NP-сложности остаются актуальными. Основное внимание российских научных исследований методов и задач C&P связаны не только с усовершенствованием эффективности методов их решения, но и с проблемами в которых задачи раскроя и упаковки включены в качестве подзадач. Это накладывает дополнительные условия и ограничения в постановке задач. Например: в лесопромышленности, в легкой промышленности, при проектировании электронных схем, в транспортной и складской логистике, в строительной и судостроительной отраслях и др.

Так, например, в работах [26, 27] исследуются задачи планирования производства гофротары, выбора транспортных средств и размещения продукции, планирования производства пиломатериалов, планирования погрузки водного транспорта, раскроя и комплектовки в модели-

ровании технологических процессов в условиях стохастичности производственного процесса, рассматриваются критерии эффективности подобных задач.

Теоретические предпосылки для создания автоматизированной системы управления раскроем в швейной промышленности описаны в работе [51], исследуется проблема параметрического моделирования сложных трехмерных объектов и его применения. В работе [33] приведен краткий обзор существующих САПР конструкторской и технологической подготовки производства одежды. Одной из первых разработок в области САПР для конструктора швейных изделий явилась белорусская система «АВТОКРОЙ» (г. Минск), функционирующая в 80-е гг. в НПО «Белбыттехника». Первой системой, предназначенной специально для конструирования одежды с помощью персонального компьютера, стала система ЛЕКО, разработки Центрального научно-производственного института швейной промышленности (ЦНИИШП). В настоящее время систему используют небольшие швейные и трикотажные предприятия, а также вузы, ведущие подготовку специалистов в области проектирования швейных изделий. Вслед за ЛЕКО появляется серия САПР: Система АС-СОЛЬ (Центр компьютерных технологий при Московском физико-техническом институте); Система T-FLEX/ОДЕЖДА использует типовые методики конструирования; ГРАЦИЯ и др. Одной из последних разработок стала система ELEANDR-CAD (Научно-технический центр дизайна и технологии при МГУДТ и компания ООО «Элеандр», 2003). В работе [52] авторы исследуют задачу о минимальном покрытии на примере проектирования меховых изделий.

Исследования показали, что задачи, в которых требуется сформировать в определенном смысле оптимальное множество объектов (машин, наборов моделей одежды, приемов, свойств), покрывающее «потребности» другой совокупности (работ, клиентов, заказов, характеристик) при выполнении некоторых условий, обусловленных спецификой задачи, могут быть сведены к задачам о покрытии и различным их модификациям. На основе [30] разработан гибридный алгоритм для решения задач оптимизации выбора объектов в процессе технической подготовки производства, в том числе при определении доминирующих свойств материалов, на примере легкой промышленности. Оригинальный подход к исследованию связи проблем ортогонального раскроя и покрытия на примере задач построения маршрутов, удовлетворяющих определенным ограничениям, приведен Т. Па-

нюковой, [53]. Автором замечено, что в задачах раскроя листового материала плоский граф является моделью раскройного плана, а маршрут, покрывающий все ребра, определяет траекторию режущего инструмента. В работе [53] приведена модификация алгоритма построения покрытия с упорядоченным охватыванием на случай многосвязного графа. Построение покрытия графа с упорядоченным охватыванием решает поставленную задачу раскроя. Наибольший интерес представляют покрытия с минимальным числом цепей, поскольку переход от одной цепи к другой соответствует холостому проходу режущего инструмента.

Пример применения генетических алгоритмов для автоматизации размещения разногабаритных тепловыделяющих элементов в электронных модулях трехмерной компоновки на основе теплового критерия приведен в работе [54].

Решению задачи размещения грузов в грузовых отсеках транспортных средств, возникающей в качестве подзадачи в логистических системах, посвящены многие работы. Например, в [55] решается задача управления загрузкой контейнеров с учетом их физических характеристик, в [56] для этой задачи осуществляется учет условия технологичной загрузки-разгрузки потребительских товаров, т.е. последовательность посещения клиентов при доставке грузов.

В работе [57] предложен алгоритм решения задачи, возникающей, например, в строительной индустрии – задачи геометрического покрытия многосвязного полигона ортогональным ресурсом. Исходной информацией являются размеры покрываемой области и имеющегося ортогонального ресурса, а размеры покрывающих элементов, которые необходимо впоследствии раскроить из ресурса, заранее не определены. Это обуславливает многокритериальную оптимизацию процесса построения взаимосвязанных рациональных планов геометрического покрытия прямоугольными элементами заданных размеров и раскроя ортогонального ресурса на покрывающие элементы.

Технологические особенности раскройного оборудования обуславливают появление задач проектирования управляющих программ для машин листовой резки. В работе [35] автором отмечается важность проблемы стоимости и значимости различных этапов процесса вырезания заготовок из материального ресурса, таких как, например, перемещение режущего инструмента в другое место раскраиваемого листа и новой резки. Таким образом, кроме плотного размещения заготовок на плане раскроя, целевая функция направлена на оптимизацию маршрута

режущего инструмента с учетом стоимости резов, новой врезки.

Значительное внимание уделяется также и теоретическим разработкам проблемы раскроя и упаковки. Например, в работах [58, 59] рассмотрены задачи упаковки гофров (ортогональных связанных многоугольников) с позиций общей теории проблемы оптимального размещения геометрических объектов, предложены алгоритмы упаковки n -мерных гофров на базе методов линейного программирования, а также модели и методы оптимизации упаковки n -мерных параллелепипедов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Многообразие раскройных задач вместе со значимостью их рационального решения обуславливает неугасающий интерес опытных и молодых исследователей всего мира к этой проблематике, с чем связана устойчивая тенденция роста численности новых методик для их решения.

В задачах С&Р замечательным образом сочетается их широкая практическая применимость и их принадлежность к NP-трудным проблемам, что делает эту проблематику важным полигоном новых исследований. Благодаря этому идеи Л. В. Канторовича будут использоваться и развиваться в различных сферах научной и практической деятельности человека, связанной с проблемой раскроя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Канторович Л. В.** Математика, менеджмент, информатика: монография / ред.: Г. А. Леонов, В. С. Каткало, А. В. Бухвалов, СПб.: Высш. шк. менеджмента: Издательский дом Санкт-Петербургского ун-та, 2010. 575 с. [L. V. Kantorovich, *Mathematics, management, informatics: monograph*, (in Russian). Edited by G. A. Leonov, V. S. Katcalo, and A. V. Buhvalov, St.Ptsb.: Management higher school: St. Petersburg University Publishing House, 2010.]
2. **Канторович Л. В.** Математические методы организации и планирования производства. ЛГУ, 1939. 67 с. . [L. V. Kantorovich, *Mathematical Methods of Production Management and Planning*, (in Russian). Leningrad: Leningrad Univ., 1939.]
3. **Канторович Л. В.** Рациональные методы раскроя металла // Произв.-техн. бюл. НК Боеприпасов СССР. 1942. № 7–8. С. 21–29. [L. V. Kantorovich, "Efficient Methods of Metal Cutting," (in Russian), *Product.-techn. bulletin. of NK Ammunition of the USSR*, no. 7-8, pp. 21-29, 1942.]
4. **Фельдман Х. Л.** Система максимальных поставок на распиловку. М.: Гостехиздат, 1932. [H. L. Feldman, *Maximum delivery system for sawing*, (in Russian). Moscow: Gostehizdat, 1932.]
5. **Залгаллер В. А.** Новое в составлении поставок для распиловки бревен. Л.:ЦНИИЛ «Севзаплес», 1956. Вып. 67. [V. A. Zalgaller, *A step forward in delivery formation for timber sawing*, (in Russian). Leningrad: CNIIL "Sevzaples", vol. 67, 1956.]
6. **Валиахметова Ю. И., Мухачева Э. А., Филиппова А. С., Гильманова Н. А., Карипов У. А.** Мультиметодная

технология ортогональной упаковки и ее применение в задачах транспортной логистики // Приложение к журналу «Информационные технологии». 2009. № 12. 31 с. [U. I. Valiahetova, et al., "Multimethod technology of orthogonal bin-packing and its application in transport logistics problems," (in Russian), in Appendix to Magazine *Information technologies*, no. 12, 2009.]

7. **Мухачева Э. А., Мухачева А. С., Валеева А. Ф., Картак В. М.** Методы локального поиска в задачах ортогонального раскроя и упаковки: аналитический обзор и перспективы развития // Информационные технологии. 2004. № 5. Приложение. С. 2–17. [E. A. Mukhacheva, et al., "Local search methods in orthogonal cutting-packing problems: analytical survey and development outlook," (in Russian), in Appendix to magazine *Information Technologies*, no 5, pp. 2-17, 2004.]

8. **Канторович Л. В., Залгаллер В. А.** Расчет рационального раскроя материалов. Лениздат, 1951. 198 с. [L. V. Kantorovich and V. A. Zalgaller, *Computation of effective material cutting*, (in Russian). Lenizdat, 1951.]

9. **Булавский В. А., Яковлева М. А.** О решении задачи оптимального раскроя линейных материалов на ЭВМ // Линейное программирование: Труды Науч. совещ. о применении матем. методов в экон. исслед и планировании. М.: АН СССР, 1961. Т. IV. С. 83–87. [V. A. Bulavski and M. A. Jakovleva, "To solution of problems of linear material cutting on COMPUTER," (in Russian), in *Linear programming. Papers of scientific conference on mathematical method application in econom. research and planning*, vol. IV. Moscow: AS USSR, 1961, pp. 83-87.]

10. **Мухачева Э. А.** Рациональный раскрой прямоугольных листов на прямоугольные заготовки // Оптимальное планирование: сб. науч. тр. СО АН СССР. 1966. Вып. 6. С. 43–115. [E. A. Mukhacheva, "Effective cutting of rectangular sheets to rectangular items," (in Russian), in *Optimal planning: Collection of scientific papers SO AS USSR*, Issue 6, pp. 43-115, 1966.]

11. **Романовский И. В.** Решение задачи гильотинного раскроя методом перестановки списка состояний // Кибернетика. 1969. № 1. С. 102–104. [I. V. Romanovski, "Solution of guillotine cutting problem by the method of sorting out of the state list," (in Russian), *Cybernetics*, no. 1, pp. 102-104, 1969.]

12. **Мухачева Э. А.** Методы условной оптимизации в задаче рационального раскроя листового проката // Оптимизация: сб. науч. тр. СО АН СССР. 1978. Вып. 22. С. 83–93. [E. A. Mukhacheva, "Methods of conditional optimization in the problem of effective cutting of sheet rolling," (in Russian), in *Optimization: Collection of scientific papers SO AS USSR*, 1978, Issue 22, pp.83-93.]

13. **Романовский И. В.** Программа решения задачи линейного раскроя. – Оптимальное планирование. Новосибирск. 1969. Вып.12. [I. V. Romanovski, "Program of solving the linear cutting problem," (in Russian), in *Optimal planning*, Novosibirsk, 1969, Issue 12.]

14. **Картак В. М.** Обновленная нижняя граница для задачи упаковки прямоугольников в полубесконечную полосу // Вестник УГАТУ. 2008. Т. 10, № 2 (27). С. 154–158. [V. M. Kartak, "A new low bound for orthogonal packing problem," (in Russian), *Vestnik UGATU*, vol. 10, no. 2 (27), pp. 154-158, 2008.]

15. **Belov G., Kartak V., Rohling H., Scheithauer G.** One-dimensional relaxations and LP bounds for orthogonal packing // ITOR, 2009. Vol. 16. P. 745–766. [G. Belov, et al. "One-dimensional relaxations and LP bounds for orthogonal packing," *ITOR*, vol. 16, p. 745-766, 2009.]

16. **Картак В. М.** Матричный алгоритм поиска оптимального решения для задачи упаковки прямоугольников в полубесконечную полосу // Информационные технологии. 2008. № 2. С. 24–30. [V. M. Kartak, "Matrix algorithm for searching the optimum solution of rectangular packing in a semi-endless strip," (in Russian), *Information technologies*, no. 2, pp.24-30, 2008.]

17. **Марков В. Н.** База знаний для негильотинного раскроя-упаковки // Информационные технологии. 2007. № 4. С. 17–23. [V. N. Markov, "Basic knowledge for non-guillotine cutting-packing," (in Russian), *Information technologies*, no 4, pp. 17-23, 2007.]

18. **Романовский И. В., Христова Н. П.** Решение дискретных минимаксных задач методом дихотомии // Ж. вычислит. математики и матем. физики. 1973. Т. 13, № 5. С. 1200–1209. [I. V. Romanovski and N. P. Hristova, "Solution of discrete minimax problems by dichotomy method," (in Russian), *J. of calculat. math. and math. Physics*, vol. 13, no. 5, pp. 1200-1209, 1973.]

19. **Стоян Ю. Г., Яковлев С. В.** Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. Киев: Наукова думка, 1986. 268 с. [U. G. Stojan and S. V. Jakovlev, *Mathematical models and optimization methods of geometrical projecting*, (in Russian). Kiev: Naukova dumka. 1986.]

20. **Рвачев В. Л., Стоян Ю. Г.** К задаче об оптимальном размещении круговых выкроек // Кибернетика. 1965. № 4. [V. L. Rvachev and U. G. Stojan, "To the problem of optimal placement of round patterns," (in Russian), *Cybernetics*, no. 4, 1965.]

21. **Stojan Y., Terno J., Romanova T., Scheithauer G.** Construction of a Φ -function for two convex polytopes // Applications Mathematicae. 2002. V. 2, No. 29. P. 199–218. [Y. Stojan, J. Terno, T. Romanova, and G. Scheithauer, "Construction of a Φ -function for two convex polytopes," *Applications Mathematicae*, vol. 2, no. 29, pp. 199-218, 2002.]

22. **Verhoturov M. A., Sergeyeva O. Y.** The sequential value correction method for the two-dimensional irregular cutting stock problem // PO. 2000. Vol. 20, № 2. P. 233–247. [M. A. Verhoturov and O. Y. Sergeyeva, "The sequential value correction method for the two-dimensional irregular cutting stock problem," vol. 20, no. 2, pp. 233-247, 2000.]

23. **Бабаяев Ф. В.** Рациональный раскрой листа на детали сложных геометрических конфигураций // Сварочное произв. 1968. № 8. [F. V. Babaev, "Effective sheet cutting into items of complex geometric configurations," (in Russian), *Welding production*, no. 8, 1968.]

24. **Канторович Л. В., Залгаллер В. А.** Рациональный раскрой промышленных материалов. 3-е изд. СПб: Невский Диалект, 2012. 304 с. [L. V. Kantorovich and V. A. Zalgaller, *Effective cutting of industrial material*, Issue 3, (in Russian). St. Petersburg: Nevskij dialect, 2012.]

25. **Соболев И. В.** Управление производством пиломатериалов. М.: Лесн. пром-сть, 1981. 181 с. [I. V. Sobolev, *Timber production control*, (in Russian). Moscow: Timber prod., 1981.]

26. **Кузнецов В. А., Шегельман И. Р.** Применение математических методов и ПЭВМ на лесоразработках. СПб.: СПбЛТА, 1988. 68 с. [V. A. Kuznetsov and I. R. Shegelman, *Application of mathematical methods and PC in logging areas*, (in Russian). St.Petersbourg: Publishing house St. Ptsb, LTA, 1988.]

27. **Кузнецов В. А.** Задачи раскроя в целлюлозно-бумажной промышленности. СПб.: СПбЛТА, 2000. 132 с. [V. A. Kuznetsov, *Cutting problems in pulp and paper industry*, (in Russian). St. Ptsb: Publishing house St. Ptsb. LTA, 2000.]

28. **Колоколов А. А.** О числе отсекающих плоскостей в первом алгоритме Гомори // Проблемы анализа дискретной информации. Новосибирск: ИЭИОПП СО АН СССР, 1975. С. 84-96. [A. A. Kolokolov, "About the number of cutting-off planes in the first algorithm of Gomory," (in Russian), in *Problems of discrete information analysis*, Novosibirsk: IEIOP SO AS USSR, 1975, pp.84-96.]

29. **Колоколов А. А.** Регулярные разбиения и отсеечения в целочисленном программировании // Сибирский журнал исследования операций. 1994. № 2. С. 18-39. [A. A. Kolokolov, "Regular splitting and cutting off in integr programming," (in Russian), *Siberian journal of operational research*, no. 2, pp. 18-39, 1994.]

30. Колоколов А. А., Коробова А. Б., Захарова Е. О., Привалова Ю.И. Разработка моделей дискретной оптимизации для формирования коллекции подростковой одежды // Омский научный вестник. 2006. № 7 (43). С. 138–140. [A. A. Kolokolov, et al., "Development of discrete optimization models for designing teenagers' clothes," (in Russian), *The Omsk scientific bulletin*, no. 7 (43), pp. 138-140, 2006.]
31. Фроловский В. Д., Фроловский Д. В. Моделирование и развертка сложных поверхностей в AutoCAD R14 // САПР и графика. 1998. № 3. С. 74–75. [V. D. Frolovski and D. V. Frolovski, "Modeling and evolvent of complex surfaces in AutoCAD R14," (in Russian), *SAD and graphics*, no. 3, pp.74-75, 1998.]
32. Ландовский В. В., Пищинская О. В., Фроловский В. Д. Моделирование процесса проектирования одежды на женские фигуры с нарушениями осанки. // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия техн. наук. 2009. № 6. С. 114–118. [V. V. Landovski, O. V. Pischinskaja, and V. D. Frolovski, "Modeling of the process of designing clothes for women's figures of defect posture," (in Russian), *Bulletin of highest schools, North-Caucasus region. Series tech. science*, no. 6, pp. 114-118, 2009.]
33. Коробцева Н. А. САПР одежды: исторический экскурс и обзор существующих систем // Текстильная промышленность. 2003. № 5. С. 61–62; № 6. С. 63–65. [N. A. Korobtsev, "SAD of clothing: historical excursus and present systems review," (in Russian), *Textile industry*, no. 5, pp. 61-62, no. 6, pp. 63-65, 2003.]
34. Петунин А. А. Интегрированная САПР «Сириус» для автоматизации раскройно-заготовительного производства. Концепция. Опыт разработки и внедрения // Ресурсосберегающие технологии: математическое обеспечение оптимизационных задач в системах автоматизированного проектирования: сб. докл. 1-й Всерос. науч.–практ. конф. по вопросам решения оптимизационных задач в промышленности. СПб: ЦНИИТС, 2001. С. 126–129. [A. A. Petunin, "Integrated SAD "Sirius" for automation of cutting–logging production. Concept. Experience of development and implementation," (in Russian), in *Resource-saving technologies: Mathematical ensuring of optimization problems in systems of automat designing: Collection of reports 1st All-Union scientific–practical conference on solution of optimization problems in industry*, St. Ptsb: CRITS, 2001, pp. 126-129.]
35. Петунин А. А. Оптимизация маршрута инструмента для машин резки листового материала // Компьютерные науки и информационные технологии: Междунар. науч. изд.: матер. 13-й междунар. конф. CSIT'2011 (Гармиш-Пантеркирхен, Германия, 27 сент. – 2 окт. 2011). Уфа, 2011. Т. 1. С. 179–182. [A. A. Petunin, "Tool route optimization for structural sheet cutting machines," in Proc. 13th workshop on *Computer Sciences and Information Technologies*, (CSIT'2011) Garmish-Panterkirhen, Germany, 2011, (in Russian), Ufa, 2011, vol. 1, pp. 179-182.]
36. Новожилова М. В. Решение задачи поиска глобального экстремума линейной функции цели на структуре линейных неравенств: препринт. АН УССР, Ин-т проблем машиностр. Харьков, 1988. 48 с. [M. V. Novozhilova, *Solving the problem of global extremum search for linear goal function on the basis of linear inequality structure*, (in Russian). Preprint. AS Ukr.SSR. Institute of engineering industry problems. Kharkov, 1988.]
37. Кацев С. Б. Об одном классе дискретных минимаксных задач // Кибернетика. 1979. № 5. С. 139–141. [S. B. Katsev, "About one class of discrete minimax problems," (in Russian), *Cybernetics*, no. 5, pp. 139-141, 1979.]
38. Липовецкий А. И. К оптимизации свободного размещения прямоугольников // Автоматизация проектирования в машиностроении. 1985. С. 80–87. [A. I. Lipovetski, "To optimization of rectangular free placement," (in Russian), *Automation design in engineering industry*, Minsk, pp. 80-87, 1985.]
39. Аккуратов Г. В., Березнев В. А., Брежнева О. А. О методе решения уравнения с булевыми переменными // Принятие решений в условиях неопределенности: междуз. науч. сб. Уфа: УАИ, 1990. С. 145–154. [G. V. Accuratov, V. A. Bereznev, and O. A. Brezhneva, "About the method of solving equation with Boolean variables," (in Russian), *Making decision under uncertainty conditions*. Interinstitute scientific collection, Ufa: USATU, pp. 145-154, 1990.]
40. Mukhacheva E. A., Zalgaller V. A. Linear programming cutting problems // Int. J. of Software Engineering and Knowledge Engineering. 1993. V. 3, No. 4. P. 463–476. [E. A. Mukhacheva and V. A. Zalgaller, "Linear programming cutting problems," *Int. J. of Software Engineering and Knowledge Engineering*, vol. 3, no. 4, pp. 463-476, 1993.]
41. Мухачева А. С., Валеева А. Ф., Картак В. М. Задачи двумерной упаковки в контейнеры: новые подходы к разработке методов локального поиска оптимума. М.: МАИ, 2004. 193 с. [A. S. Mukhacheva, A. F. Valeeva, and V. M. Kartack, *Problems of 2D packings into containers: new approaches to development of local optimum search methods*, (in Russian). Moscow: MAI, 2004.]
42. Мухачева А. С. Технология блочных структур локального поиска оптимума в задачах прямоугольной упаковки // Информационные технологии. Приложение. 2004. № 5. С. 18–31. [A. S. Mukhacheva, "Technology of block structures for optimumlocal search in rectangular bin-packing problems", (in Russian), in in Appendix to Magazine *Information technologies. Appendix*, no. 5, pp. 18-31, 2004.]
43. Кочетов Ю. А. Вероятностные методы локального поиска для задач дискретной оптимизации // Дискретная математика и ее приложения: сб. лекций молодежи и науч. шк. по дискретной математике и ее приложениям. М.: Изд-во центра прикладных исследований при мех.-матем. ф-те МГУ, 2000. С. 87–117. [U. A. Kochetov, "Probabilistic methods of local search for discrete optimization problems," (in Russian), in *Discrete mathematics and its application. Collection of lectures of student and scientific schools on discrete mathematics and its applications*, Moscow: Publishing house of the applied research center of the mech.-maths depart. MSU, 2000, pp. 87-117.]
44. Норенков И. П. Эвристики и их комбинации в генетических методах дискретной оптимизации. // Информационные технологии. 1999. № 1. С. 2–7. [I. P. Norenkov, "Heuristics and their combinations in discrete optimization genetic methods," (in Russian), in Appendix to Magazine *Information technologies*, no. 1, pp. 2-7, 1999.]
45. Мухачева А. С., Чиглинцев А. В., Смагин М. А., Мухачева Э. А. Задачи двумерной упаковки: развитие генетических алгоритмов на базе смешанных процедур локального поиска оптимального решения // Информационные технологии. Приложение. 2001. № 9. 28 с. [A. S. Mukhacheva, et al., "2D bin–packing problems: development of genetic algorithms based on compound procedures of local search for optimal solution," (in Russian), in Appendix to Magazine *Information technologies*, no. 9, 2001.]
46. Frolovsky V. D., Pushkaryova G. V. Metal cutting motion optimization for NC-programs design, using genetic algorithms. Proc. of the 6th Int. Conf. on Computer Graphics and Artificial Intelligence, Limoges (France), May 14–15, 2003. P. 143–152. [V. D. Frolovsky and G. V. Pushkaryova, "Metal cutting motion optimization for NC-programs design, using genetic algorithms," *Proc. of the 6th Internat. Conf. on Computer Graphics and Artificial Intelligence*, Limoges (France), May 14–15, 2003, pp. 143-152.]
47. Корчевская О. В., Жуков Л. А. Получение нижних границ для задач двух и трехмерной ортогональной упаковки [Электронный ресурс] // Исследовано в России: электронный журнал. 2008. 62. С. 685–694. URL: <http://zhurnal.ape.relarn/articles/2008/062.pdf> [O. V. Korchevskaja, L. A. Zhukov, "Low boundaries procure for 2G and 3D orthogonal bin-packing problems," (in Russian), *Electronic magazine "Investigated in Russia"*, 62, 2008. pp. 685-694, <http://zhurnal.ape.relarn/articles/2008/062.pdf>]]

48. **Mukhacheva E., ed.** Special issue: Decision making under conditions of uncertainty (cutting-packing problems) // The International Scientific Collection. 1997. Ufa, Russia. [E. Mukhacheva, ed. *Special issue: Decision making under conditions of uncertainty (cutting-packing problems)*. The International Scientific Collection, Ufa, Russia, 1997.]

49. **Sergeyeva O., Scheithauer G., Terno J.** The value correction method for packing of irregular shapes // Decision making under conditions of uncertainty (cutting-packing problems): The Int. Sci. Collection. Ufa, 1997. P. 261–270. [O. Sergeyeva, G. Scheithauer, and J. Terno, "The value correction method for packing of irregular shapes," *Decision making under conditions of uncertainty (cutting-packing problems)*. The International Scientific Collection, Ufa, 1997, pp. 261-270.]

50. **Belov G., Kartak V., Rohling H., Scheithauer G.** One-dimensional relaxations and LP bounds for orthogonal packing. *ITOR*, 2009. V. 16. P. 745–766. [G. Belov, et al., "One-dimensional relaxations and LP bounds for orthogonal packing," *ITOR*, vol. 16, pp. 745-766, 2009.]

51. **Фроловский В. Д.** Параметрическое моделирование и идентификация трехмерных объектов со сложной структурой // Информационные системы и технологии: матер. Междунар. науч.-техн. конф., посвящ. 60-летию ОмГТУ, 2003. Т. 1. С. 153–155. [V. D. Frolovski, "Parametric simulation and identification of 3D objects with complicated structure," (in Russian), in *Proc. Int. Sci.-Tech. Conference "Informational Systems and Technologies"*, Novosibirsk, NGTU, 2003, vol. 1, pp. 153-155.]

52. **Колоколов А. А., Нагорная З. Е., Архименко М. Ю., Иванова С. Д.** Проектирование меховых изделий с использованием математического моделирования // Динамика систем, механизмов и машин: матер. IV Междунар. науч.-техн. конф., посвящ. 60-летию ОмГТУ. Кн. 1. Омск: ОмГТУ, 2002. С. 297–299. [A. A. Kolokolov, et al., "Fur goods design using mathematical modeling, Dynamics of systems, mechanisms and machines," (in Russian), in *Proc. 4th Int. Sci.-Tech. Conference to the 60th anniversary of OmGTU*, vol.1, Omsk, 2002, pp. 297-299.]

53. **Панюкова Т. А.** Оптимальные Эйлеровы покрытия с упорядоченным охватыванием для плоских графов // Дискретный анализ и исследование операций. Март–апрель, 2011. Т. 18, № 2. С. 64–74. [T. A. Panukova, "Optimal Euler coverings with ordered union for flat graphs," (in Russian), in *Discrete analysis and operational research*, March–April, vol. 18, no. 2, pp. 64-74, 2011.]

54. **Новикова И. С.** Автоматическое размещение разногабаритных электронных элементов посредством генетического поиска с миграцией // Проектирование и технология электронных средств. 2007. № 1. С. 33–38. [I. S. Novikova, "Automatical allocation of electronic elements of different sizes by genetic search with migration," (in Russian), in *Design and technology of electronic facility*, no. 1, pp. 33-38, 2007.]

55. **Мухачева Э. А., Валеев Р. С.** Локальный поиск размещения товарных позиций на базе анализа их номенклатурной принадлежности // Информационные технологии. 2010. № 6. С. 18–23. [E. A. Mukhacheva and R. S. Valeev, "Local search of Commodity allocation based on their product range," (in Russian), in *Informational Technologies*, no. 6, pp. 18-23, 2010.]

56. **Мухачева Э. А., Бухарбаева Л. Я., Филиппов Д. В., Карипов У. А.** Оптимизационные проблемы транспортной логистики: оперативное размещение контейнеров при транспортировке грузов // Информационные технологии. 2008. № 7. С. 17–22. [E. A. Mukhacheva, et al., "Optimization problems of transportation logistics; containers operational allocation while cargo conveying," (in Russian), *Information Technologies*, no. 7, pp. 17-23, 2008.]

57. **Телицкий С. В., Филиппова А. С.** Комплексный подход к решению задачи покрытия области заготовками неопределенных размеров // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управле-

ние. 2 (145) / 2012, СПб., 2012. С. 61–67. [S. V. Telitskiy and A. S. Filippova, "Complex approach to solving the problem of area covering with items of non-defined sizes," (in Russian), in *Nauchno-tehnicheskiye Vedomosti SPbGPU, Informatics. Telecommunication. Management*, 2(145)/2012, StPsb, pp. 61-67, 2012.]

58. **Васильева Л. И.** Алгоритмы упаковки N -мерных гофров на базе методов линейного программирования: дис. ... канд. техн. наук / УГАТУ, 2000. [L. I. Vasilyeva, "Packing algorithms od N -dimensionv corrugations based on linear programming methods," (in Russian): Dissertation for scientific degree of a Cand. of Tech. Sci, UGATU, 2000.]

59. **Картак В. М.** Модели и методы оптимизации упаковки n -мерных параллелепипедов: дис. ... канд. физ.-мат. наук / УГАТУ, 1999. [V. M. Kartak, "Models and methods of optimization of n -dimensional parallelepiped packing," (in Russian): Dissertation for scientific degree of a Cand. of physics-maths Sci, UGATU, 1999.]

ОБ АВТОРАХ

ВАЛИАХМЕТОВА Юлия Ильясовна, доц. каф. математики. Дипл. инж. (УГАТУ, 2004). Канд. техн. наук по мат. моделир., числ. методам и комплексам программ (УГАТУ, 2008). Иссл. в обл. оптимизац. задач раскроя-упаковки.

ФИЛИППОВА Анна Сергеевна, проф. каф. прикладной информатики. Дипл. инж. (УГАТУ, 1996). Д-р техн. наук мат. моделир., числ. методам и комплексам программ (СГАУ, 2007). Иссл. в обл. комбинаторных алгоритмов.

METADATA

Title: Theory of optimum resource utilization by L. V. Kantorovich in cutting-packing problems: overview and history of development of solving methods

Authors: Yu. I. Valiakhmetova, A. S. Filippova.

Affiliation:

¹ Bashkir State Agrarian University (BSAU), Russia.

² Bashkir State Pedagogical University of M. Akmulla(BSPU), Russia.

Email: julikas@inbox.ru, annamuh@mail.ru.

Language: Russian.

Source: Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 18, no. 1 (62), pp. 186-197, 2014. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

Abstract: The article presents examples of solution techniques for cutting-packing problems, which are still relevant to this day taking into account their diversity and many-sided applicability. The scientific papers by L. V. Kantorovich are considered to be fundamental for the development of these procedures. The article gives an overview of procedures for solving cutting-packing problems that have been developed by Soviet and Russian scientists in the last 80 years, including various scientific schools of the USSR and Russia. Summary of solving procedures and the history of their development are also described.

Key words: cutting, optimum use of resources, optimization, exact methods, heuristic methods.

About authors:

VALIAKHMETOVA, Yuliya Ilyasovna, Associate Prof., Dept. of Mathematics, Dipl. Engineer-programmer (UGATU, 2004). Cand. of Tech. Sci. (UGATU, 2008).

FILIPPOVA, Anna Sergeevna, Prof., Dept. of Applied Informatics. Dipl. Systems Engineer (UGATU, 1996). Cand. of Tech. Sci. (Ufa State Univ., 1999)., Dr. of Tech. Sci. (Samara State Aerospace Univ., 2007).