

УДК 517.968:519.612::004.021

АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГРАВИМЕТРИИ О НАХОЖДЕНИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ РАЗДЕЛА СРЕД НА МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Е. Н. АКИМОВА¹, В. В. ВАСИН², В. Е. МИСИЛОВ³

¹aen15yandex.ru, ²vasin@imm.uran.ru, ³out.mrscreg@gmail.com

¹⁻³ Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН (ИММ УрО РАН)

^{1,2} Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина (УрФУ)

Поступила в редакцию 30.09.2013

Аннотация. Для решения трехмерной структурной обратной задачи гравиметрии о нахождении поверхностей раздела в многослойной среде предложены линеаризованные итерационные методы градиентного типа (наискорейшего спуска и минимальной ошибки) с переменными демпфирующими множителями. На основе методов типа Ньютона, Левенберга–Марквардта и линеаризованных методов градиентного типа решения задач гравиметрии для моделей двухслойной и трехслойной среды разработаны эффективные параллельные алгоритмы, численно реализованные на многопроцессорных системах различного типа: многопроцессорном комплексе МВС-ИММ, многоядерном процессоре Intel и графических процессорах NVIDIA, входящими в состав суперкомпьютера «Уран». Проведено исследование эффективности и оптимизация параллельных алгоритмов. Параллельные алгоритмы встроены в разработанную систему удаленных вычислений «Специализированный Веб-портал решения задач на многопроцессорных вычислительных системах». Решена модельная задача для трехслойной среды.

Ключевые слова: обратная задача гравиметрии; итерационные методы; параллельные алгоритмы; многопроцессорные вычислительные системы.

ВВЕДЕНИЕ

Важнейшими задачами при исследовании структуры земной коры являются обратные задачи гравиметрии о восстановлении поверхностей раздела между средами в двухслойной и многослойной среде [1–2]. Задачи гравиметрии описываются нелинейными интегральными уравнениями Фредгольма первого рода, т.е. являются существенно некорректными задачами. При разработке методов решения задач используются идеи итеративной регуляризации [3–4]. После дискретизации задачи сводятся к систе-

мам нелинейных уравнений большой размерности (до нескольких сотен тысяч).

Необходимость повышения точности результатов решения задач, в частности, использование более мелких сеток, существенно увеличивает время вычислений.

Одним из путей уменьшения времени расчетов и повышения эффективности решения геофизических задач является распараллеливание алгоритмов и использование многопроцессорных вычислительных систем (МВС). В Институте математики и механики УрО РАН (г. Екатеринбург) установлены суперкомпьютеры МВС-1000, МВС-ИММ и «Уран», которые успешно используются при решении прикладных задач.

В настоящее время для решения прикладных задач активно используются многоядерные гибридные вычислительные системы с графическими процессорами (видеокартами), которые по сравнению с суперкомпьютерами представляют собой более дешевую многопроцессорную

Статья рекомендована к публикации программным комитетом международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии 2013».

Работа выполнена при частичной поддержке УрО РАН в рамках программ фундаментальных исследований Президиума РАН №№ 15 (проект 12-П-1-1023) и 18 (проект 12-П-15-2019) и при частичной поддержке РФФИ (проект 12-01-00106-а).

технику с низким энергопотреблением. Установленный в ИММ УрО РАН суперкомпьютер «Уран» включает в себя гибридный вычислительный кластер на основе видеоускорителей NVIDIA Tesla и многоядерных CPU.

В данной работе предложены линеаризованные итерационные методы градиентного типа (наискорейшего спуска и минимальной ошибки) с переменными демпфирующими множителями для решения трехмерной нелинейной обратной задачи гравиметрии о восстановлении поверхностей раздела в многослойной среде. На основе методов типа Ньютона, Левенберга–Марквардта и линеаризованных методов градиентного типа решения задач гравиметрии для моделей двухслойной и трехслойной среды разработаны эффективные параллельные алгоритмы, численно реализованные на многопроцессорных вычислительных системах различного типа: многопроцессорном комплексе МВС-ИММ, графических процессорах NVIDIA и многоядерном процессоре Intel. Проведено исследование эффективности и оптимизация параллельных алгоритмов.

1. АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ СТРУКТУРНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГРАВИМЕТРИИ О НАХОЖДЕНИИ ГРАНИЦ РАЗДЕЛА СРЕД ПОСТОЯННОЙ ПЛОТНОСТИ

1.1. Обратная задача гравиметрии о нахождении поверхности раздела для двухслойной среды

Рассматривается трехмерная структурная обратная задача гравиметрии о восстановлении поверхности раздела между средами по известному скачку плотности и гравитационному полю, измеренному на некоторой площади земной поверхности.

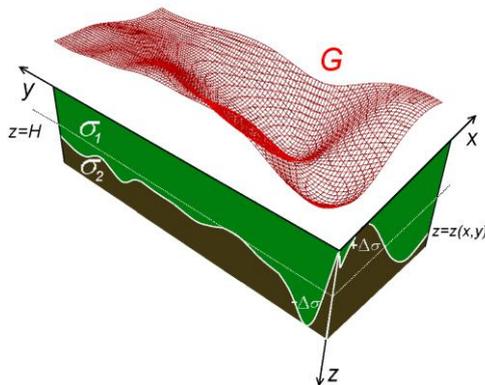


Рис. 1. Модель двухслойной среды

В предположении, что нижнее полупространство состоит из двух слоев постоянной плотности, разделенных искомой поверхностью S (рис. 1), и гравитационная аномалия создана отклонением искомой поверхности S от горизонтальной плоскости $z = H$ (ось z направлена вниз), функция $z = z(x, y)$, описывающая искомую поверхность раздела, удовлетворяет нелинейному двумерному интегральному уравнению Фредгольма первого рода

$$A[z] \equiv f \Delta \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2(x', y') \right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H^2 \right]^{3/2}} \right\} dx' dy' = G(x, y, 0), \quad (1)$$

где f – гравитационная постоянная, $\Delta \sigma$ – скачок плотности на границе раздела сред, $G(x', y', 0)$ – аномальное гравитационное поле, $z = H$ – асимптотическая плоскость для данной границы раздела, т. е.

$$\lim_{\substack{|x| \rightarrow \infty \\ |y| \rightarrow \infty}} |z(x, y) - H| = 0.$$

Предварительная обработка гравитационных данных, связанная с выделением аномального поля из общих гравитационных данных, выполняется по методике, предложенной в работе [5].

Обратная задача гравиметрии является существенно некорректной задачей, решение которой обладает сильной чувствительностью к погрешности правой части, полученной в результате измерений и предварительной обработки геофизических данных. Поэтому при ее решении используются методы итеративной регуляризации.

После дискретизации уравнения (1) на сетке $n = M \times N$, где задана $G(x, y)$, и аппроксимации интегрального оператора по квадратурным формулам имеем систему нелинейных уравнений

$$A_n[z] = F_n. \quad (2)$$

1.2. Методы решения обратной задачи гравиметрии для двухслойной среды

Для решения системы нелинейных уравнений (2) используются методы типа Ньютона и Гаусса–Ньютона в регуляризованном варианте:

- итеративно регуляризованный метод Ньютона [4]

$$z^{k+1} = z^k - \left[A'_n(z^k) + \alpha_k I \right]^{-1} \times \left[A_n(z^k) + \alpha_k z^k - F_n \right]; \quad (3)$$

- модифицированный итеративно регуляризованный метод Ньютона [6]

$$z^{k+1} = z^k - \left[A'_n(z^0) + \alpha_k I \right]^{-1} \times \left[A_n(z^k) + \alpha_k z^k - F_n \right]; \quad (4)$$

- метод Левенберга–Марквардта [3, 7]

$$z^{k+1} = z^k - \left[\left(A'_n(z^k) \right)^T A'_n(z^k) + \alpha_k I \right]^{-1} \times \left(A'_n(z^k) \right)^T \left[A_n(z^k) - F_n \right]; \quad (5)$$

- модифицированный метод Левенберга–Марквардта [8]

$$z^{k+1} = z^k - \left[\left(A'_n(z^0) \right)^T A'_n(z^0) + \alpha_k I \right]^{-1} \times \left(A'_n(z^k) \right)^T \left[A_n(z^k) - F_n \right]. \quad (6)$$

Здесь $A_n(z^k)$ и F_n – конечномерные аппроксимации интегрального оператора и правой части в уравнении (1), $A'_n(z^k)$ – производная оператора A в точке z^k , I – единичный оператор, α_k – последовательность положительных параметров регуляризации, k – номер итерации.

Нахождение очередного приближения z^{k+1} метода Ньютона (3) либо его модифицированного варианта (4) сводится к решению СЛАУ

$$A_n^k z^{k+1} = F_n^k, \quad (7)$$

где $A_n^k = A'_n(z^k) + \alpha_k I$ – плохо обусловленная несимметричная заполненная $n \times n$ матрица для метода (3) либо симметричная $n \times n$ матрица $A_n^k = A'_n(z^0) + \alpha_k I$ при $z^0 = \text{const}$ для метода (4). Вектор F_n^k размерности n имеет вид

$$F_n^k = A_n^k z^k - \left[A_n(z^k) + \alpha_k z^k - F_n \right].$$

Заметим, что в общем случае решения задачи методом Ньютона предварительно СЛАУ (7) приводится к виду с симметричной матрицей

$$D^k z^{k+1} \equiv \left[(A_n^k)^T A_n^k + \alpha'_k I \right] z^{k+1} = (A_n^k)^T F_n^k \equiv b, \quad (8)$$

где $(A_n^k)^T$ – транспонированная матрица, α'_k – параметры регуляризации.

Нахождение очередного приближения z^{k+1} метода Левенберга–Марквардта (5) либо его модифицированного варианта (6) сводится к решению СЛАУ

$$\tilde{A}_n^k z^{k+1} = \tilde{F}_n^k, \quad (9)$$

с симметричной положительно-определенной $n \times n$ матрицей $\tilde{A}_n^k = \left(A'_n(z^k) \right)^T A'_n(z^k) + \alpha_k I$ либо $\tilde{A}_n^k = \left(A'_n(z^0) \right)^T A'_n(z^0) + \alpha_k I$ и вектором правой части размерности n вида $\tilde{F}_n^k = A_n^k z^k - \left(A'_n(z^k) \right)^T \left[A_n(z^k) - F_n \right]$.

Условием останова итерационных процессов (3)–(6) является выполнение условия $\|A_n z - F_n\| / \|F_n\| < \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$.

На каждом шаге метода Ньютона, метода Левенберга–Марквардта и их модифицированных вариантов для решения СЛАУ используются следующие итерационные методы градиентного типа:

- метод простой итерации (МПИ)

$$z^{k+1} = z^k - \frac{1}{\lambda_{\max}} \left[(B + \alpha E) z^k - b \right], \quad (10)$$

где λ_{\max} – максимальное собственное значение матрицы $B + \alpha E$;

- метод минимальных невязок (ММН)

$$z^{k+1} = z^k - \frac{(B z^k - b, B z^k - b)}{\|B z^k - b\|^2} (B z^k - b), \quad (11)$$

где методы (10) и (11) применяются для $B = B^T \geq 0$;

- метод минимальной ошибки (ММО)

$$z^{k+1} = z^k - \frac{\|Bz^k - b\|^2}{\|B^T(Bz^k - b)\|^2} B^T(Bz^k - b); \quad (12)$$

- метод наискорейшего спуска (МНС)

$$z^{k+1} = z^k - \frac{\|B^T(Bz^k - b)\|^2}{\|BB^T(Bz^k - b)\|^2} B^T(Bz^k - b); \quad (13)$$

где B – матрица СЛАУ, возникающая при реализации методов (3)–(6) на каждом шаге;

- либо метод сопряженных градиентов (МСГ) в регуляризованном варианте

$$z^{k+1} = z^k - \gamma_k(D^k z^k - b) + \beta_k(z^k - z^{k-1}), \quad (14)$$

где γ_k и β_k вычисляются по известным формулам [9].

Условием останова итерационных процессов (10)–(14) является условие $\|Bz - b\|/\|b\| < \varepsilon$ при достаточно малом ε .

1.3. Обратная задача гравиметрии о нахождении поверхностей раздела в многослойной среде и методы ее решения

Предполагается, что нижнее полупространство состоит из нескольких слоев постоянной плотности, разделенных искомыми поверхностями $S_l, l = 1, \dots, L$, где L – число границ раздела (рис. 2). Гравитационный эффект от такого полупространства равен сумме гравитационных эффектов от всех поверхностей раздела.

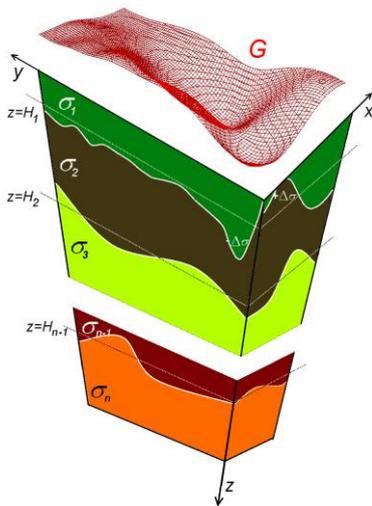


Рис. 2. Модель многослойной среды

Пусть поверхности раздела задаются уравнениями $z_l = z_l(x, y)$, скачки плотности на них равны $\Delta\sigma_l$, поверхности имеют горизонтальные асимптотические плоскости $z_l = H_l$, т. е.

$$\lim_{\substack{|x| \rightarrow \infty \\ |y| \rightarrow \infty}} |z_l(x, y) - H_l| = 0.$$

Поле от суперпозиции границ равно [2]

$$A(z) \equiv f \sum_{l=1}^L \Delta\sigma_l \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z_l^2(x, y)}} - \frac{1}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H^2 \right]^{1/2}} \right\} dx dy = \Delta g(x', y', 0), \quad (15)$$

где f – гравитационная постоянная, L – число границ раздела, $\Delta g(x, y) = \sum_{l=1}^L \Delta g_l$.

После дискретизации уравнения (15) на сетке $n = M \times N$, где задана правая часть $\Delta g(x, y)$, и аппроксимации интегрального оператора $A(z)$ по квадратурным формулам имеем вектор правой части $F(x, y)$ размерности $M \times N$, результирующий вектор решения

$$z(x, y) = [z_1(x, y), \dots, z_L(x, y)]$$

размерности $L \times M \times N$, матрицу производной оператора $A'(z^k)^T$ размерности $L \times M^2 \times N^2$ и результирующую систему нелинейных уравнений

$$\tilde{A}_n[z] = \tilde{F}_n. \quad (16)$$

Задача является недоопределенной, т.к. по заданной функции $\Delta g(x, y)$ мы пытаемся найти несколько неизвестных функций $z_l = z_l(x, y)$, что влечет неединственность решения.

В этом случае требуется либо находить близкое начальное приближение к решению, либо использовать адаптивные методы, которые за счет подходящей настройки параметров переводят итерации в область локальной сходимости.

Для решения системы нелинейных уравнений (2), возникающей после дискретизации уравнения (1) для двухслойной среды, кроме итеративно регуляризованных методов Ньютона

и Левенберга–Марквардта, успешно использовались линейризованные методы градиентного типа с дополнительными демпфирующими множителями γ , предложенными в работе [10]: например, метод наискорейшего спуска в этом случае имеет вид:

$$z^{k+1} = z^k - \gamma \frac{\|S(z^k)\|^2}{\|A'(z^k)S(z^k)\|^2} S(z^k) \equiv T(z^k), \quad (17)$$

$$S(z^k) = A'(z^k)^T (A(z^k) - F);$$

В работе [10] (см. также [3, 11]) показано, что при $\gamma < \gamma_0$, где γ_0 определяется исходными данными задачи, оператор шага $T(z^k)$ в процессе (17) являются псевдосжимающим, что влечет строго монотонную сходимость итераций

$$\|z^{k+1} - z^k\|^2 \leq \|z^k - z^{k-1}\|^2 - \nu \|z^{k+1} - z^k\|, \quad \nu > 0.$$

Введение дополнительного множителя $0 < \gamma < \gamma_0 < 1$ позволяет расширить область допустимых начальных приближений и на первых шагах процесса перевести итерационные точки в область локальной монотонной сходимости, тогда как при $\gamma = 1$ процесс может расходиться (см. [11]).

В настоящей работе для решения системы нелинейных уравнений (16), возникающей после дискретизации уравнения (15) решения задачи гравиметрии в многослойной среде, предлагаются следующие линейризованные итерационные методы градиентного типа с переменными демпфирующими множителями γ_i : линейризованный метод наискорейшего спуска (ЛМНС)

$$z_i^{k+1} = z_i^k - \gamma_i \frac{\|S(z^k)\|^2}{\|A'(z^k)S(z^k)\|^2} S_i(z^k), \quad (18)$$

$$S(z^k) = A'(z^k)^T (A(z^k) - F);$$

либо линейризованный метод минимальной ошибки (ЛММО)

$$z_i^{k+1} = z_i^k - \gamma_i \frac{\|A(z^k) - F\|^2}{\|S(z^k)\|^2} S_i(z^k), \quad (19)$$

где $\gamma_i \in [0, 1]$, z_i – i - компонента результирующего вектора $z(x, y)$; k – номер итерации.

Демпфирующие множители γ_i , зависящие от номера компоненты вектора z^k , выбираются специальным образом путем нормировки аномальных полей для каждой границы раздела, выделенных из общего гравитационного поля $\Delta g(x, y)$.

В качестве начального приближения используются горизонтальные асимптотические плоскости $z_l^0 = H_l$ ($l = 1, \dots, L$).

Условием останова итерационных процессов (18)–(19) является выполнение условия $\|A(z) - F\| / \|F\| < \varepsilon$ при достаточно малом ε .

2. РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЕ И ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Параллельные алгоритмы решения нелинейной обратной задачи гравиметрии о восстановлении поверхностей раздела для трехслойной среды на основе линейризованных методов градиентного типа, а также параллельные алгоритмы решения нелинейной обратной задачи гравиметрии о восстановлении поверхности раздела для двухслойной среды на основе методов градиентного типа, итеративно регуляризованных методов Ньютона и Левенберга–Марквардта и их модифицированных вариантов численно реализованы на многопроцессорном комплексе кластерного типа с распределенной памятью МВС-ИММ, многоядерном процессоре Intel и графических процессорах NVIDIA, входящими в состав суперкомпьютера «Уран» (ИММ УрО РАН). Параллельные алгоритмы реализованы на МВС-ИММ и «Уран» с помощью технологии MPI, на графических процессорах NVIDIA с помощью технологии CUDA и библиотеки CUBLAS, на многоядерном процессоре с помощью технологии OpenMP.

При реализации на МВС и многоядерном процессоре распараллеливание итерационных методов градиентного типа, методов типа Ньютона и Левенберга–Марквардта основано на разбиении матрицы A СЛАУ горизонтальными полосами на m блоков, а вектора решения z и вектора правой части b СЛАУ на m частей так, что $n = m \times L$, где n – размерность системы уравнений, m – число процессоров, L – число строк матрицы в блоке (рис. 3). На текущей итерации каждый из m процессоров вычисляет

свою часть вектора решения. В случае умножения матрицы A на вектор z каждый из m процессоров умножает свою часть строк матрицы A на вектор z . В случае матричного умножения $A^T A$ каждый из m процессоров умножает свою часть строк транспонированной матрицы A^T на всю матрицу A . Host-процессор (ведущий) отвечает за пересылки данных и также вычисляет свою часть вектора решения.

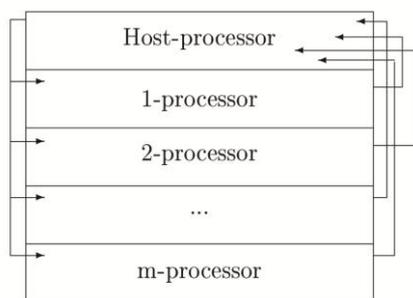


Рис. 3. Схема распределения данных

Заметим, что при выполнении векторно-матричных операций в итерационных методах с помощью технологии OpenMP создаются параллельные потоки и эффективно распределяется работа между ними.

При реализации на графических процессорах NVIDIA распараллеливание линейаризованных итерационных методов наискорейшего спуска и минимальной ошибки решения нелинейной задачи гравиметрии для трехслойной среды основано на принципах распараллеливания итерационных методов решения линейной задачи гравиметрии, описанных в работе [12], в сочетании с использованием библиотеки CUBLAS.

Для оптимизации работы с памятью при вычислениях используется следующий прием. Для сеток довольно большой размерности, когда данные могут не входить в память видеокарты, наилучшим по быстродействию оказывается метод вычисления элементов матрицы A' «на лету», т.е. вычисление значения элемента матрицы происходит в момент обращения к этому элементу без сохранения его в память видеокарты. Это позволяет существенно снизить количество обращений к памяти видеокарты и заметно ускорить процесс вычислений по сравнению с хранением матрицы A' в памяти Host-процессора и порционной загрузкой в видеоускоритель для вычислений.

Параллельные алгоритмы решения структурных обратных задач гравиметрии о восстановлении поверхностей раздела сред встроены в разработанную систему удаленных вычислений

«Специализированный Веб-портал решения задач на многопроцессорных вычислительных системах» [14], установленный в отделе некорректных задач анализа и приложений Института математики и механики УрО РАН. В настоящее время на Веб-портале предусмотрен запуск программ для решения задач гравиметрии на МВС-ИММ и суперкомпьютере «Уран», включающем в себя вычислительный кластер на основе видеоускорителей NVIDIA Tesla.

МВС-ИММ состоит из 128 AMD Opteron (2.6 ГГц), интерфейса GiEthernet и 256 Гб ОП.

Суперкомпьютер «Уран» состоит из 1784 Xeon (3.0 ГГц), интерфейса GiEthernet, 5328 Гб ОП и 30 вычислительных узлов с NVIDIA Tesla, содержащих по 8 GPU и по 2 шестиядерных CPU.

Специализированный Веб-портал предоставляет возможность пользователю через Веб-интерфейс выбирать тип многопроцессорного вычислителя с указанием числа процессорных узлов (МВС, NVIDIA Tesla, Multi-Core CPU), вид задачи и метод ее решения, загружать входные данные, получать выходные данные и графическое изображение результатов решения с помощью графических пакетов Surfjet и gnuplot. Для каждой задачи выводится время счета.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Результаты численных расчетов решения задачи гравиметрии с реальными данными для двухслойной среды на многопроцессорных системах приводятся в работах [13–14].

Здесь мы рассмотрим решение обратной задачи гравиметрии для модели трехслойной среды, разделенной двумя искомыми поверхностями S_1 и S_2 с модельными данными на площади S , имеющей размеры 90×100 км². Суммарное гравитационное поле на площади S находилось путем решения прямой задачи гравиметрии по формуле (15) с известными точными решениями:

$$z_1(x, y) = 5 - 2e^{-(x/10-3.5)^2-(y/10-2.5)^2} - 3e^{-(x/10-5.5)^2-(y/10-4.5)^2};$$

$$z_2(x, y) = 20 - 10e^{-(x/25-2.2)^2-(y/25-1.75)^2}.$$

Расстояния до асимптотических плоскостей принимались равными $H_1 = 5$ км и $H_2 = 20$ км. Соответствующие скачки плотности принима-

лись равными $\Delta\sigma_1 = 0.25 \text{ г/см}^3$ и $\Delta\sigma_2 = 0.3 \text{ г/см}^3$. Гравитационная постоянная

$$f = 6.67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г}\cdot\text{с}^2.$$

Шаги сетки составили $\Delta x = \Delta y = 1.0 \text{ км}$.

После дискретизации уравнения (15) на сетке имеем вектор правой части $F(x, y)$ размерности 9000, результирующий вектор решения $z(x, y) = [z_1(x, y), z_2(x, y)]$ размерности 18000, матрицу производной оператора $A'(z^k)^T$ размерности 18000×9000 и систему нелинейных уравнений вида (16).

Задача решалась на МВС-ИММ с помощью технологии MPI и вычислительном кластере NVIDIA Tesla с применением технологии OpenMP и технологии CUDA.

Для решения задачи использовались параллельные итерационные линеаризованные методы наискорейшего спуска и минимальной ошибки с демпфирующими множителями. Переменные множители находились путем специальной нормировки гравитационных полей для каждой поверхности раздела S_1 и S_2 , выделенных из суммарного гравитационного поля Δg по методике [4].

На рис. 4 изображены точные решения структурной обратной задачи гравиметрии для трехслойной среды. На рис. 5 изображено суммарное гравитационное поле Δg , полученное путем решения прямой задачи гравиметрии для области S по формуле (15). На рис. 6 изображены восстановленные поверхности раздела.

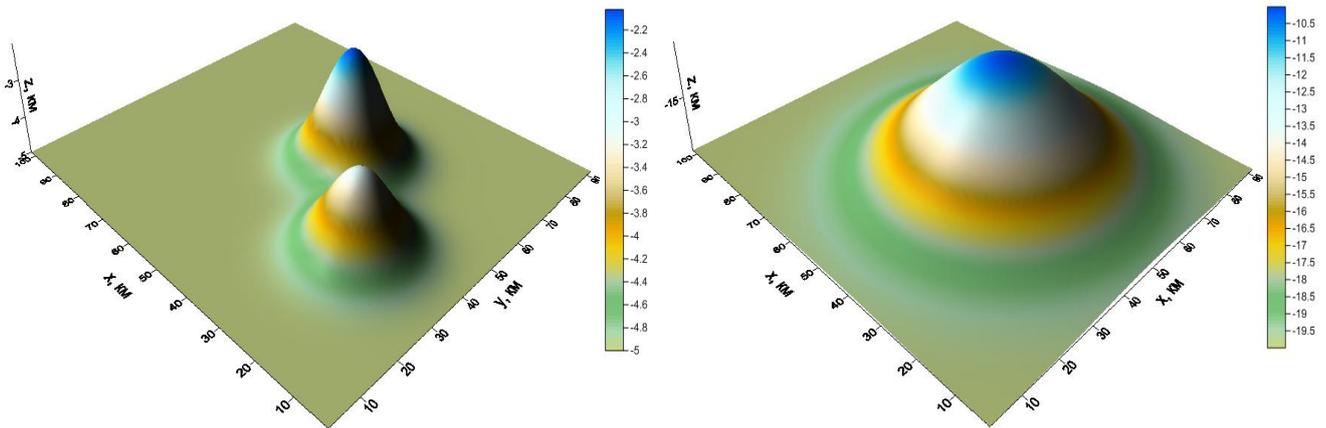


Рис. 4. Точные решения $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$

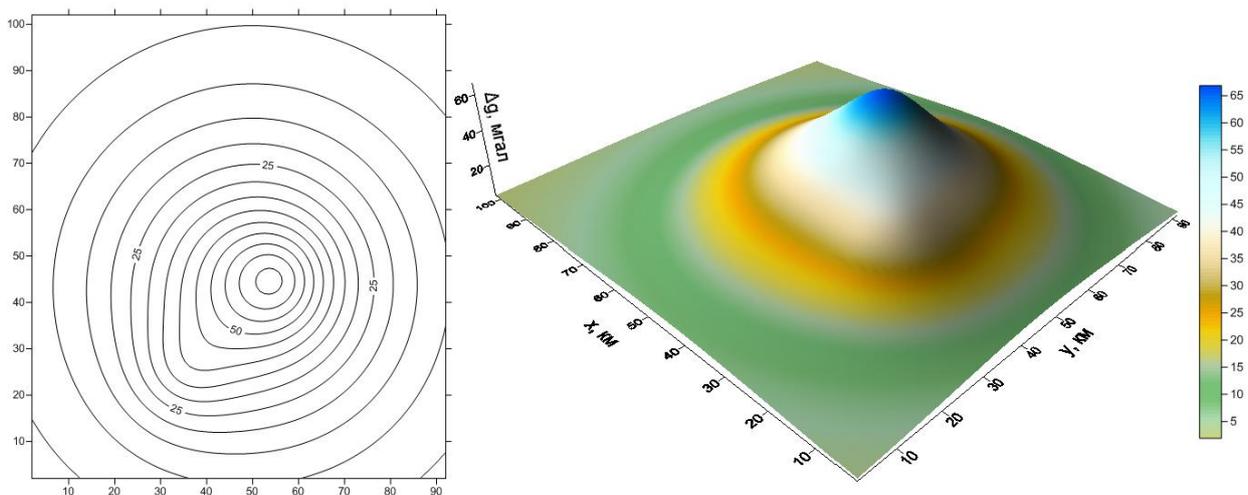


Рис. 5. Суммарное гравитационное поле

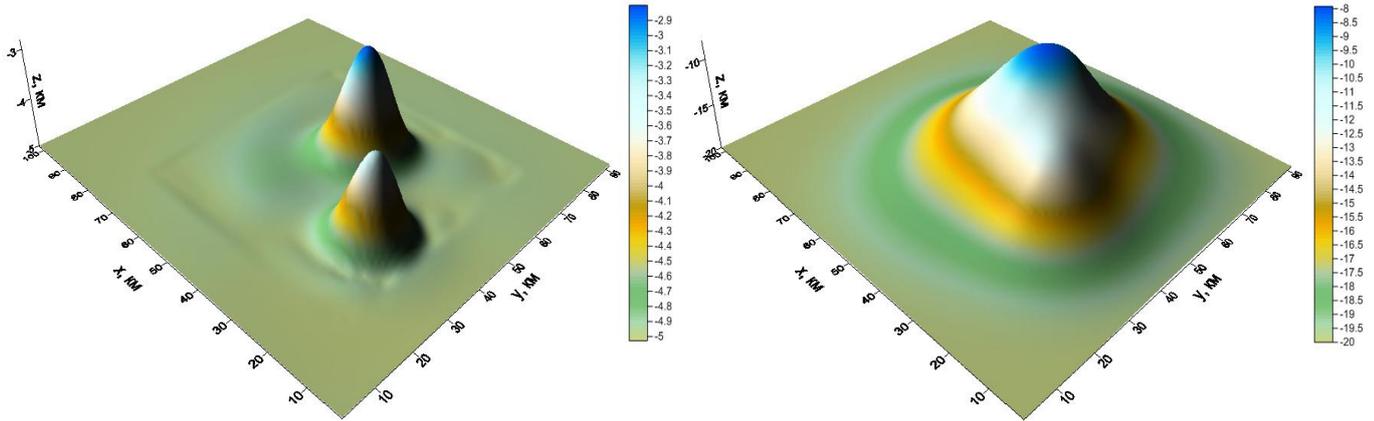


Рис. 6. Приближенные решения $\hat{z}_1(x, y)$ и $\hat{z}_2(x, y)$

При решении задачи методами ЛМНС и ЛММО относительные нормы невязок $\varepsilon = \|A(z) - F\| / \|F\|$ по сравнению с начальной нормой невязки $\varepsilon_0 = 1$ уменьшились на три порядка и составили $\varepsilon_{\text{ЛМНС}} \approx 0.005$ и $\varepsilon_{\text{ЛММО}} \approx 0.0055$ (100 итераций). Относительные погрешности $\delta_i = \|z_i^T - z_i^{np}\| / \|z_i^T\| \cdot 100\%$ для решений $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ составили 4.5 % и 3 %, соответственно.

В табл. 1 и 2 приводятся времена решения нелинейной задачи гравиметрии для трехслойной среды на многопроцессорном комплексе МВС-ИММ, графических процессорах NVIDIA Tesla и многоядерном процессоре Intel Xeon линейаризованными методами наискорейшего спуска (100 итераций) и минимальной ошибки (100 итераций).

Для сравнения времени счета решения задачи введем коэффициенты ускорения и эффективности параллельных алгоритмов

$$S_m = T_1 / T_m, \quad E_m = S_m / m, \quad S = T_1 / T_2,$$

где T_m – время выполнения параллельного алгоритма на МВС-ИММ либо на многоядерном процессоре с числом процессоров или ядер $m (m > 1)$, T_1 – время выполнения последовательного алгоритма на одном процессоре либо на одном ядре, T_2 – время решения задачи на видеоускорителе. T_m представляет собой совокупность чистого времени счета и накладных расходов.

Таблица 1

Решение задачи методом ЛМНС

Вычислитель	T_m , мин.	S_m (S)	E_m
Intel Xeon (1 ядро)	18.94	—	—
Intel Xeon (2 ядра)	9.55	1.98	0.99
Intel Xeon (3 ядра)	6.52	2.90	0.97
Intel Xeon (4 ядра)	4.48	3.88	0.97
Intel Xeon (5 ядер)	3.98	4.76	0.95
Intel Xeon (6 ядер)	3.41	5.55	0.92
Intel Xeon (7 ядер)	3.14	6.03	0.86
NVIDIA Tesla (448 ядер)	0.49	38.7	—

Таблица 2

Решение задачи методом ЛММО

Вычислитель	T_m , мин.	S_m (S)	E_m
Intel Xeon (1 ядро)	18.57	—	—
Intel Xeon (2 ядра)	9.31	1.99	0.99
Intel Xeon (3 ядра)	6.40	2.90	0.97
Intel Xeon (4 ядра)	4.80	3.87	0.97
Intel Xeon (5 ядра)	3.92	4.74	0.95
Intel Xeon (6 ядер)	3.37	5.51	0.92
Intel Xeon (7 ядер)	3.11	5.97	0.85
NVIDIA Tesla (448 ядер)	0.46	40.4	—
МВС-ИММ (1 проц.)	19.98	—	—
МВС-ИММ (2 проц.)	10.98	1.82	0.91
МВС-ИММ (3 проц.)	8.02	2.49	0.83
МВС-ИММ (5 проц.)	5.57	3.58	0.71
МВС-ИММ (8 проц.)	5.15	3.87	0.48

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для решения трехмерной структурной обратной задачи гравиметрии о восстановлении поверхностей раздела в многослойной среде предложены линейризованные методы наискорейшего спуска и минимальной ошибки с переменными демпфирующими множителями.

На основе итеративно регуляризованных методов типа Ньютона, Левенберга–Марквардта и линейризованных методов градиентного типа решения задач гравиметрии для моделей двухслойной и трехслойной среды разработаны параллельные алгоритмы, численно реализованные на многопроцессорных вычислительных системах различного типа: многопроцессорном комплексе МВС-ИММ, графических процессорах NVIDIA Tesla и многоядерном процессоре Intel Xeon с высокой эффективностью распараллеливания с использованием новых вычислительных технологий.

Проведено исследование эффективности и оптимизация параллельных алгоритмов.

Решена модельная задача для трехслойной среды.

Параллельные алгоритмы встроены в разработанную систему удаленных вычислений «Специализированный Веб-портал решения задач на многопроцессорных вычислительных системах».

Результаты вычислений показывают, что использование линейризованных итерационных методов градиентного типа при решении структурных обратных задач гравиметрии для двухслойной и трехслойной среды позволяет получать корректные решения.

Применение параллельных алгоритмов при решении обратных задач гравиметрии на многопроцессорных вычислительных системах существенно уменьшает время счета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Нумеров Б. В.** Интерпретация гравитационных наблюдений в случае одной контактной поверхности // ДАН СССР. 1930. № 21. С. 569–574. [B. V. Numerov, "Interpretation of gravitational observations in the case of one contact surface," (in Russian), *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, pp. 569-574, 1930.]

2. **Мартышко П. С., Ладовский И. В., Цидаев А. Г.** Построение региональных геофизических моделей на основе комплексной интерпретации гравитационных и сейсмических данных // Физика земли. 2010. Т. 46. № 11. С. 23–35. [P. S. Martyshko, I. V. Ladovskii, and A. G. Tsidaev, "Construction of regional geophysical models based on the joint interpretation of gravitatu and seismic data," *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, vol. 46, no. 11, pp. 931-942, 2010.]

3. **Васин В. В., Еремин И. И.** Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. Екатеринбург: УрО РАН. 2005. [V. V. Vasin and I. I. Eremin, *Operators and Iterative Processes of Fejer Type. Theory and Applications*. Berlin–NewYork: Walter de Gruyter, 2009.]

4. **Bakushinsky A., Goncharsky A.** Ill-Posed Problems: Theory and Applications. London: Kluwer Akad. Publ., 1994. [A. Bakushinsky and A. Goncharsky. *Ill-Posed Problems: Theory and Applications*. London: Kluwer Akad. Publ. 1994.]

5. **Мартышко П. С., Пруткин И. Л.** Технология разделения источников гравитационного поля по глубине // Геофизический журнал. 2003. Т. 25. № 3. С. 159–168. [P. S. Martyshko and I. L. Prutkin, "Technology of separation of gravitational field sources in depth," (in Russian), *Geofiz. Zh.*, vol. 25, no. 3, pp. 159-168, 2003.]

6. **Васин В. В.** Модифицированные процессы ньютоновского типа, порождающие фейеровские аппроксимации регуляризованных решений нелинейных уравнений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 2. С. 85–97. [V. V. Vasin, "Modified processes of Newton type generating Fejer approximations of regularized solutions to nonlinear equations," (in Russian), *Trudy Inst. Math. Mekh. UrO RAN*, vol. 19, no. 2, pp. 85-97, 2013.]

7. **Hanke M.** A regularization Levenberg–Maquardt scheme with applications to inverse groundwater filtration problems // *Inverse Problems*. 1997. Vol. 13. P. 79–95. [M. Hanke, "A regularization Levenberg–Maquardt scheme with applications to inverse groundwater filtration problems," *Inverse Problems*, vol. 13, pp. 79-95, 1997.]

8. **Васин В. В.** Метод Левенберга–Марквардта для аппроксимации решений нерегулярных операторных уравнений // Автоматика и телемеханика. 1993. № 3. С. 28–37. [V. V. Vasin, "Levenberg-Marquardt method for approximation of solutions to irregular operator equations," (in Russian), *Automatika i Telemekhanika*, no.3, pp. 28-37, 1993.]

9. **Фаддеев В. К., Фаддеева В. Н.** Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1963. [V. K. Faddeev and V.N. Faddeeva, *Computational Methods of Linear Algebra*, (in Russian). Moscow: Gostekhizdat, 1963.]

10. **Васин В. В.** О сходимости методов градиентного типа для нелинейных уравнений // ДАН. 1998. Т. 359. № 1. С. 7–9. [V. V. Vasin, "On convergence of gradient type methods for nonlinear equations," (in Russian), *Dokl. RAN*. vol. 359, no. 1, pp. 7-9, 1998.]

11. **Vasin V. V., Skorik G. G.** Iterative processes of gradient type with applications to gravimetry and magnetometry inverse problems // *J. Inverse and Ill-Posed Problems*. 2010. Vol. 18, no. 8. P. 855–876. [V. V. Vasin and G. G. Skorik, "Iterative processes of gradient type with applications to gravimetry and magnetometry inverse problems," *J. Inverse and Ill-Posed Problems*, vol. 18, no. 8, pp. 855-876, 2010.]

12. **Акимова Е. Н., Белоусов Д. В.** Распараллеливание алгоритмов решения линейной обратной задачи гравиметрии на МВС-1000 и графических процессорах // Вестник ННГУ. 2010. № 5 (1). С. 193–200. [E. N. Akimova and D. V. Belousov, "Parallelization of algorithms for solving the linear Inverse gravimetry problem on MVS-1000 and graphic pro-

cessors," (in Russian), *Vestnik NNGU*, no. 5 (1), pp. 193-200, 2010.]

13. **Акимова Е. Н.** Параллельные алгоритмы решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии на МВС-1000 // Вестник ННГУ. 2009. № 4. С. 181–189. [E. N. Akimova, "Parallel algorithms for solving the gravimetry and magnetometry inverse problem on MVS-1000," (in Russian), *Vestnik NNGU*, no. 4, pp. 181-189, 2009.]

14. **Акимова Е. Н., Белоусов Д. В., Мисилов В. Е.** Алгоритмы решения обратных геофизических задач на многопроцессорных вычислительных системах // Сибирский журнал вычислительной математики. 2013. Т. 6. № 2. С. 107–121. [E. N. Akimova, D. V. Belousov, and V. E. Misilov, "Algorithms for solving inverse geophysical problems on parallel computing systems," *Numerical Analysis and Applications*, vol. 6, no. 2, pp. 98-110, 2013.]

ОБ АВТОРАХ

АКИМОВА Елена Николаевна, вед. науч. сотр. отд. некорректных задач анализа и приложений ИММ УрО РАН, проф. каф. выч. методов и уравнений мат. физики УрФУ. Дипл. математик (Уральск. гос. ун-т, Екатеринбург, 1982). Д-р физ.-мат. наук (мат. моделир., числ. методы и компл. программ, ЮУрГУ, 2009). Иссл. в обл. паралл. алгоритмов решения прикл. задач.

ВАСИН Владимир Васильевич, гл. науч. сотр. того же отд., проф. каф. выч. математики УрФУ. Дипл. математик (Уральск. гос. ун-т, Екатеринбург, 1964). Д-р физ.-мат. наук (выч. математика, ВЦ СО РАН, 1985), чл.-корр. РАН (1994). Иссл. в обл. теории методов решения некорректных задач.

МИСИЛОВ Владимир Евгеньевич, асп. Дипл. мат.-программист (УрФУ, 2010). Магистр по прикл. мат. и информатике (там же, 2012). Иссл. в обл. паралл. вычислений на многопроц. системах.

METADATA

Title: Algorithms for solving inverse gravimetry problems of finding the interface between media on multiprocessing computer systems

Authors: E. N. Akimova, V. V. Vasin, V. E. Misilov.

Affiliation: Institute of mathematics and mechanics of Ural Branch RAS (IMM of UrB RAS); Ural Federal University (UrFU), Ekaterinburg, Russia.

Email: aen15yandex.ru, vasin@imm.uran.ru, out.mrscreg@gmail.com.

Language: Russian.

Source: *Vestnik UGATU* (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 18, no. 2 (63), pp. 208-217, 2014. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

Abstract: For solving three-dimensional structural inverse gravimetry problem of finding the interface in multilayer medium, the linearized iterative gradient methods of steepest descent and minimal error with variable damping factors are proposed. On the base of Newton, Levenberg–Marquardt and linearized gradient methods, effective parallel algorithms for two- and three-layered media models were implemented on the MVS-IMM parallel computing system, the Intel multi-core CPU and NVIDIA graphics pro-

cessors of Supercomputer "Uran". Research of parallel algorithms effectiveness and optimization was carried out. The parallel algorithms were incorporated into the developed remote computing service system "Specialized Web-Portal for Solving Geophysical Problems on Multiprocessing Computer Systems". The model problem for three-layered media is solved.

Key words: inverse gravity problem; iterative methods; parallel algorithms; multiprocessing computer systems.

About authors:

AKIMOVA, Elena Nikolaevna, Leading research scientist, Institute of Mathematics and Mechanics of UrB RAS, Prof., Dept. Num. Meth. and Eq. of Math. Phys., IRT of Ural Federal University. Dr. of Phys. and Math. Sciences (Chelyabinsk, SUSU, 2009).

VASIN, Vladimir Vasilevich, Main research scientist, Institute of Mathematics and Mechanics of UrB RAS, Prof., Dept. Comp. Math., IMCS of Ural Federal University. Dr. of Phys. and Math. Sciences (Novosibirsk, Comp. Center SB RAS, 1985), Corresponding member of RAS (1994).

MISILOV, Vladimir Evgenievich, (PhD) Student, Institute Mathematics and Mechanics of UrB RAS. Dipl. Math. Support of Inf. System (Ekaterinburg, UrFU, 2010). Master of Appl. Math. and Inform. (UrFU, 2012).