ISSN 1992-6502 (Print) Вестник УГАТУ ISSN 2225-2789 (Online)
2014. Т. 18, № 2 (63). С. 181–184 http://journal.ugatu.ac.ru

УДК 517.9

Интегрирование неавтономных квазилинейных дифференциальных уравнений

Р. Р. Исламов, Р. Р. Исламов (мл.)[1]

[1] r.islamov@inbox.ru

ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

Поступила в редакцию 22.12.2013

Аннотация. Рассматривается неавтономная динамическая система, которая описывается квазилинейными дифференциальными уравнениями. Для интегрирования уравнений движения таких систем в резонансных случаях используются интегральные многообразия в специальной форме.

Ключевые слова: квазилинейная система; интегральное многообразие; полиномиальные интегралы.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается неавтономная динамическая система, которая описывается квазилинейными дифференциальными уравнениями. Предполагается, что между частотами собственных колебаний системы и частотами возмущающих сил имеет место соотношение с рациональными коэффициентами. Для интегрирования таких систем используются интегральные многообразия в специальной форме [1].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть движение динамической системы описывается неавтономными квазилинейными дифференциальными уравнениями, приведенными к виду

$$\frac{dX}{dt} = JX + \varepsilon F_1(t, X) + \varepsilon^2 F_2(t, X) + \dots , \quad (1)$$

где $X = \{x_1, \dots x_n\}$ – n-мерный вектор, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, J – диагональная матрица с собственными числами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$; проекции вектор-функции $F_j(t, X)$ являются полиномами относительно проекций вектора X с коэффициентами, квазипериодически зависящими от t:

$$F_j(t, X) = \sum_s \sum_h F_{js}^{(h)}(X) \exp(is\nu_h t); \quad (F_j(t, 0) \equiv 0). \quad (2)$$

Здесь суммы являются конечными, векторы $F_{js}^{(h)}(X)$ – полиномами; $\nu_h > 0$ $(h = 1, 2, \dots, \sigma)$ – несоизмеримыми между собой числами.

Собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы J допускают представление

$$\begin{gathered} \lambda_s = 0, \dots, \lambda_{l+\alpha-1} = 0, \\ \lambda_{l+\alpha} = i\omega_\alpha, \dots, \lambda_{\nu+\alpha} = -i\omega_\alpha \quad \left(i = \sqrt{-1}\right); \\ \operatorname{Re} \lambda_\beta = \operatorname{Re} \lambda_{m+\beta} < 0; \\ \begin{pmatrix} \beta = l + 2p + 1, \dots, l + 2p + m; \; s = 1, \dots, l; \\ \alpha = 1, \dots, p; \nu = l + p \end{pmatrix}, \end{gathered} \quad (3)$$

т. е. считается, что характеристическое уравнение порождающей системы

$$\frac{dX}{dt} = JX \quad (4)$$

имеет l нулевых, $2p$ чисто мнимых корней и $2m$ комплексных корней с отрицательными вещественными частями, так что $n = l + 2p + 2m$. Пусть числа $\omega_1, \dots, \omega_p$ и $\nu_1, \dots, \nu_\sigma$ удовлетворяют условию

$$k_1\omega_1 + \dots + k_p\omega_p + k_{p+1}\nu_1 + \dots + k_{p+\sigma}\nu_\sigma = 0, \quad (5)$$

где k_i – целые числа.

Нашей задачей является нахождение решения $X(t)$ уравнения (1), удовлетворяющего начальному условию $X(t_0) = X_0$.

2. ПОСТРОЕНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ И ИНТЕГРАЛОВ ПОРОЖДАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ

Наряду с системой (1) рассмотрим вспомогательную систему порядка N

$$\frac{d\zeta}{dt}=\varepsilon G_1(\zeta)+\varepsilon^2 G_2(\zeta)+\ldots. \tag{6}$$

Ищем уравнение интегральных многообразий системы (1) и (6) в форме

$$\zeta=V(t,X)+\varepsilon\Phi_1(t,X)+\varepsilon^2\Phi_2(t,X)+\ldots. \tag{7}$$

Вектор-функции $V(t,X)$, $G_k(\zeta)$, $\Phi_k(t,X)$ определяются из уравнений в частных производных

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{DV}{DX}JX=0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial t}+\frac{D\Phi_k}{DX}JX=U_k(t,X)+G_k(V), \tag{9}$$

где $\frac{DV}{DX}$, $\frac{D\Phi_k}{DX}$ – матрицы Якоби, а $U_k(t,x)\equiv U_k\begin{pmatrix}F_1,\ldots,F_k,\ldots,G_1,\ldots,G_{k-1},V,\\ \Phi_1,\ldots,\Phi_{k-1}\end{pmatrix}$ – известная вектор-функция при известных

$$G_1(t,X),\ldots,G_{k-1}(t,X),$$
$$V(t,X),\Phi_1(t,X),\ldots,\Phi_{k-1}(t,X)$$

($F_1,\ldots,F_k$ – известные векторы (1)).

Уравнения (6) и (7) строятся одновременно. Для этого при известной вектор-функции $U_k(t,x)$ вектор $G_k(V)$, полиномиальный относительно проекций $V_1,\ldots,V_N$ вектора $V(t,X)$, следует выбирать так, чтобы уравнение (9) имело решение $\Phi_k(t,X)$, полиномиальное относительно $x_1,\ldots,x_n$ с коэффициентами, квазипериодически зависящими от t (аналогично свойствам векторов $F(t,X)$ (2)).

При этом порядок вспомогательной системы (6) зависит от числа полиномиально независимых интегралов системы (4). Число последних зависит от свойств характеристических чисел $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ матрицы J и соотношений вида (5).

Укажем способы выбора этих полиномиально независимых интегралов системы (4). Функции вида

$$V_1=x_1,\ldots,V_l=x_l,$$
$$V_{l+\alpha}=x_{l+\alpha}x_{\nu+\alpha}\,(\nu=l+p;\ \alpha=1,\ldots,p) \tag{10}$$

являются полиномиально независимыми интегралами системы (4). Пусть имеются r линейно независимых соотношений вида (5)

$$\begin{aligned}&k_{\gamma 1}\omega_1+\ldots+k_{\gamma p}\omega_p+k_{\gamma p+1}\nu_1+\ldots+\\&+k_{\gamma p+\sigma}\nu_\sigma=0,\quad(\gamma=1,\ldots,r).\end{aligned} \tag{11}$$

Введем в рассмотрение $2p+\sigma$ – мерные векторы M_γ и M_γ^* соответственно с проекциями $m_{\gamma 1},\ldots,m_{\gamma\,2p+\sigma}$ и $m^*_{\gamma 1},\ldots,m^*_{\gamma\,2p+\sigma}$, составленными из проекций $k_{\gamma 1},\ldots,k_{\gamma\,p+\sigma}$ вектора K_γ согласно правилу, а именно:

$$\begin{aligned}&1)\,m_{\gamma j}=m_{\gamma\,p+j}=m^*_{\gamma j}=m^*_{\gamma\,p+j}=0\quad(k_{\gamma j}=0);\\&2)\,m_{\gamma j}=k_{\gamma j}=m^*_{\gamma\,p+j};m_{\gamma\,p+j}=0\quad(k_{\gamma j}>0);\\&3)\,m_{\gamma j}=m^*_{\gamma\,p+j}=0;\ m_{\gamma\,p+j}=m^*_{\gamma j}=\left|k_{\gamma j}\right|\quad(k_{\gamma j}<0;);\\&4)\,m_{\gamma\,2p+s}=k_{\gamma\,p+s};\,m^*_{\gamma\,2p+s}=-k_{\gamma\,p+s}\\&\quad(s=1,\ldots\sigma;\ j=1,\ldots p).\end{aligned} \tag{12}$$

Из равенств (11) и (12) следует, что функции

$$\begin{aligned}&V_{\nu+\gamma}=x_{l+1}^{m_{\gamma 1}}\cdots x_{l+2p}^{m_{\gamma\,2p}}\times\\&\times\exp i\left\{m_{\gamma\,2p+1}\nu_1+\ldots+m_{\gamma\,2p+\sigma}\nu_\sigma\right\}t,\\&V_{\nu+r+\gamma}=x_{l+1}^{m^*_{\gamma 1}}\cdots x_{l+2p}^{m^*_{\gamma\,2p}}\times\\&\times\exp i\left\{m^*_{\gamma\,2p+1}\nu_1+\ldots+m^*_{\gamma\,2p+\sigma}\nu_\sigma\right\}t,\end{aligned} \tag{13}$$

соответствующие векторам M_γ и M_γ^* являются интегралами порождающей системы (4). Принимая во внимание соотношения (10), (12), (13), находим, что существуют зависимости

$$V_{\nu+\gamma}V_{\nu+r+\gamma}=V_{l+1}^{\left|k_{\gamma 1}\right|}\cdots V_{l+p}^{\left|k_{\gamma p}\right|}\ (\gamma=1,\ldots,r), \tag{14}$$

где $k_{\gamma 1},\ldots,k_{\gamma\,p}$ – коэффициенты в равенстве (11).

Переменные $\zeta_{l+1},\ldots,\zeta_{l+p+2r}$ связаны соотношениями

$$\begin{aligned}&\zeta_{\nu+\gamma}\zeta_{\nu+r+\gamma}=\zeta_{l+1}^{\left|k_{\gamma 1}\right|}\cdots\zeta_{l+p}^{\left|k_{\gamma p}\right|}\\&(\nu=l+p,\ \gamma=1,\ldots,r),\end{aligned} \tag{15}$$

вытекающими из тождеств (14).

Итак, исследование исходной системы порядка $n=l+2p+2m$ сводится с помощью уравнений интегрального многообразия (7) к исследованию вспомогательной системы (6) порядка $N^*=l+p+2r$. Учитывая r тождеств (15) порядок вспомогательной системы можно понизить на r, т.е. окончательно получим порядок системы $N=l+p+r$.

3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИСХОДНОЙ СИСТЕМЫ

Задача построения решений системы (1) сводится к интегрированию системы (6). Переменная x_j ($j = 1, 2, ..., n$) ищется в виде

$$y_j = x_j + \varepsilon\varphi_{1j}(X,t) + \varepsilon^2\varphi_{2j}(X,t) + ..., \quad (16)$$

где y_j удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dy_j}{dt} = \lambda_j y_j + \varepsilon q_{1j}(\zeta) y_j + \varepsilon^2 q_{2j}(\zeta) y_j + ... \quad (17)$$

Функции $q_{kj}(\zeta)$, $\varphi_{kj}(X,t)$ находятся из уравнений в частных производных

$$\frac{\partial\varphi_{kj}}{\partial t} + \frac{D\varphi_{kj}}{DX} JX - \lambda_j \varphi_{kj} = \\ = q_{kj}(V(x)) x_j + G_{kj}(X,t). \quad (18)$$

Здесь $G_{kj}(X,t)$ – известная функция, полиномиальная относительно $x_1, \dots x_n$ и квазипериодически зависящая от t. Всегда можно подобрать функции $q_{kj}(V(x))$ так, чтобы уравнение (18) имело решение $\varphi_{kj}(X,t)$, полиномиальное относительно $x_1, \dots x_n$ и квазипериодически зависящее от t [1]. Так как уравнение (17) линейное относительно y_j и при известном ζ (ζ – решение системы (6)) отыскание y_j приводит к квадратуре, то из (16) находится интеграл системы (1). После разрешения системы (16) относительно x_j ($j = 1, 2, ..., n$) определяется полное решение системы (1) в виде

$$X = H(y_1, ..., y_n, t, \varepsilon),$$
$$y_j = y_{0j} \exp\left(\lambda_j t + \varepsilon \int_0^t q_j(\zeta, \varepsilon) dt\right), \quad (19)$$

где $q_j(\varepsilon, \zeta) = q_{1j}(\zeta) + \varepsilon q_{2j}(\zeta) + ...$, y_{0j} – постоянная интегрирования; ζ – решение системы (6).

Частному решению системы (6) соответствует интегральное многообразие системы (1), которое определяется уравнением (7). При этом выражение (19) определяет интегральные кривые на интегральном многообразии. Таким образом, поставленная задача решена.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье на идеях работы [1] предлагается приближенный метод интегрирования квазилинейных неавтономных систем дифференциальных уравнения в сложных резонансных случаях. При этом используется интегральное многообразие специального вида. Интегрирование исходной неавтономной системы порядка $n = l + 2p + 2m$ сводится к интегрированию вспомогательной автономной системы порядка N с медленно изменяющимися переменными.

При этом порядок вспомогательной системы зависит от свойств собственных чисел порождающей системы и числа резонансных соотношений. Приведен алгоритм выбора полиномиально независимых интегралов порождающей системы. Число таких интегралов и определяет порядок вспомогательной системы.

Многочисленные асимптотические методы исследования, в частности одночастотный метод Крылова–Боголюбова [2], являются частными случаями приведенного метода исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Валеев К. Г.** Об одной теореме Ляпунова // Математическая физика: сб. науч. тр. К.: Наук. думка, 1971. Вып. 9. С. 17–23. [K. G. Valeev, "About Lyapunov's one theorem," (in Russian), in *Matematicheskaya Fizika*, iss. 9, pp. 17-23, Kiev, 1971.]

2. **Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1958. [N. N. Dogolyubov and Yu. A. Mitropolskiy, *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Fluctuations*. Moscow: Gostekhizdat, 1958.]

ОБ АВТОРАХ

ИСЛАМОВ Роберт Рахимович, доц. каф. математики. Дипл. инж.-мех. (УАИ, 1966). Канд. физ.-мат. наук по диф. и интегр. уравнениям. (защ. в Ин-те мат. АН УССР, 1973). Иссл. в обл. устойчивости решений обык. диф. уравнений.

ИСЛАМОВ Ринат Робертович. Дипл. инж. по выч. машинам, комплексам, системам и сетям (УГАТУ, 2004). Канд. физ.-мат. наук (УГАТУ, 2007). Иссл. в обл. диф. уравнений, мат. моделирования дин. систем.

METADATA

Title: Non-autonomous quasilinear differential equations integration.

Authors: R. R. Islamov and R. R. Islamov (jr.).

Affiliation: Ufa State Aviation Technical University (UGATU), Russia.

Email: r.islamov@inbox.ru

Language: Russian.

Source: Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 18, no. 2 (63), pp. 181-184, 2014. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

Abstract: Non-autonomous dynamic system which described by quasilinear differential equations is researched. Integral manifolds are used to integration equation of motion of such system.

Key words: Non-autonomous dynamic system; quasilinear differential equations; integral manifold.

About authors:

ISLAMOV, Robert Rahimovich, Assistant Professor, Dept. of Mathematics. Dipl. Mechanist (Ufa Aviation Inst., 1966). Cand. of Phis.-Math. Sci. (KIIGA Kiev Institute Engineers of Civil Aviation, 1973).

ISLAMOV, Rinat Robertovich. Dipl. IT Engineer (UGATU, 2004). Cand. of Tech. Sci. (UGATU, 2007).