

УДК 621.391.63

## РЕКУРРЕНТНЫЙ СИНТЕЗ МНОГОСЛОЙНОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СЕЛЕКТИВНОГО ЗЕРКАЛА

А. Х. Султанов<sup>1</sup>, В. Х. Багманов<sup>2</sup>, С. В. Костров<sup>3</sup>

<sup>1,2</sup> tks@ugatu.ac.ru, <sup>2</sup> sergey.kostrov@rambler.ru

<sup>1</sup> ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)  
<sup>2</sup> ООО «ДСА»

Поступила в редакцию 22.12.2013

**Аннотация.** В данной статье представлено решение задачи синтеза многослойного диэлектрического селективного зеркала для ROADM.

**Ключевые слова:** оптический многослойный фильтр; слоистые среды; тонкопленочные структуры; многослойное диэлектрическое селективное зеркало (МДСЗ); перестраиваемое многослойное диэлектрическое селективное зеркало (ПМДСЗ); оптический многослойный фильтр (ОМСФ); оптический переключатель.

### ВВЕДЕНИЕ

Реконфигурируемый оптический элемент, сочетающий в себе одновременно высокую частотную селективность и возможность быстрого переключения, в перспективе открывает дорогу к динамическому ROADM. В частности, узкополосный частотно-селективный переключатель позволит отказаться от использования блока блокиратора спектральных каналов (WB) одной из основных технологий в ROADM, представленных сейчас на рынке оборудования.

В направлении интеграции технологий WDM и WSS в одном элементе уже ведется научно-исследовательская и инженерно-конструкторская деятельность, достигнуты значительные успехи благодаря применению MEMS в сочетании с устройствами WDM. Интеграция большей степени достигается благодаря включению нелинейных компонентов, с возможностью обратимого изменения какого-либо параметра, непосредственно в структуру устройства спектрального уплотнения. Одним из технологически выгодных устройств спектрального уплотнения с готовыми планарными решениями является тонкопленочный фильтр. Основное его преимущество – это компактность продольных размеров и низкое вносимое затухание. Этим объясняется интерес исследователей-связистов к тонкопленочным структурам.

### МЕТОДИКА РАСЧЕТА СЛОИСТЫХ СРЕД

Расчет прошедшей и отраженной волн (рис. 1) можно осуществить суммированием прошедшей и отраженной волн с учетом набега фаз [1].

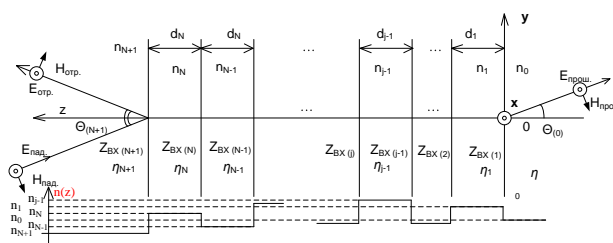


Рис. 1. Многослойная структура

Но этот процесс можно упростить, используя понятие адмиттанса [2]. Так, поле на одной границе слоя удобно выражается через поле на другой его границе с помощью специальной матрицы, которую Абеле [3] назвал характеристической матрицей слоя. Для  $j$ -го слоя с параметрами  $n_j$  и  $d_j$  она имеет вид

$$M_j = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} n_j d_j\right) & -\frac{i}{n_j} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} n_j d_j\right) \\ -i n_j \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} n_j d_j\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} n_j d_j\right) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Поле на левой границе самого правого слоя

$$\begin{pmatrix} E(d_1) \\ H(d_1) \end{pmatrix} = M_1 \begin{pmatrix} E(0) \\ H(0) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Последовательно переходя от слоя к слою и учитывая при этом условие непрерывности на границах раздела, можно связать между собой поле на границе с правым полупространством и поле на границе с левым полупространством.

$$M_{\Sigma} M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot M_N = \begin{pmatrix} m_{\Sigma 11} & m_{\Sigma 12} \\ m_{\Sigma 21} & m_{\Sigma 22} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Простая линейная зависимость между электромагнитными полями на границах слоистой среды позволяет найти амплитудные коэффициенты отражения и пропускания для системы, характеризующейся матрицей  $M_{\Sigma}$ :

$$r = \frac{(m_{\Sigma 11} + m_{\Sigma 12} q_a) q_a - (m_{\Sigma 21} + m_{\Sigma 22} q_a)}{(m_{\Sigma 11} + m_{\Sigma 12} q_a) q_a + (m_{\Sigma 21} + m_{\Sigma 22} q_a)}, \quad (4)$$

$$t = \frac{2q_a}{(m_{\Sigma 11} + m_{\Sigma 12} q_a) q_a + (m_{\Sigma 21} + m_{\Sigma 22} q_a)}.$$

Поле на левой границе самого левого  $N$ -го слоя:

$$\begin{pmatrix} E(\sum_{j=1}^N d_j) \\ H(\sum_{j=1}^N d_j) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} E(0) \\ H(0) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Метод Абеле дает возможность непосредственного пересчета соотношений напряженностей электрического и магнитного полей в понятиях волновых сопротивлений.

Отношение амплитуды электрического поля к амплитуде магнитного поля называется импедансом (волновым сопротивлением) в этой плоскости. В среде, которая поддерживает распространение только одной волны (т. е. где нет отраженной волны), это волновое сопротивление называется характерным импедансом среды и обозначается  $\eta$ . Если  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды и  $\mu$  – ее магнитная проницаемость, то характерный импеданс среды:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}. \quad (6)$$

Если обозначить характеристическое волновое сопротивление вакуума  $\eta_0$ , для немагнитной диэлектрической среды с показателем преломления  $n$ , импеданс равен

$$\eta_j = \frac{\eta_0}{n_j}. \quad (7)$$

Если импеданс в какой-либо плоскости внутри диэлектрика равен  $Z_{(j-1)}$  (так называемое сопротивление нагрузки), то импеданс на рас-

стоянии  $d_j$  перед ней, называемый входным сопротивлением, в зависимости от длины волны  $\lambda$ , определяется выражением [4]:

$$Z_{(j)}(\lambda) = \eta_j \frac{Z_{(j-1)}(\lambda) - i\eta_j \operatorname{tg}(2\pi \cdot n_j d_j / \lambda)}{\eta_j - iZ_{(j-1)}(\lambda) \operatorname{tg}(2\pi \cdot n_j d_j / \lambda)}. \quad (8)$$

Последовательно переходя от слоя к слою и учитывая при этом условие непрерывности на границах раздела, можно связать между собой поле на границе с правым полупространством и поле на границе с левым полупространством.

Причина, по которой понятие импеданса может быть полезным, состоит в том, что коэффициенты отражения и пропускания могут быть выражены в терминах волновых сопротивлений. В частности, коэффициент отражения на границе раздела с сопротивлением нагрузки  $Z_L$  в диэлектрике с характерным импедансом  $\eta$  дается формулой

$$r(\lambda) = \frac{Z_N(\lambda) - \eta_1}{Z_N(\lambda) + \eta_1}. \quad (9)$$

Коэффициент отражения по мощности – доля мощности, прошедшая через него, – определяется как

$$R(\lambda) = |r(\lambda)|^2. \quad (10)$$

Под адмиттансом понимают величину, обратную импедансу. Адмиттанс вводится соотношением:

$$A(\lambda) = \frac{1}{Z(\lambda)}. \quad (11)$$

Адмиттансный метод расчета многослойных структур идентичен импедансному методу.

Опишем математическую модель МДСЗ, представленного на рис. 2.

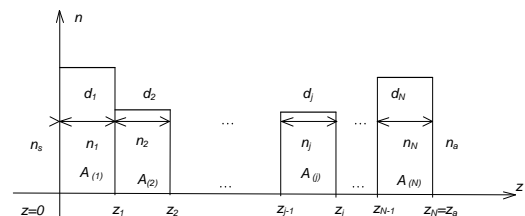


Рис. 2. Модель многослойной структуры

Для однослойной системы входной и выходной адмиттансы связаны следующей формулой:

$$A_j = \frac{i q_j \operatorname{tg} \phi + A_{j-1}}{q_j + i A_{j-1} \operatorname{tg} \phi} q_j, \quad (12)$$

где  $q_j$  – эффективный показатель преломления  $j$ -среды.

Амплитудный коэффициент отражения вычисляется через входной адмиттанс по следующей формуле:

$$r(\lambda) = \frac{q_a - A_j(\lambda)}{q_a + A_j(\lambda)}, \quad (13)$$

где  $q_a$  – эффективный показатель преломления левого полупространства.

Используя соотношения (12)–(13), можно рассчитать спектральные коэффициенты отражения и пропускания для любой системы.

Пусть  $N$  – общее число слоев МДСЗ, тогда согласно соотношению (12) и (13), имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} r_j(\lambda) = \frac{q_a - A_j(\lambda)}{q_a + A_j(\lambda)}, \\ A_j = \frac{iq_j \operatorname{tg} \phi_j + A_{j-1}}{q_j + iA_{j-1} \operatorname{tg} \phi_j} q_j, \end{cases} \quad (14)$$

где  $r_j(\lambda)$  – коэффициент отражения укороченной структуры из  $j$ -слоев;  $A_j(\lambda)$  – адмиттанс структуры из  $j$ -слоев;  $q_j$  – эффективный показатель преломления  $j$ -слоя, считается как

$$q_j = n_j \cdot \cos \theta, \quad (15)$$

где  $n_j$  – показатель преломления  $j$ -слоя;  $\theta$  – угол падения света;  $q_a$  – эффективный показатель преломления правого полупространства;  $\phi_j$  – фазовая толщина  $j$ -слоя, считается как

$$\phi_j = \frac{2\pi}{\lambda} n_j z \cdot \cos \theta; \quad (16)$$

где  $z$  – координата вдоль многослойной структуры;  $\lambda$  – длина волны, на которой ведется рекуррентный счет коэффициента отражения.

Коэффициент отражения укороченной  $j$ -слойной структуры запишем следующим образом:

$$r_{(j-1)}(\lambda) = \frac{q_j - A_{j-1}}{q_j + A_{j-1}}. \quad (17)$$

Из (14) и (17) получим:

$$\begin{cases} r_j(\lambda) = \frac{q_a - \frac{iq_j \operatorname{tg} \phi_j + A_{j-1}}{q_j + iA_{j-1} \operatorname{tg} \phi_j} q_j}{q_a + \frac{iq_j \operatorname{tg} \phi_j + A_{j-1}}{q_j + iA_{j-1} \operatorname{tg} \phi_j} q_j}, \\ r_{(j-1)}(\lambda) = \frac{q_j - A_{j-1}}{q_j + A_{j-1}}. \end{cases} \quad (18)$$

Далее выразим коэффициент отражения  $j$ -слойной структуры через коэффициент отражения укороченной  $j$ -слойной структуры. Получим:

$$r_j(\lambda) = \frac{r_{(j-1)}(\lambda) + \frac{q_a - q_j}{q_a + q_j} \cdot e^{i2\phi_j}}{r_{(j-1)}(\lambda) \cdot \frac{q_a - q_j}{q_a + q_j} + e^{i2\phi_j}}, \quad (19)$$

где  $r_j(\lambda)$  – коэффициент отражения структуры из  $j$  слоев;  $r_{(j-1)}(\lambda)$  – коэффициент отражения укороченной структуры из  $j$ -слоев;  $r_0$  – коэффициент отражения двух полупространств с разными показателями преломления, равен

$$r_{(0)}(\lambda) = \frac{q_1 - q_s}{q_1 + q_s}. \quad (20)$$

Если положим, что создается структура из  $M$ -слоев,  $M > N$ , то  $q_a = q_{(j+1)}$ , и коэффициент отражения  $j$ -слойной структуры будет выражаться через коэффициент отражения укороченной  $j$ -слойной структуры так:

$$r_j(\lambda) = \frac{r_{(j-1)}(\lambda) + \frac{q_{(j+1)} - q_j}{q_{(j+1)} + q_j} \cdot e^{i2\phi_j}}{r_{(j-1)}(\lambda) \cdot \frac{q_{(j+1)} - q_j}{q_{(j+1)} + q_j} + e^{i2\phi_j}}. \quad (21)$$

Указанное соотношение (18) позволяет вести рекуррентный счет непосредственно коэффициента отражения на заданной длине волны, оперируя только показателями преломления и толщинами слоев. Оно показывает, что коэффициент отражения многослойной структуры всегда определяется коэффициентом отражения укороченной структуры и параметрами добавляемого слоя.

#### ЗАВИСИМОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ ОТ ЧИСЛА И ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПРЕЛОМЛЕНИЯ СЛОЕВ

Пусть  $M$  – характеристическая матрица, соответствующая одному периоду структуры (бинарному слою):

$$M(d) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

В этом случае с учетом периодичности среды получим для структуры, содержащей  $N$  бинарных слоев,

$$M_{\Sigma} = \underbrace{M \cdot M \cdot \dots \cdot M}_N = M^N. \quad (23)$$

Для определения элементов матрицы  $M_\Sigma$  воспользуемся результатом, полученным в теории матриц, согласно которому  $N$ -я степень унимодулярной матрицы  $M$  равна:

$$M_\Sigma = \begin{pmatrix} m_{11}U_{N-1}(a) - U_{N-2}(a) & m_{12}U_{N-1}(a) \\ m_{21}U_{N-1}(a) & m_{22}U_{N-1}(a) - U_{N-2}(a) \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где

$$a = \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22}), \quad (25)$$

$U_{N-1}(a)$  – полиномы Чебышева второго рода:

$$U_N(x) = \frac{\sin[(N+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (26)$$

Принимаем

$$\beta_1 = \frac{2\pi}{\lambda} q_1 d_1, \quad \beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda} q_2 d_2, \quad (27)$$

где  $d = d_1 + d_2$  – период системы;  $q_1$  и  $q_2$  – эфф-эффективные показатели преломления слоев.

В этом случае характеристическая матрица одного периода имеет вид

$$M(d) = \begin{pmatrix} M_{11}(d) & M_{12}(d) \\ M_{21}(d) & M_{22}(d) \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} M_{11}(d) &= \cos \beta_2 \cos \beta_1 - \frac{q_1}{q_2} \sin \beta_2 \sin \beta_1, \\ M_{12}(d) &= -\frac{i}{q_1} \cos \beta_2 \sin \beta_1 - \frac{i}{q_2} \sin \beta_2 \cos \beta_1, \\ M_{21}(d) &= -iq_2 \sin \beta_2 \cos \beta_1 - iq_1 \cos \beta_2 \sin \beta_1, \\ M_{22}(d) &= \cos \beta_2 \cos \beta_1 - \frac{q_2}{q_1} \sin \beta_2 \sin \beta_1. \end{aligned} \quad (29)$$

В соответствии с приведенными выше рассуждениями примем, что все слои в структуре четвертьволновые, поэтому

$$\beta_1 = \frac{2\pi}{\lambda} q_1 d_1 = \beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda} q_2 d_2 = \frac{\lambda_0}{\lambda} \frac{\pi}{2} = \beta. \quad (30)$$

Следовательно, в соответствии с (28), характеристическая матрица  $M_\Sigma$  многослойной системы (с полным числом пленок  $2N$ ) определяется следующими формулами:

$$\begin{aligned} M_\Sigma &= \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, \\ M_{11} &= \left( \cos^2 \beta - \frac{q_1}{q_2} \sin^2 \beta \right) U_{N-1}(a) - U_{N-2}(a), \\ M_{12} &= -i \cos \beta \sin \beta \left( \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \right) U_{N-1}(a), \\ M_{21} &= -i \sin \beta \cos \beta (q_2 + q_1) U_{N-1}(a), \\ M_{22} &= \left( \cos^2 \beta - \frac{q_2}{q_1} \sin^2 \beta \right) U_{N-1}(a) - U_{N-2}(a), \\ a &= \cos^2 \beta - \frac{1}{2} \left( \frac{q_2}{q_1} + \frac{q_1}{q_2} \right) \sin^2 \beta. \end{aligned} \quad (31)$$

Видно, что величина  $a$  не может превышать единицу, но для некоторых значений  $q$  она может стать меньше  $-1$ . В этом случае  $\arccos a$  – мнимая величина, а так как для любого  $\chi$ :

$$\sin i\chi = i \operatorname{sh} \chi = i \frac{e^\chi - e^{-\chi}}{2},$$

то, следовательно,  $U_N$  будет вести себя как экспонента. Отсюда следует, что отражательная способность такой многослойной системы быстро увеличивается с ростом числа периодов.

При  $\lambda = \lambda_0$  получаем, согласно (29),  $\beta = \pi/2$ . Тогда характеристическая матрица бинарного слоя, определяемая, примет вид

$$M(d, \lambda_0) = \begin{pmatrix} -\frac{q_1}{q_2} & 0 \\ 0 & -\frac{q_2}{q_1} \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Характеристическая матрица многослойной системы, периодом которой служит такой бинарный слой, а общее количество бинарных слоев равно  $N$ , запишется:

$$M(Nd, \lambda_0) = \begin{pmatrix} \left( -\frac{q_1}{q_2} \right)^N & 0 \\ 0 & \left( -\frac{q_2}{q_1} \right)^N \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Тогда коэффициент отражения такой многослойной системы, согласно (4) и (34), на центральной длине волны будет равен

$$r = \frac{\left( -\frac{q_1}{q_2} \right)^N q_a - \left( -\frac{q_2}{q_1} \right)^N q_s}{\left( -\frac{q_1}{q_2} \right)^N q_a + \left( -\frac{q_2}{q_1} \right)^N q_s} = \frac{1 - \left( -\frac{q_2}{q_1} \right)^{2N} \frac{q_s}{q_a}}{1 + \left( -\frac{q_2}{q_1} \right)^{2N} \frac{q_s}{q_a}}. \quad (35)$$

Введем отражательную способность многослойного фильтра, определяемую

$$R = |r|^2. \quad (36)$$

Если принять, что  $q_a = q_1$ , а  $q_s = q_2$ , то отражательная способность на центральной длине волны в соответствии с (35) и (36) будет определяться выражением

$$R = \left( \frac{1 - \left( -\frac{q_2}{q_1} \right)^{2N+1}}{1 + \left( -\frac{q_2}{q_1} \right)^{2N+1}} \right)^2. \quad (37)$$

Отсюда следует, что для фиксированного числа слоев в количестве  $2N$  отражательная способность увеличивается при увеличении  $q_2/q_1$ , а для фиксированного значения этого отношения отражательная способность увеличивается с ростом бинарных слоев  $N$ .

#### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СЕЛЕКТИВНОГО ЗЕРКАЛА И ПРОБЛЕМЫ В ТЕОРИИ СИНТЕЗА СЛОИСТЫХ СРЕД

Предположим, что требуемой спектральной характеристикой является энергетический коэффициент отражения  $\check{R}(\lambda)$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , где  $\Lambda$  – заданная спектральная область. Пусть число слоев покрытия равно  $N$ , и показатели преломления слоев известны, причем показатели преломления принимают только два значения  $n_L, n_H$ ,  $n_H > n_L$ . Задача синтеза МДСЗ состоит в том, чтобы найти набор толщин слоев  $d_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ), обеспечивающий коэффициент отражения, близкий к требуемому. Введем вектор  $X$  физических толщин слоев:  $X = \{d_1, d_2, \dots, d_N\}$ ,  $X \in E_+^N$  –  $N$ -мерное полупространство положительных чисел. Обозначим  $R(X, \lambda)$  коэффициент отражения покрытия, с вектором толщин  $X$ . В заданной спектральной области  $\lambda$  введем сетку длин волн  $\{\lambda_k\}$ ,  $k = 1, \dots, L$ . Пусть  $\xi$  – точность аппроксимации требуемого коэффициента отражения.

Оценка требуемого коэффициента отражения по взвешенному среднеквадратическому отклонению на сетке длин волн

$$F(X) = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{k=1}^L (R(X, \lambda_k) - \check{R}(\lambda_k))^2}, \quad (38)$$

это задача условной нелинейной оптимизации [5, 6]:

$$F(X) \rightarrow \min, X \in \Omega, \quad (39)$$

где  $\Omega$  – замкнутое ограниченное множество, определяемое технологическими ограничениями. Например,  $\Omega = \{d_{j, \min} < d_j < d_{j, \max}\}$ .

Формальная постановка задачи синтеза МДСЗ сводится к системе:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_x F(X) = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{k=1}^L (R(X, \lambda_k) - \check{R}(\lambda_k))^2} \cdot u(\lambda_k) = \varepsilon(D, N), \\ X = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) \in \{d_{j, \min} < x_j < d_{j, \max}\}, \\ D_{\text{opt}} = \text{Inf}\{D\}, \\ \sum_{j=1}^N x_j = D, \\ \varepsilon(D, N) \leq \varepsilon^*, \\ R(x_j, \lambda_k) = (r_j(x_j, \lambda_k))^2, \\ r_j(x_j, \lambda_k) = \frac{r_{(j-1)}(x_{(j-1)}, \lambda_k) + \frac{n_a - n_j}{n_a + n_j} \cdot e^{i \frac{4\pi}{\lambda_k} n_j x_j}}{r_{(j-1)}(x_{(j-1)}, \lambda_k) \cdot \frac{n_a - n_j}{n_a + n_j} + e^{i \frac{4\pi}{\lambda_k} n_j x_j}}, \\ r_{(0)}(\lambda_k) = \frac{n_a - n_1}{n_a + n_1}, \end{array} \right. \quad (40)$$

где  $X$  – вектор толщин слоев;  $\varepsilon^*$  – заданное СКО целевой функции;  $D$  – длина вектора толщин слоев;  $R(X, \lambda_k)$  – спектральное распределение коэффициента отражения;  $\check{R}(\lambda_k)$  – желаемая функция энергетического коэффициента отражения;  $u(\lambda_k)$  – весовая функция, определяющая «ценность» различных диапазонов, длин волн;  $N$  – количество слоев многослойной структуры;  $n_j$  – показатель преломления слоя  $j$ ;  $r_j(x_j, \lambda_k)$  – коэффициент отражения структуры из  $j$  слоев;  $r_{(j-1)}(x_{(j-1)}, \lambda_k)$  – коэффициент отражения укороченной структуры из  $(j-1)$ -слоев;  $n_j$  – показатель преломления  $j$ -слоя, при  $j=N+1$ , что соответствует левому полупространству,  $n_{N+1} = n_s$ ;  $n_a$  – показатель преломления правого полупространства;  $\lambda_k$  – длина волны, на которой ведется рекуррентный счет коэффициента отражения.

Это классическая задача оптимизации существенно нелинейной функции многих переменных  $F(x)$  в ограниченной области. Ограничения накладываются прежде всего физическими условиями ( $d_j > 0$ ). Также возможно наличие технологических ограничений (например, на толщину каждого слоя или общую толщину покрытия).

В общем случае целевая функция (38) имеет множество локальных минимумов, что связано с квазипериодичностью отражательных свойств каждого слоя МДСЗ на сетке длин волн [7, 8]. Также (38) неявно заданная, параметрически зависящая от  $\lambda_i$ , функция  $N$  переменных, по числу слоев.

**РЕКУРРЕНТНЫЙ СИНТЕЗ  
МНОГОСЛОЙНОГО  
ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО  
СЕЛЕКТИВНОГО ЗЕРКАЛА**

В общем случае задача (40) решается с помощью методов нелинейной оптимизации, к примеру, методом последовательного квадратичного программирования. В методах оптимизации существенным недостатком является сложность и трудоемкость математических вычислений, связанных, как правило, с поиском глобального минимума целевой функции  $N$  переменных на заданной области ограничений. Если заранее задавать распределение значений показателя преломления для  $N$ -слойной структуры, искомый вектор толщин будет состоять из  $N$  аргументов. Решение задачи в такой ее постановке является действительно сложной. Связано это с тем, что существует большая вероятность в качестве результата минимизации функции  $N$  переменных получить не глобальный, а неглубокий локальный минимум оценочного функционала. Алгоритмизация методов нелинейной оптимизации на мощной ЭВМ с затратой значительных временных ресурсов может принести результат худший, чем решение с использованием упрощенной методики.

Поэтому далее разрабатывается упрощенный метод синтеза МДСЗ. Выдвинем гипотезу о том, что глубокий минимум целевой функции можно достичь, решая задачу оптимизации рекуррентно. Такая гипотеза соответствует подходу Беллмана–Заде (задача достижения нечетко определенной цели).

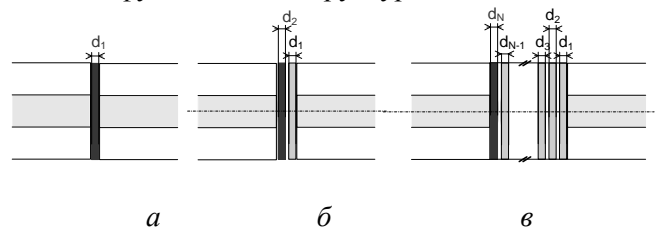
Базируясь на выдвинутой гипотезе, разрабатываем метод синтеза МДСЗ с целью в дальнейшем сравнить его результат с результатом синтеза МДСЗ с оптимизацией по методу последовательного квадратичного программирования.

Покажем, что оптимизацию можно проводить рекуррентно, минимизируя целевую функцию (38) от слоя к слою, от последнего с первым. Так, если формировать целевую функцию для каждой укороченной структуры и рекуррентно решать задачу оптимизации для каждого вновь добавляемого слоя, то задача синтеза МДСЗ (40) упрощается до решения  $N$ -задач одномерной оптимизации. Решением каждой задачи является наименьшее значение толщины слоя  $d_j$ :

$$\left\{ \begin{aligned} d_N &= \operatorname{Inf}_{x_N} \left\{ \arg \min F(x_N) = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (R_N(d_1, \dots, d_{(N-1)}, x_N, \lambda_k) - \bar{R}_N(\lambda_k))^2} \right\}, \\ \bar{R}_N(\lambda_k) &\leq \frac{\left(1 - \left(\frac{n_H}{n_L}\right)^{2N}\right)^2}{1 + \left(\frac{n_H}{n_L}\right)^{2N}}, \\ \dots \dots \dots \\ d_j &= \operatorname{Inf}_{x_j} \left\{ \arg \min F(x_j) = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (R_j(d_1, \dots, d_{(j-1)}, x_j, \lambda_k) - \bar{R}_j(\lambda_k))^2} \right\}, \\ \bar{R}_j(\lambda_k) &\leq \frac{\left(1 - \left(\frac{n_H}{n_L}\right)^{2j}\right)^2}{1 + \left(\frac{n_H}{n_L}\right)^{2j}}, \\ \dots \dots \dots \\ d_1 &= \operatorname{Inf}_{x_1} \left\{ \arg \min F(x_1) = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (R_1(x_1, \lambda_k) - \bar{R}_1(\lambda_k))^2} \right\}, \\ \bar{R}_1(\lambda_k) &\leq \frac{\left(1 - \left(\frac{n_H}{n_L}\right)^2\right)^2}{1 + \left(\frac{n_H}{n_L}\right)^2}. \end{aligned} \right. \quad (41)$$

где  $\bar{R}_j(\lambda_k)$  – требуемое энергетическое спектральное распределение коэффициента отражения на диапазоне длин волн  $\lambda_i, \in [\lambda_1, \lambda_L]$ ;  $R_j(\lambda_k)$  – энергетическое спектральное распределение коэффициента отражения структуры из  $j$  слоев.

Слой с высоким и низким показателями преломления будем чередовать. Суть метода рекуррентной минимизации (рис. 3) заключается в следующем: если найти такое значение  $d_1$  для первого слоя, при котором значение целевой функции будет минимально, а затем, используя  $d_1$ , перейти к следующему слою и снова минимизировать целевую функцию, то, проводя последовательно такие операции, получим  $X = (d_1, \dots, d_N)$ . Как показано в следующем разделе, посвященном вычислительному эксперименту, такой вектор решений будет одним из локальных минимумов целевой функции всей структуры.



**Рис. 3.** Пояснение рекуррентного метода синтеза: *a* – синтез однослойной структуры; *б* – синтез двухслойной структуры; *в* – синтез  $N$ -й структуры

В результате рекуррентной минимизации достигается глубокий локальный минимум целевой функции, этого уже достаточно для реализации широкополосного диэлектрического селективного зеркала.

В частном случае синтеза периодической двухкомпонентной структуры задача синтеза также упрощается. Под периодической двухкомпонентной структурой понимается структура, один период которой – это двухкомпонентный слой. Целевая функция становится функцией двух переменных. Методом рекуррентной оптимизации можно найти такое значение  $x_1 = d_1$  для последнего слоя, при котором значение функционала будет минимальным. Далее для периодической структуры с  $x_1 = x_3 = \dots = x_{N-2} = x_N = d_1$  и неизвестным  $x_2 = x_4 = \dots = x_{N-1}$  минимизируется оценочный функционал всей структуры, который является неявно заданной функцией одной переменной  $F(x_2)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_2 = \operatorname{Inf}_{x_2} \left\{ \arg \min F(x_2) = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{k=1}^L R_N(d_1, x_2, \lambda_k) - \bar{R}_N(\lambda_k)^2} \right\}, \\ \bar{R}_N(\lambda_k) \leq \frac{\left( 1 - \left( \frac{n_H}{n_L} \right)^{2N} \right)^2}{1 + \left( \frac{n_H}{n_L} \right)^{2N}}, \\ d_1 = \operatorname{Inf}_{x_1} \left\{ \arg \min F(x_1) = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{k=1}^L R_1(x_1, \lambda_k) - \bar{R}_1(\lambda_k)^2} \right\}, \\ \bar{R}_1(\lambda_k) \leq \frac{\left( 1 - \left( \frac{n_H}{n_L} \right)^2 \right)^2}{1 + \left( \frac{n_H}{n_L} \right)^2}. \end{array} \right. \quad (42)$$

Интерес к синтезу периодической двухкомпонентной структуры связан со следующим фактом. Промышленное изготовление МДСЗ с разными толщинами слоев возможно, но не всегда целесообразно. Унификация и стандартизация промышленности позволяет производить функциональные объекты дешевле, во многом благодаря их однотипности, несмотря на возможную избыточность в материалах или функциональных возможностях в полученных объектах.

Сравнение эффективности разработанного метода синтеза с результатом синтеза МДСЗ с оптимизацией по методу последовательного квадратичного программирования производится в следующем разделе, посвященном проведению вычислительного эксперимента.

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Рассмотрим упрощенный случай четвертьволновой структуры, состоящей из одной пластинки толщиной 400 нм, заключенной между двумя полупространствами. На рис. 4 показано, как выглядит зависимость затухания пропускания пластинки от длины волны. Длины волн даны в нанометрах, показатель пропускания –

в децибелах. Из графика видно, что на один слой диэлектрика при заданном типичном значении отношения показателей преломления 2,3/1,48 многократно достигается затухание пропускания 0,82 дБ. При большем отношении показателей преломления это значение будет больше.

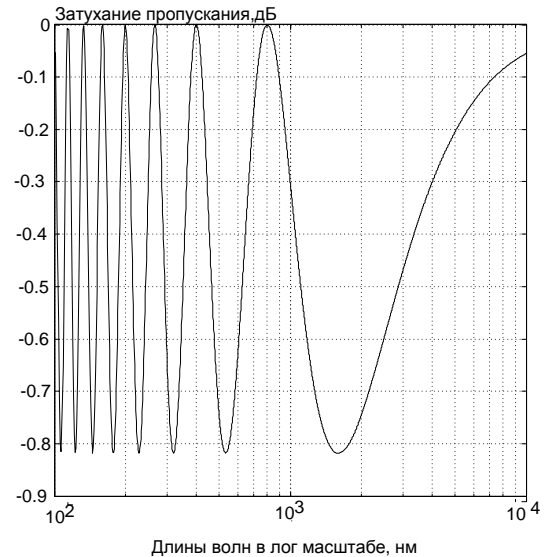
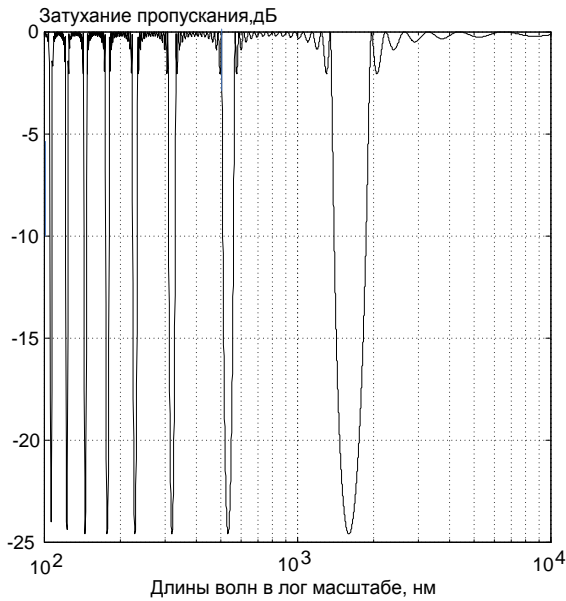


Рис. 4. Затухание пропускания однослойной структуры с толщиной слоя 400 нм

Увеличим число тонких слоев диэлектрика до пятнадцати. На рис. 5 видно, что вносимое 15-слойной структурой затухание на длине волны отражения четвертьволновой структуры (1,6 мкм) достигает 24,621 дБ. Удельно это составляет по 1,64 дБ на слой.

Можно сделать вывод, что каждый лишний слой в четвертьволновом фильтре добавляет не менее 0,82 дБ в затухание на длине волны максимального затухания. Значения удельного затухания одного слоя – это отношение вносимого затухания МДСЗ к числу слоев. В результате вычислительного эксперимента для структур, состоящих из материалов с показателями преломления 1,48 и 2,3, значения затухания, добавляемого последним слоем МДСЗ, вносимого затухания МДСЗ и удельного затухания на слой в зависимости от числа слоев сведены в таблице.

Таблица дает представление также о затухании, вносимом добавлением каждый раз нового слоя. Результат многократного вычислительного эксперимента с разработанной моделью МДСЗ представлен на рис. 6 в виде диаграммы распределения удельного затухания и затухания, которое добавляется с каждым новым слоем.



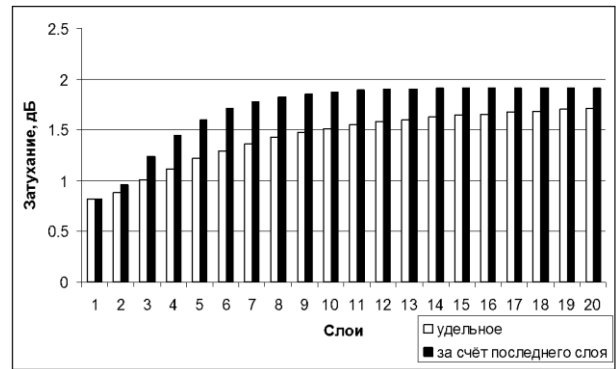
**Рис. 5.** Затухание пропускания 11-слойной четвертьволновой структуры с толщиной слоя 400 нм

Таблица  
Зависимости затухания от числа слоев

Число слоев	Удельное затухание одного слоя	Затухание, добавляемое последним слоем МДСЗ	Затухание, вносимое МДСЗ
1	-0.81811	-0.818	-0.818
2	-0.88755	-0.957	-1.775
3	-1.00417	-1.237	-3.013
4	-1.11543	-1.449	-4.462
5	-1.21262	-1.601	-6.063
6	-1.29500	-1.707	-7.770
7	-1.36404	-1.778	-9.548
8	-1.42175	-1.826	-11.374
9	-1.47011	-1.857	-13.231
10	-1.51080	-1.877	-15.108
11	-1.54536	-1.891	-16.999
12	-1.57483	-1.899	-18.898
13	-1.60023	-1.905	-20.803
14	-1.62221	-1.908	-22.711
15	-1.64140	-1.910	-24.621
16	-1.65831	-1.912	-26.533
17	-1.67329	-1.913	-28.446
18	-1.68667	-1.914	-30.360
...	...	...	...
53	-1.83719	-1.915	-97.371
54	-1.83863	-1.915	-99.286
55	-1.84000	-1.915	-101.200
...	...	...	...
73	-1.85849	-1.920	-135.670

Диаграмма позволяет видеть, что затухание, а значит, и отражение, изменяется с добавлением каждого следующего слоя и, начиная с 14-го слоя, дополнительное вносимое затухание нового слоя достигает постоянного значения (1,9 дБ на слой). Удельное затухание в пределе экспоненциально стремится к асимптоте, 1,9 дБ для структуры, состоящей из чередования слоев с показателями преломления 2,3 и 1,48 типичных используемых материалов [9].

Теперь сравним результаты вычислительного эксперимента с полученным в предыдущем разделе результатом анализа математической модели МДСЗ. Было установлено ограничение на коэффициент отражения четвертьволновой структуры (37).



**Рис. 6.** Диаграмма распределения удельного затухания и затухания, добавляемого последним слоем

Сопоставим результат вычислительного эксперимента со значением, получаемым из (37). Затухание пропускания, согласно (37), для 15-слойной структуры равно

$$T = 10 \lg(1 - R) = 10 \lg \left( 1 - \left( \frac{1 - \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^{K+1}}{1 + \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^{K+1}} \right)^2 \right) =$$

$$= 10 \lg \left( 1 - \left( \frac{1 - \left( \frac{2,3}{1,48} \right)^{15+1}}{1 + \left( \frac{2,3}{1,48} \right)^{15+1}} \right)^2 \right) = -24,621 \text{ дБ.}$$

Полученное значение максимального затухания пропускания 24,621 дБ из математического выражения сходится с результатом вычислительного эксперимента (см. таблицу, строка 15 и рис. 5).

Теперь необходимо понять, каким будет значение максимального затухания пропускания МДСЗ для других 15-слойных структур.

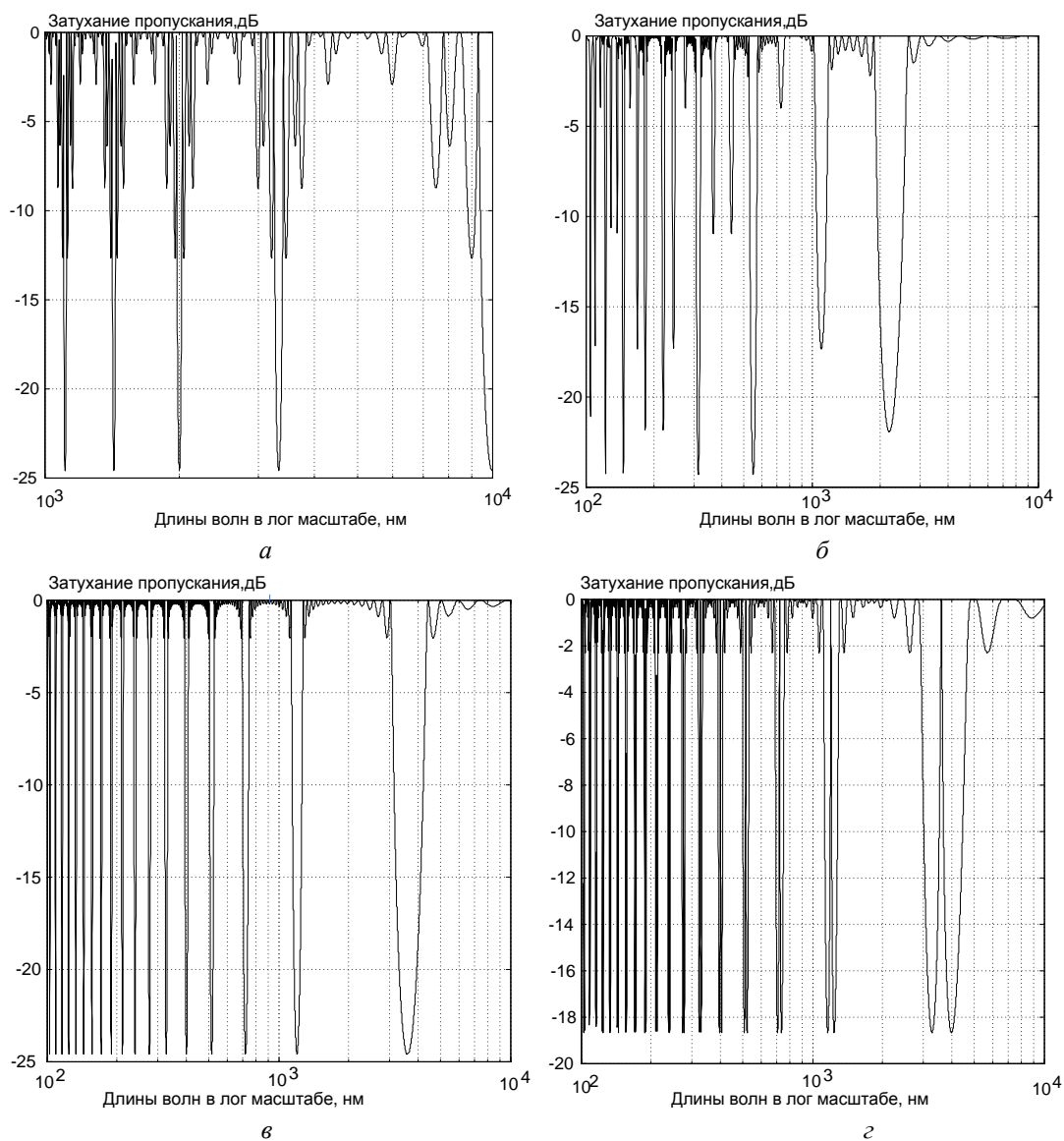


На рис. 7 представлены частотные зависимости затухания пропускания для 15-слойных структур разного вида с показателями преломления 2,3 и 1,48.

Во всех структурах затухание пропускания не больше 24,621 дБ – предела для 15-слойной структуры. На рис. 7, *а* представлена структура вида «Пыль Кантора», представляющая собой узкополосный заграждающий полосовой фильтр. Для структуры рис. 7, *б*, нечетвертьволновой бинарной с толщинами слоев 400 и 700 нм, затухание пропускания не больше 24,621 дБ. Для структуры рис. 7, *в*, четвертьволновой с толщинами слоев 900 нм, затухание

пропускания также не больше 24,621 дБ. Для структуры рис. 7, *г*, с включением слоя с удвоенной толщиной в середине структуры, предел в 24,621 дБ даже не достигается. В синтезированных структурах решением задачи (40) этот предел тоже не достигается.

Таким образом, в результате анализа математической модели МДСЗ с проведением вычислительных экспериментов было установлено значение верхней границы коэффициента отражения МДСЗ, определяющее достижимый порог эффективности переключателя в зависимости от диапазона вариаций показателей преломления слоев и их числа.



**Рис. 7.** Частотные зависимости затухания пропускания для 15-и слойной структуры: *а* – вида «Пыль Кантора»; *б* – нечетвертьволновой бинарной с толщинами 400 и 700 нм; *в* – четвертьволновой 900 нм; *г* – четвертьволновой 900 нм с включением одного удвоенного слоя толщиной 1800 нм

Для заданных показателей преломления слоев, принадлежащих диапазону  $[n_L, n_H]$ , и числа границ переходов слоев  $K = N + 1$ , верхняя граница коэффициента отражения  $\text{Sup}\{R\}$  равна

$$\text{Sup}\{R\} = \left( \frac{1 - \left(\frac{n_L}{n_H}\right)^K}{1 + \left(\frac{n_L}{n_H}\right)^K} \right)^2. \quad (43)$$

Таким образом, выражение (37) было расширено на область непериодических, многослойных структур. Иначе говоря, найденное выражение (43) ограничивает коэффициент отражения МДСЗ при заданных  $n_L$ ,  $n_H$  и  $N$  максимальным значением коэффициента отражения четвертьволновой структуры. При этом существует множество векторов толщин слоев с коэффициентом отражения, достигающим (43), с различными формами частотной характеристики.

#### ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Известные рекуррентные модели расчета многослойных структур: адмиттансная / импедансная, характеристических матриц, описанные в работе Ш. А. Фурмана и В. А. Тихонравова «Basics of optics of multilayer systems», позволяют получить результаты решения прямой задачи расчета многослойных структур, – задачи нахождения спектральных характеристик по заданным параметрам многослойной структуры.

Предложенный авторами рекуррентный счет комплексного коэффициента отражения прежде всего позволяет наглядно видеть динамику его изменения по ходу добавления новых слоев, позволяет упростить суть вещей – не использовать избыточные категории импедансов / адмиттансов.

В решении обратной задачи, задачи синтеза многослойных структур, авторами предложено решать задачу оптимизации МДСЗ рекуррентно. Авторы смогли продемонстрировать в одном частном случае рекуррентного синтеза МДСЗ результат, близкий к синтезированному МДСЗ решением многомерной задачи оптимизации «в лоб» по нелинейному методу оптимизации – методу квадратичного программирования.

Математическая модель рекуррентного счета комплексного коэффициента отражения, дополненная выражением, устанавливающим ограничение на коэффициент отражения оптического многослойного диэлектрического селективного зеркала, являются удачным сочетанием

применительно к методу рекуррентного синтеза. Оно позволяет прогнозировать достижимый энергетический коэффициент отражения, что очень важно для малослойных структур, или структур с небольшой относительной разностью показателей преломления, т.е. таких структур, в которых энергетический коэффициент отражения не может достигать 1 ни при каких условиях. Это позволяет, во-первых избежать ошибки при синтезе, так как обычно желаемую частотную характеристику в диапазоне пропускания делают равной 0, а в диапазоне отражения 1. Во-вторых, можно осуществлять синтез МДСЗ по приближению к уровню затухания, полученному из указанной зависимости. И, в-третьих, действительно найденное ограничение на коэффициент отражения позволяет вести рекуррентный синтез МДСЗ, так как ошибка синтеза будет чудовищно велика, если рассматривать разность между реальным коэффициентом отражения однослойной структуры в области отражения и желаемым коэффициентом отражения, если он равен 1.

Результаты работы были получены при помощи гранда «CARL ZEISS» компании ООО ОПТЕК, официального представителя концерна Carl Zeiss в СНГ.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970. 720 с. [ M. Born, E. Wolf, *Principles of optics*. Moscow: Nauka, 1970. ]
2. Фурман Ш. А. Тонкослойные оптические покрытия. Л.: Машиностроение, 1977. [ Sh. A. Furman, *Thin-layer optical coatings*. Leningrad: Mashinostroeniye, 1977. ]
3. Furman Sh. A., Tikhonravov A. V. Basics of optics of multilayer systems. Gif-sur-Yvette: Editions Frontiers, 1992. 242 p. [ Sh. A. Furman, A. V. Tikhonravov, *Basics of optics of multilayer systems*. Gif-sur-Yvette: Editions Frontiers, 1992. ]
4. Бреховских Л. М.. Волны в слоистых средах. М: Наука, 1973. 342 с. [ L. M. Brekhovskikh, *Waves in layered media*, Moscow: Nauka, 1973. ]
5. Тихонравов А. В. О методе синтеза оптических покрытий, использующем необходимые условия оптимальности // Вестник МГУ. Сер. Физика–астрономия. 1982. Т. 23, № 6. С. 91–93. [ A. V. Tikhonravov, "About the method of synthesis of optical coatings, using the necessary conditions of optimality," *Vestnik MGU, ser. physics–astronomy*, vol. 23, no. 6, pp. 91–93, 1982. ]
6. Тихонравов А. В. Синтез слоистых сред. М.: Знание, 1987. 48 с. [ A. V. Tikhonravov, *Synthesis of layered media*. Moscow: Znaniye, 1987. ]
7. Султанов А. Х., Багманов В. Х., Костров С. В., Кутлюяров Р. В. Рекуррентные методы минимизации оптических многослойных структур для волоконно-оптических средств связи // Вестник УГАТУ. Т. 13, № 1 (34). С. 193–199. [ A. Kh. Sultanov, V. Kh. Bagmanov, S. V. Kostrov, R. V. Kutyayarov, "Recurrent methods of minimization optical multi-

layer structures for volokonno-optical communications industry," *Vestnik UGATU*, vol. 13, no.1 (34), pp. 193-199. ]

**8. Султанов А. Х., Багманов В. Х., Костров С. В., Кутлюяров Р. В.** Синтез оптических отражательных фильтров на основе тонкопленочных структур // Вестник УГАТУ. Т. 13, № 1 (34). С. 206–213. [ A Kh. Sultanov, V. Kh. Bagmanov, S. V. Kostrov, R. V. Kutluyarov, "Synthesis reflective optical filters based on thin-film structures," *Vestnik UGATU*, vol. 13, no. 1 (34), pp. 206-213. ]

**9. Andreev S. S., Salashchenko N. N., Suslov L. A., Yablonsky A. N., Zuev S. Yu.** Stress reduction of Mo/Si multilayer structures // NIMA. 2001. V. 470, Nos. 1+2. P. 162–167. [ S. S. Andreev, N. N. Salashchenko, L. A. Suslov, A. N. Yablonsky, and S. Yu. Zuev, "Stress reduction of Mo/Si multilayer structures," *NIMA*, vol. 470, Nos. 1+2, pp. 162-167, 2001. ]

#### ОБ АВТОРАХ

**СУЛТАНОВ Альберт Ханович**, проф., зав. каф. телеком. систем. Дипл. инж. по многоканальн. электросвязи (Новосиб. электротехн. ин-т связи, 1973). Д-р техн. наук по упр. в техн. сист. (УГАТУ, 1996). Иссл. в обл. телеком. систем, оптоэл. аэрокосм. систем.

**БАГМАНОВ Валерий Хусаинович**, проф. каф. телеком. систем. Дипл. физик (МГУ, 1975). Д-р техн. наук по сист. анализу, упр. и обр. информ. (УГАТУ, 2007). Иссл. в обл. мат. моделирования и обр. сигналов.

**КОСТРОВ Сергей Владимирович**, ст. преп. каф. телеком. систем. Дипл. инж. по многоканальн. телеком. системам (УГАТУ, 2008). Канд. техн. наук по сист., сетям и устр. телекоммуникаций. Иссл. в обл. волоконно-оптической связи.

#### METADATA

**Title:** Recurrent synthesis of multilayer dielectric selective mirror.

**Authors:** A. Kh. Sultanov, V. Kh. Bagmanov, S. V. Kostrov.

**Affiliation:**

<sup>1</sup> Ufa State Aviation Technical University (UGATU), Russia.

<sup>2</sup> DSA Ltd, Russia.

**Email:** <sup>1</sup> tks@ugatu.ac.ru, <sup>2</sup> sergey.kostrov@rambler.ru.

**Language:** Russian.

**Source:** *Vestnik UGATU* (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 18, no. 2 (63), pp. 74-84, 2014. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

**Abstract:** This article presents a solution to the problem of synthesis of multilayer dielectric mirrors for the selective ROADM.

**Key words:** Optical multilayer filter; stratified media; thin-film structures; multilayer dielectric selective mirror (MDSM); tunable dielectric multilayer selective mirror (TDMSM); optical multilayer filter (OMLF); optical switch.

**About authors:**

**SULTANOV, Albert Khanovich**, Prof., Dept. of Telecommunications Systems, Dipl. Eng. on multi-channel telecommunications (Novosibirsk Telecommunication Institute, 1973). Dr. Tech. Sciences (USATU, 1996). Research in the sphere of Telecom. systems, optoelectronics. aerospace systems.

**BAGMANOV, Valeriy Khusainovich**, Prof., Dept. of Telecommunications systems, Dipl. physicist (Moscow state University, 1975). Dr. Tech. Sciences (USATU, 2007). Research in the field of mathematical modeling and signal processing.

**KOSTROV, Sergey Vladimirovich**, Senior Teacher, Dept. of Telecommunications Systems. Dipl. Eng. on multi-channel telecommunications (Ufa State Aviation Technical University, 2008). PhD on systems, networks and devices of telecommunication (USATU, 2011). Research in the sphere of fiber-optical communication.