ISSN 1992-6502 (Print) Вестник УГАТУ ISSN 2225-2789 (Online)
2014. Т. 18, № 3 (64). С. 57–66 http://journal.ugatu.ac.ru

УДК 629.73:519.242

Моделирование процессов ГТД на основе планирования эксперимента в критериальной форме подобия

Г. К. Агеев , А. С. Гишваров, М. Н. Давыдов

ad@mail.rb.ru

ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

Поступила в редакцию 22 февраля 2014 г.

Аннотация. Рассматривается проблема снижения размерности при планировании эксперимента сложных многофакторных процессов авиационных ГТД и энергоустановок. Предлагается объединить методы теории планирования эксперимента и теории подобия, что позволит совместно реализовать их преимущества. Приводятся методы построения критериев подобия и примеры применения методов подобия при регрессионном моделировании процессов расходования ресурса элементов узлов ГТД.

Ключевые слова: планирование эксперимента; критерий подобия; энергоустановка; ГТД.

В настоящее время при исследовании сложных многофакторных процессов авиационных ГТД и энергоустановок широко используется метод оптимального планирования эксперимента (ПЭ), который позволяет [1–3]:

- уменьшить число опытов (объем испытаний) при обеспечении заданной точности эксперимента;
- установить взаимосвязь между факторами исследуемого процесса и исследовать влияние отдельных факторов на изменение параметров и отсеять второстепенные факторы;
- получить математическую зависимость между факторами, используемую для прогнозирования изменения параметров ГТД и оптимального ПЭ.

При этом необходимо отметить еще одну особенность. Экспериментальные исследования (испытания) агрегатов ГТД и энергоустановок, как правило, проводят на ограниченном числе образцов при различном сочетании действующих факторов. В случае ограниченного объема испытаний и большого числа исследуемых факторов актуальным является решение задачи по снижению размерности формируемой регрессионной модели, константы которой определяются по результатам эксперимента. Очевидно, что чем больше независимых факторов характеризуют исследуемый процесс при моделировании, тем больше объем потребного эксперимента. Это неизбежно усложняет применение ПЭ при моделировании. Причем в некоторых случаях число факторов может превышать число экспериментальных точек. Например, при числе независимых факторов в регрессионной модели равном 8, количество необходимых опытов при полном факторном эксперименте (ПФЭ) равно 2^{10}=1024, что, естественно, делает нереальным проведение экспериментального исследования.

Из теории и практики исследования технических систем известно [4], что уменьшить размерность решаемой задачи позволяет применение методов теории подобия. Поэтому целесообразным является объединение методов теории планирования эксперимента и теории подобия, что позволяет совместно реализовать их преимущества.

Объединение методов теории подобия и методов теории ПЭ для планирования и анализа многофакторных экспериментальных исследований позволяет полнее использовать преимущества теории ПЭ:

- дополнительно уменьшить число исследуемых независимых факторов в ПЭ путем построения обобщенных критериальных моделей;
- получить зависимости для пересчета и анализа результатов эксперимента, полученных в различных точках факторного пространства;
- построить меру приближенного подобия многофакторных моделей и планов эксперимента.

В данном случае физический процесс влияния независимых факторов на выходную величину:

$$y = \varphi(x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_n) \quad (1)$$

описывается регрессионной моделью:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x_i^2 + ..., \quad (2)$$

где b_0, b_i, b_{ij}, b_{ii} – оценки коэффициентов регрессии, определяемые по методу наименьших квадратов.

Согласно второй теореме подобия с помощью анализа размерностей или преобразованием подобия зависимость (1) представляется в критериальной форме [5, 6]:

$$\pi_y = \varphi(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_{n_\pi}), \quad (3)$$

где π_y – критериальный комплекс, включающий функцию отклика y; $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_{n_\pi}$ – критериальные комплексы, включающие факторы $x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_n$, определяющие исследуемый процесс ($n_\pi = n - k$).

Таким образом, при планировании эксперимента на основе теории подобия в первую очередь осуществляют переход из одной системы единиц измерения к другой, обобщая факторы в критериальные комплексы или представляя их в виде коэффициентов подобия.

Критериальное уравнение регрессии принимает вид:

$$\pi_y = b_0 + \sum_{i=1}^{n_\pi} b_i \pi_i + \sum_{i,j=1}^{n_\pi} b_{ij} \pi_i \pi_j + \sum_{i=1}^{n_\pi} b_{ii} \pi_i^2 + ... \; . \quad (4)$$

Информация об исследуемом процессе в данном случае представлена в сжатой форме за счет сокращения числа переменных с n до $(n - k)$ критериальных комплексов.

Для реализации полного или дробного факторного эксперимента необходимо соблюдение условий симметричности, нормировки и ортогональности матриц планирования эксперимента:

$$\sum_{u=1}^{N} \pi_{ju} = 0; \quad \sum_{u=1}^{N} \pi_{ju}^2 = N; \quad \sum_{u=1}^{N} \pi_{ju} \pi_{su} = 0, \quad (5)$$

где u – столбцы матрицы планирования; N – число опытов в эксперименте.

В линейном случае при проведении регрессионного моделирования в критериальной форме подобия используются:

- коэффициенты регрессии:

$$b_i = \left(\sum_{u=1}^{N} \pi_{ju} \pi_y \right) \Big/ N; \quad i = \overline{0, n}; \quad u = \overline{1, N}; \quad (6)$$

- дисперсия коэффициентов регрессии:

$$\sigma_{b_i}^2 = \sigma_{\pi_y}^2 \big/ C_{ii} = \sigma_{\pi_y}^2 \big/ N, \quad (7)$$

где $C_{ii} = \sum_{u=1}^{N} \pi_{iu}^2$; $i = \overline{0, \pi_n}$; $u = \overline{1, N}$;

- ковариация коэффициентов регрессии:

$$\operatorname{cov}\{b_i, b_j\} = C_{ij} \sigma_{\pi_y}^2 = 0; \; i, j = \overline{0, \pi_n}; \; i \neq j, \quad (8)$$

где $C_{ii} = \sum_{u=1}^{N} \pi_{iu} \pi_{ju}$;

- коэффициент корреляции:

$$\rho\{b_i, b_j\} = C_{ij} \Big/ \sqrt{C_{ii} C_{ij}} = 0; \quad (9)$$

- остаточная сумма квадратов:

$$S^2 = \sum_{u=1}^{N} \pi_{ju}^2 - N \sum_{i=0}^{n} b_i^2; \quad (10)$$

- дисперсия адекватности:

$$\sigma_{\text{ад}}^2 = S^2 / \eta; \quad (11)$$

где $\eta = N - (n_\pi + 1)$ – число степеней свободы;

- критерий Фишера:

$$F = \sigma_{\text{ад}}^2 \big/ \sigma_{\pi_y}^2, \quad (12)$$

где $\sigma_{\pi_y}^2$ – дисперсия критериальной функции отклика.

Определение уровней и интервалов варьирования факторов. Выбор плана многофакторного эксперимента с использованием регрессионной модели включает определение уровней и интервалов варьирования факторов, выбор оптимального плана проведения эксперимента по принятому критерию оптимальности, составление матрицы ПЭ. При таком планировании регистрируются не отдельные факторы, а значения критериев подобия. Если прямое определение критериев подобия невозможно, значения критериев вычисляются по результатам регистрации факторов путем пересчета с помощью коэффициентов подобия.

Определение условий проведения эксперимента. Одним из основных вопросов при планировании многофакторных испытаний является определение условий проведения эксперимента. Применение методов многофакторного планирования эксперимента усложняется тем, что шаг варьирования критериев подобия зависит от интервала варьирования входящих в критерии факторов. При выборе экспериментальной области факторного пространства используют анализ априорной информации, учитывая точность измерения факторов и диапазон выходного параметра измерения (отклика). Известно, например, что из-за слишком узко выбранных интервалов варьирования факторов линейные коэффициенты регрессии могут быть незначимы, а линейная модель адекватна. Поэтому целесообразно выбирать более широкие диапазоны варьирования факторов, закладывая запасы работоспособности по отношению к действующим факторам. Однако следует иметь в виду, что увеличение экспериментальной области может потребовать для получения регрессионной модели, адекватно отображающей результаты экспериментов, усложнения видов планирования, например, от линейных перейти к нелинейным планам эксперимента.

Определение шага варьирования критериев. При планировании эксперимента в критериальной форме подобия задание шага варьирования критериев может проводиться двумя способами:

- статистическим моделированием факторов в области их изменения, для каждой реализации переменных вычисляя критерии подобия, для которых затем определяется шаг варьирования;
- задают шаг варьирования факторов и соответственно определяются интервалы варьирования критериев по значениям, которые они принимают при изменении составляющих переменных.

Применение теории подобия позволяет сократить число исследуемых факторов в модели с n до $(n - k)$ размерных величин и таким образом существенно расширяет возможности применения многофакторных планов эксперимента за счет увеличения общего числа учитываемых переменных.

Таким образом, сочетание теории ПЭ и теории подобия позволяет:

- выделить наиболее существенные критерии подобия для исследуемого процесса и использовать критерии при установлении требований к условиям испытаний (эксперимента);
- провести оптимальное планирование эксперимента в критериальной форме подобия с целью установления инвариантов подобия для распространения полученных результатов на класс исследуемых явлений;
- оценить с помощью критериев подобия меру приближения, упрощенных многофакторных моделей исследуемых процессов базовым, учитывающим заданные требования к характеристикам системы и условия ее эксплуатации.

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ КРИТЕРИЕВ ПОДОБИЯ

При построении моделей эффективным является применение уравнений подобия. При этом решаются две основные задачи:

- построение физически значимых критериев подобия, характеризующих исследуемый процесс;
- построение уравнений подобия и на их основе – математических моделей изменения параметров агрегатов по наработке в критериальной форме.

На практике критерии подобия можно определить двумя методами:

- с помощью анализа систем уравнений;
- с помощью анализа размерности определяющих факторов [3–5].

Данные методы дают сходные результаты, но имеют свои преимущества и недостатки:

- определение критериев подобия на основе анализа систем уравнений позволяет получить более обоснованные результаты;
- при исследовании достаточно сложных систем, не имеющих математического описания, используют метод анализа размерностей. При физическом моделировании возможно применение обоих методов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТЕРИЕВ ПОДОБИЯ МЕТОДОМ АНАЛИЗА СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Формирование проводят на основе математического описания рассматриваемого явления. Существует три метода определения критериев подобия на основе анализа систем уравнений (рис. 1):

- метод подобных преобразований;
- метод интегральных аналогов;
- метод приведения уравнений к безразмерному виду.

Наиболее простым и распространенным является метод интегральных аналогов, основанный на правиле замещения. Определение критериев подобия в данном случае проводят в следующей последовательности (рис. 2):

- дифференциальные уравнения, входящие в состав математического описания явлений, записывают в форме интегральных аналогов;
- одновременно все входящие в уравнение компоненты векторов по осям координат заменяют абсолютными значениями векторов, а координаты заменяют характерным линейным размером системы;

- интегральные аналоги приводят к безразмерному виду путем деления на один из членов уравнения;
- анализируют сформированные критерии подобия.

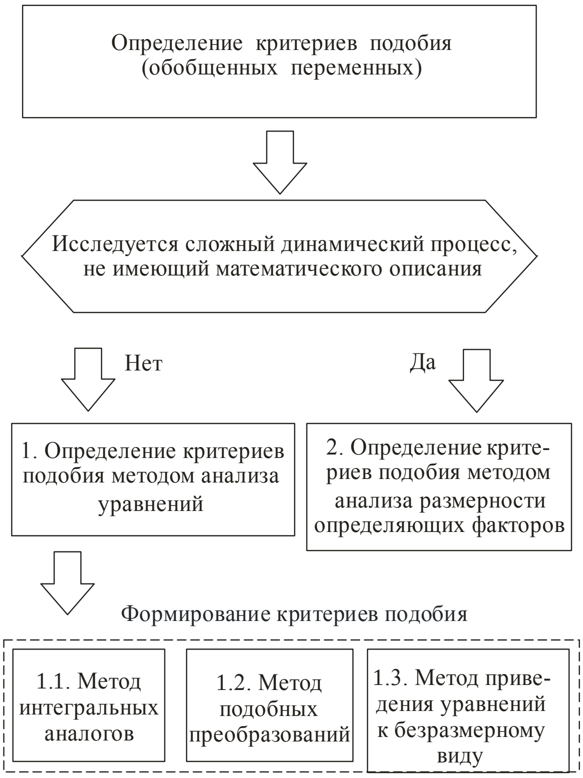

Рис. 1. Методы определения критериев подобия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТЕРИЕВ ПОДОБИЯ МЕТОДОМ АНАЛИЗА РАЗМЕРНОСТИ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ФАКТОРОВ

В тех случаях, когда известен только набор определяющих факторов, характеризующих процесс, но неизвестны уравнения, связывающие их между собой, целесообразно применять теорию размерностей. В этом способе выбор номенклатуры физических параметров зависит от исследователя, и этот этап в процедуре построения критериев подобия является наиболее ответственным.

Для выбора определяющих физических параметров можно использовать методы планирования экспериментов или экспертные методы.

Имеется несколько способов получения критериев подобия на основе установленной номенклатуры параметров, характеризующих физическую сущность исследуемого процесса.

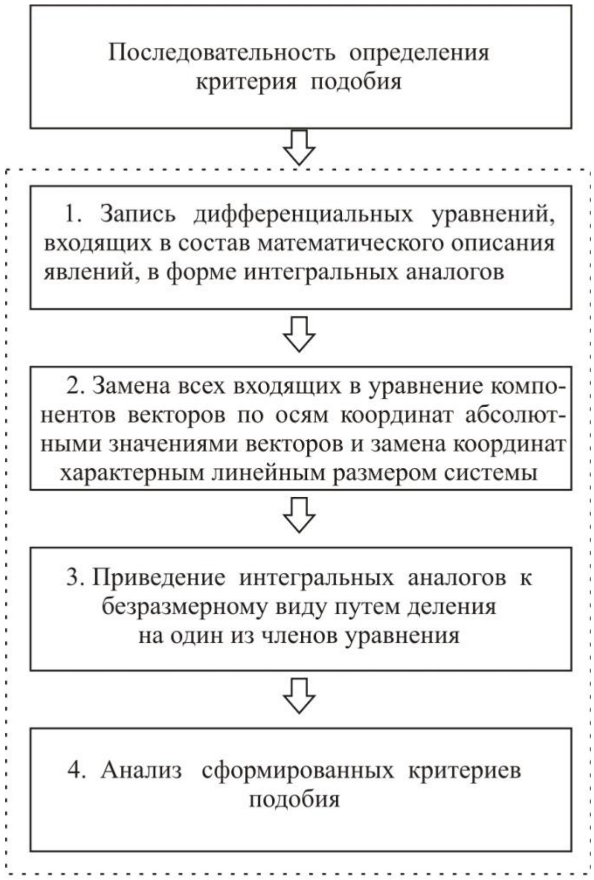

Рис. 2

Наиболее эффективным способом, позволяющим использовать средства вычислительной техники, является алгоритм, разработанный В. А. Вениковым на основе методов линейной алгебры. Он состоит из следующих этапов [5]:

- составление списка параметров x_1, ..., x_n характеризующих исследуемый процесс;
- составление матрицы из показателей степени размерностей параметров;
- выявление числа k независимых между собой параметров путем вычисления ранга матрицы;
- расчет значений показателей степеней $г_1$, ..., $г_n$ основных параметров;
- определение выражений критериев подобия во всех формах записи.

Набор полученных в результате осуществления описанного алгоритма расчетов критериев подобия избыточен, поскольку он включает все возможные варианты безразмерных показателей. Из данного перечня необходимо выделить те критерии подобия, которые характеризуют основные свойства исследуемого процесса. При выборе критериев подобия целесообразно исходить из условий, установленных в работе [5]:

- размерные параметры должны быть разнесены по различным критериям подобия;
- показатели степеней параметров, входящих в критерии подобия, должны быть целыми числами, наименьшими по абсолютной величине.

Чтобы выполнить первое условие, необходимо диагонализировать матрицу размерностей. Для выполнения второго условия матрица размерностей должна иметь в своем составе максимум нулей при минимуме суммы абсолютных значений всех чисел матрицы. Кроме того, в некоторых конкретных условиях целесообразно объединять критерии подобия путем их преобразования. При этом должно соблюдаться ограничение: сумма показателей степеней у размерности длины и времени должна находиться в диапазоне ±3.

Таким образом, процесс определения критерия подобия содержит два этапа, выполняемых на эвристическом уровне:

- начальный, когда устанавливается номенклатура основных размерных параметров;
- конечный, когда выбираются основные критерии подобия и осуществляется их объединение.

В некоторых конкретных условиях целесообразно объединять критерии подобия путем их преобразования.

В дальнейшем после получения методом размерности обобщенных переменных в виде безразмерных степенных комплексов устанавливают влияние каждой из таких обобщенных переменных на выходные характеристики исследуемого процесса. Полученные методом размерности масштабные коэффициенты перехода от модели к натуре по своему виду не отличаются от аналогичных масштабных коэффициентов, полученных методом теории подобия (этот метод иногда называют методом интегральных аналогов). Однако из-за невозможности корректно получить единственное решение для проверки правильности коэффициентов, полученных методом размерности, необходим большой объем натурных и модельных экспериментов в широком диапазоне входных параметров, поэтому в ряде случаев это ставит под сомнение целесообразность моделирования с применением метода размерности.

В этом плане рациональным является применение комбинированного метода расчета масштабных факторов, предназначенного для решения задач сложных неоднородных систем и сочетающего строгость теории подобия с удобством и простотой описания, характерным для метода размерности. При этом при моделировании вводится система допущений и ограничений, которые дают возможность достаточно строго получить единственное решение для масштабных коэффициентов перехода от модели к натуре по каждому параметру.

Пример 1. Определение критериев подобия методом анализа уравнений. Для прогнозирования износа элементов агрегата ГТД на стадии проектирования требуется определить закономерность износа рабочих поверхностей пар трения по наработке. Для проведения испытаний образцов на стенде необходимо установить условия физического моделирования, сформировать критерии подобия. Для выявления безразмерных соотношений параметров, входящих в математическое описание явления износа, необходимо представить уравнения в форме интегральных аналогов, опустив знаки операторов. Система основных уравнений износа элементов изделия состоит из зависимостей, характеризующих рассматриваемое явление. Процесс распространения теплоты в твердом теле характеризуется уравнением Фурье:

$$\frac{dt}{d\tau} = a\nabla^2 t, \quad (13)$$

где t – температура твердого тела, °С; a – коэффициент температуропроводности, определяющий темп процесса перестройки температурного поля ($a = \lambda/C_{\text{р}}$); $C_{\text{р}}$ – теплоемкость материала; ρ – плотность материала; λ – теплопроводность; ∇^2 – оператор Лапласа, обозначающий операцию суммирования вторых производных от скалярной величины по координатам.

Это уравнение получено на основе закона сохранения и превращения энергии, в соответствии с которым изменение внутренней энергии элемента должно равняться количеству теплоты, отводимому в окружающую среду.

Уравнение (13) распространения теплоты в твердом теле в форме интегральных аналогов представим в следующем виде:

$$t / \tau \approx at / d^2. \quad (14)$$

Основное уравнение, характеризующее процесс распространения теплоты в окружающей среде, выражает закон сохранения и превращения энергии, сформулированный применительно к условиям взаимодействии элемента с окружающим воздухом. Это уравнение, называемое уравнением энергии Фурье–Кирхгофа, записываем в следующем виде:

$$\frac{at_B}{\partial\tau} + \vec{\upsilon}\,\text{grad}\,t_B = a_B\nabla^2 t_B, \quad (15)$$

где t_B и a_B – соответственно температура и температуропроводность воздуха.

Уравнение распространения теплоты в окружающей среде в форме интегральных аналогов имеет следующий вид:

$$t/\tau \approx \upsilon t/d \approx at/d^2. \qquad (16)$$

Поделив соотношения (13) и (16) на t/τ, получим следующую систему безразмерных соотношений из формулы (14):

$$a\tau/d^2 = \text{inv}; \qquad (17)$$

из формулы (15) следует:

$$\upsilon\tau/d = \text{inv};\ a\tau/d^2 = \text{inv}. \qquad (18)$$

Комплекс $d\tau/d^2 = F_o$, называемый критерием Фурье, характеризует временное подобие сопоставляемых тепловых явлений. При распространении теплоты в твердом теле, когда скорость протекания подобных процессов зависит исключительно от величин, определяющих геометрические d и физические a свойства тела, критерий Фурье выражает влияние этих величин на темп развития явления. Все подобные явления характеризуются одним и тем же значением критерия F_o. Таким образом, равенство значений этого критерия является необходимым условием подобия явлений.

Комплекс $\upsilon\tau/d = H_o$ – критерий гомохронности – показывает, что подобие распределения скоростей на границах системы должно устанавливаться в сходственные моменты времени; иначе говоря, в подобных системах изменение кинематических условий должно происходить гомохронно.

Анализ полученных критериев показывает, что ни один из них не содержит температуры. Это объясняется тем, что исходные дифференциальные уравнения (13) и (15) однородны относительно температуры, вследствие чего при формировании безразмерных комплексов она сокращается. Таким образом, температура может входить в уравнение подобия только в виде симплекса t/t_0 (здесь t_0 – средняя температура на поверхности трения в начальный момент торможения).

Математического описания процесса пластического деформирования, сопровождающего износ элементов изделия, в настоящее время не существует. Результаты исследований показывают, что характер этого процесса достаточно полно определяется коэффициентом трения и схемой фрикционного контакта. Следовательно, процесс пластического деформирования при износе может быть косвенно учтен через зависимости износа от коэффициента трения И = φ *(f)*. Это функциональное выражение характеризует, кроме того, влияние на износ микрогеометрии поверхности и физико-механических свойств материала пары трения.

Отделение частиц материала (продуктов износа) с поверхности трения является заключительным этапом в последовательности процессов, сопровождающих износ. Механизм разрушения твердых тел в основном зависит от вида материала, характера нагружения и нагрузки, вызывающей разрушение. Зависимость линейного износа от удельной нагрузки, полученной на основе закона сохранения энергии, в дифференциальной форме имеет вид:

$$dИ_Л = A' p^n dl, \qquad (19)$$

где A' – коэффициент, зависящий от вида материала и характера нагружения; n – показатель степени.

Уравнение (19) в общем виде описывает механизм разрушения твердых тел, в результате которого образуются продукты износа. Из уравнений (16) и (17) можно получить следующие инвариантные соотношения:

$$f = \text{inv};\ И_Л/d = \text{inv};\ p_1/p_2 = \text{inv}, \qquad (20)$$

где индексы 1, 2 означают принадлежность параметра к одному из ее сопоставляемых процессов.

Полученные инвариантные соотношения приводят к критериям подобия:

- f – критерий, определяющий подобие фрикционных свойств материалов трущихся тел и вида фрикционной связи;
- критерий $И_Л/d$ представляет собой отношение линейного износа к определяющему параметру и характеризует интенсивность изнашивания материала;
- критерий p_1/p_2 определяет условия нагружения при износе.

Система основных уравнений (13)–(19) представляет собой общее математическое описание износа элементов изделия в условиях трения без смазочного материала, основанное на анализе его физической сущности. Все основные уравнения получены на базе фундаментальных законов физики (закона сохранения и превращения энергии, закона сохранения массы), поэтому их справедливость не вызывает сомнения. Однако необходимо учитывать, что приведенные уравнения описывают рассматриваемое явление лишь в наиболее общем виде, определяя только свойства, характерные для всего класса явлений износа.

Общая система критериев подобия износа элементов агрегата, полученная на основе математического описания, имеет вид:

$$\pi_0 = И_Л / d;\ \pi_1 = \upsilon\tau / d;\ \pi_2 = a\tau / d^2;$$
$$\pi_3 = p_1 / p_2;\ \pi_4 = t / t_0;\quad \pi_5 = f. \qquad (21)$$

Пример 2. Определение критериев подобия методом анализа размерности определяющих факторов. Износостойкость детали агрегата ГТД λ зависит от: числа циклов срабатывания N, износа U, нагрузки P (x_1), площади контакта F (x_2), твердости материала детали H (x_3), относительного износа материала детали $K_м$ (x_4), относительной величины, характеризующей стирающую способность контактирующего с деталью материала $K_а$ (x_5), удельной теплоты рабочей среды θ (x_6), амплитуды вибраций A (x_7), частоты вибраций ω (x_8):

$$\frac{dИ}{d\tau} = \lambda = f(p, F, H, K_м, K_a, \Theta, A, \varpi). \qquad (22)$$

Формализуем уравнение (22) с помощью критериев подобия. С этой целью проведем соответствующие преобразования зависимости.

В данном случае критерий подобия представляет некоторую комбинацию параметров уравнения (22), $x_i, (i = \overline{1,8})$:

$$\pi = \prod_{i=1}^{8} x_i^{z_i},\quad x_i = [L]^{\lambda_i}[M]^{\mu_i}[T]^{\varepsilon_i}, \qquad (23)$$

где $[L]$, $[M]$, $[T]$ – соответственно размерности длины, массы, времени; λ, μ, ε – показатели степени.

Поскольку критерий подобия имеет нулевую размерность, то:

$$\sum_{i=1}^{8} \lambda_i, z_i = 0;\quad \sum_{i=1}^{8} \mu_i, z_i = 0;\quad \sum_{i=1}^{8} \varepsilon_i, z_i = 0. \qquad (24)$$

Можно показать, что ранг матрицы r, составленной из коэффициентов системы линейных уравнений (24), равен трем и система уравнений (24) может иметь (n – 3) независимых решений. Поскольку система неопределенная, то для получения однозначного решения необходимо ввести дополнительные соотношения между неизвестными величинами. Эти соотношения можно получить исходя из физической природы исследуемого процесса. В рассматриваемой системе можно выделить 3 группы независимых параметров:

- x_1, x_2 и x_3 характеризуют конструктивно-технологические особенности изделий;
- x_4 и x_5 характеризуют свойства конструкционных материалов;
- x_6, x_7 и x_8 характеризуют внешние условия нагружения.

Если при решении системы уравнений (23) принять, что $z_1 = 1$, то $z_i, i = \overline{4,8}$, должны быть равны нулю, поскольку решением системы уравнений является критерий подобия – независимая величина, характеризующая только определенную сторону физического процесса. Произвольность в выборе значения z_1 компенсируется в выражении критерия подобия в размерностях величин x_1, x_2 и x_3. Такой подход позволяет получить однозначное решение системы уравнений (24), которое далее необходимо проверить на его физическую адекватность.

Размерность и ее показатели λ, μ, ε для каждой величины x приведены в таблице.

Подставляя значения показателей размерностей λ, μ и ε в формулу (24), получим:

$$z_1 + 2z_2 - z_3 + 2z_5 + z_7 = 0;$$
$$z_1 + z_3 = 0; \qquad (25)$$
$$z_1 - 2z_3 - 2z_5 - z_6 = 0.$$

Таблица

Параметр x_j	Размерность	Показатель λ_i	μ_i	ζ_i
P	$L\,M\,T^{-2}$	1	1	–2
F	L^2	2	0	0
H	$L^{-1}\,M\,T^{-2}$	–1	1	–2
$k_п/k_а$	0	0	0	0
θ	$L^2\,T^{-2}$	2	0	-2
ω	T^{-1}	0	0	–1
A	L	1	0	0

Систему уравнений (25) решаем методом теории подобия. Для этого выбираем четыре значения z_i, с учетом независимости групп параметров:

1. $z_1 = 0,\ z_4 = 1,\ z_5 = 0,\ z_7 = 0.$ Тогда из системы (25) получаем $z_3 = 0,\ z_2 = 0,\ z_6 = 0.$ Следовательно, первое решение системы нулевое. Находим критерий подобия из этого решения:

$$\pi_1 = \prod_{i=1}^{7} x_i^{z_i} = K_M / K_A. \qquad (26)$$

2. $z_1 = 1,\; z_4 = 0,\; z_5 = 0,\; z_7 = 0.$ Тогда из системы (25) получаем $z_2 = -1,\; z_3 = -1,\; z_6 = 0.$ Следовательно, второе решение имеет вид:

$$z_1 = 1;\quad z_2 = -1;\quad z_3 = -1;\quad z_4 = 0;\quad z_5 = 0;\quad z_6 = 0;\quad z_7 = 0, \tag{27}$$

и соответствующий критерий подобия:

$$\pi_2 = P / HF. \tag{28}$$

3. $z_1 = 0,\; z_4 = 0,\; z_6 = 0,\; z_7 = 0.$ Получаем третье решение:

$$z_1 = 0;\; z_2 = 1/2;\; z_3 = 0;\; z_4 = 0;\; z_5 = -1/2;\; z_6 = 1;\; z_7 = 0, \tag{29}$$

и критерий подобия:

$$\pi'_3 = F^{1/2}\varpi / \Theta^{1/2}. \tag{30}$$

4. $z_1 = 0,\; z_4 = 0,\; z_5 = 0,\; z_2 = 0.$ Получаем четвертое решение системы:

$$z_1 = 0;\; z_2 = -1/2;\; z_3 = 0;\; z_4 = 0;\; z_5 = 0;\; z_6 = 0;\; z_7 = 1, \tag{31}$$

и критерий подобия:

$$\pi'_4 = A / F^{1/2}. \tag{32}$$

Вместо критериев подобия π'_3 и π'_4 введем один обобщенный, который характеризует только эксплуатационные нагрузки:

$$\pi_3 = \pi'_3\,\pi'_4 = \frac{F^{1/2}\omega}{\Theta^{1/2}}\frac{A}{F^{1/2}} = \frac{A\omega}{\Theta^{1/2}}. \tag{33}$$

Таким образом, критериальная обработка функциональной модели позволила установить критерии подобия, которые характеризуют качественное состояние детали узла ((π_1, π_2)) и воздействующие в процессе эксплуатации детали нагрузки (π_3).

После критериальной обработки система уравнения (22) принимает вид:

$$\frac{dИ}{d\tau} = \lambda = \Phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3). \tag{34}$$

Таким образом, критериальная обработка выражения (24) позволила значительно уменьшить число переменных, сделать их независимыми и, следовательно, упростить математическую модель процесса износа детали.

Поскольку основным параметром, по которому осуществляется принятие решения о ресурсе, является число циклов наработки до отказа, то целесообразно ввести этот параметр в модель в явном виде.

В момент отказа износ детали достигает предельного значения. Износ детали зависит от числа срабатываний N, т. е. от параметра, который характеризует наработку, и от износа детали И на этот период, т. е. от характеристики, которая определяет работоспособность системы. Поэтому запишем уравнение (34) в виде:

$$И = \Psi^1(\pi_1, \pi_2, \pi_3) N(t). \tag{35}$$

Формула (35) представляет собой в общем виде математическую модель развития отказа детали по причине износа в критериальной форме, которая устанавливает связь определяющей характеристики И с конструктивно-технологическими параметрами π_1, π_2, параметрами эксплуатационного нагружения π_3 и наработкой $N(t)$.

Отказ детали наступает в момент достижения определяющим параметром И предельно допустимого значения. Для момента отказа формула (35) примет вид:

$$И_{пр} = \Psi^{-1}(\pi_1, \pi_2, \pi_3) N(t_0)$$

или

$$N(t_0) = \Psi(\pi_1, \pi_2, \pi_3) И_{пр}. \tag{36}$$

Таким образом, время наработки детали до отказа есть функция от трех критериев подобия, характеризующих:

- конструктивно-технологические особенности;
- свойства износостойкости материалов;
- эксплуатационные нагрузки.

Величина $И_{пр}$ является постоянной и устанавливается соответствующей нормативно-технической документацией. Так как критерии подобия π_1, π_2 являются случайными величинами, вследствие случайного характера производственного процесса изготовления детали, а критерий подобия π_3 – вследствие случайного характера воздействующих на детали нагрузок, то и параметр $N(t_о)$ также является случайной величиной.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

При планировании и анализе многофакторных экспериментальных исследований процессов ГТД более полное использование преимуществ теории планирования эксперимента (ПЭ) возможно за счет объединения ее методами теории подобия.

Применение методов теории подобия в многофакторном эксперименте позволяет:

- уменьшить число исследуемых факторов в ПЭ путем построения обобщенных критериальных моделей;
- получить зависимости для пересчета и анализа результатов эксперимента, полученных в различных точках факторного пространства;
- построить меру приближенного подобия многофакторных моделей и планов эксперимента.

При ПЭ на основе теории подобия осуществляют переход из одной системы единиц измерения к другой, обобщая факторы в критериальные комплексы или представляя их в виде коэффициентов подобия. При таком планировании регистрируются не отдельные факторы, а значения критериев подобия. Если прямое определение критериев подобия невозможно, значения критериев вычисляются по результатам регистрации факторов.

Целесообразно выбирать более широкие диапазоны варьирования факторов, закладывая запасы работоспособности по отношению к действующим факторам. Однако следует иметь в виду, что увеличение экспериментальной области может потребовать для получения регрессионной модели, адекватно отображающей результаты экспериментов, усложнения видов планирования: например, от линейных перейти к нелинейным планам эксперимента.

При ПЭ в критериальной форме подобия задание шага варьирования критериев может проводиться двумя способами:

- статистическим моделированием факторов в области их изменения, для каждой реализации переменных, вычисляя критерии подобия, для которых затем определяется шаг варьирования;
- задают шаг варьирования факторов и соответственно определяются интервалы варьирования критериев по значениям, которые они принимают при изменении составляющих переменных.

Критерии подобия можно определить двумя методами: с помощью анализа систем уравнений и с помощью анализа размерности определяющих факторов. Данные методы дают сходные результаты, но имеют свои преимущества и недостатки:

- определение критериев подобия на основе уравнений позволяет получить более обоснованные результаты;
- при исследовании достаточно сложных систем, не имеющих математического описания, используют метод анализа размерностей.

При физическом моделировании возможно применение обоих методов.

Определение критериев подобия на основе анализа уравнений проводится одним из трех методов: подобных преобразований; интегральных аналогов и приведения уравнений к безразмерному виду.

В случаях, когда известен только набор параметров, характеризующих исследуемый процесс, но неизвестны уравнения, связывающие их между собой, целесообразно применять теорию размерностей. В этом способе выбор номенклатуры параметров зависит от исследователя, и этот этап в процедуре построения критериев подобия является наиболее ответственным.

Применение метода подобия позволило при регрессионном моделировании процессов расходования ресурсов элементами агрегатов ГТД уменьшить объем потребного эксперимента в 2–10 раз.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гишваров А. С.** Многокритериальное планирование эксперимента при исследовании технических систем. Уфа: Гилем, 2006. 328 с. [A. S. Gishvarov, *Multicriteria planning experiment in technical systems.* Ufa: Guillem, 2006.]

2. **Гишваров А. С., Агеев Г. К.** Исследование авиационных силовых установок с применением планирования эксперимента. Уфа: УГАТУ, 2009. 215 с. [G. K. Ageev and A. S. Gishvarov, *Investigation of aircraft power plants using design of experiments*. Ufa: USATU, 2009.]

3. **Северцев Н. А., Шолкин В. Г., Ярыгин Г. А.** Статистическая теория подобия: надежность технических систем. М.: Наука, 1986. 205 с. [N. A. Severtsev, V. G. Sholkin, and G. A. Yarygin, *Statistical theory of similarity: the reliability of technical systems*. Moscow: Nauka, 1986.]

4. **Веников В. А.** Теория подобия и моделирования. М.: Высш. шк., 1976. 480 с. [V. A. Venikov, *Similarity theory and modeling*. Moscow: Vysshaya shkola, 1976.]

5. **Гухман А. А.** Введение в теорию подобия. М.: Высш. шк., 1973. 296 с. [A. A. Gukhman, *Introduction to the theory of similarity*. Moscow: Vysshaya shkola, 1973.]

ОБ АВТОРАХ

ГИШВАРОВ Анас Саидович, проф., зав. каф. авиационных двигателей. Дипл. инж.-мех. (УАИ, 1973). Д-р техн. наук по тепл. двигателям ЛА (УГАТУ, 1993). Иссл. в обл. надежности и ресурса техн. систем.

АГЕЕВ Георгий Константинович, доц. каф. авиац. двигателей. Дипл. инж.-мех. по авиац. двигателям (УГАТУ, 2007). Канд. техн. наук (УГАТУ, 2012). Иссл. в обл. надежности и ресурса технических систем.

ДАВЫДОВ Марсель Николаевич, доц. той же каф. Дипл. инж.-мех. по авиац. двигателям (УГАТУ, 2002). Канд. техн. наук (УГАТУ, 2006). Иссл. в обл. ускоренных испытаний технических систем.

METADATA

Title: Modelling of processes based on GTD experiment planning in the form of a similarity criterion.

Authors: G. K. Ageev [1], A. S. Gishvarov[2], M. N. Davydov [3]

Affiliation:
Ufa Engine Industrial Association (UMPO), Russia.

Email: [2] ad@mail.rb.ru.

Language: Russian.

Source: Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 18, no. 3 (64), pp. 57-66, 2014. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

Abstract: The problem of reducing the dimension of the planning of the experiment complex multifactor process gas turbine engines and power plants. It is proposed to combine the theory of experimental methods and the theory of similarity, which will jointly realize their benefits. The methods of constructing the similarity criteria and examples of application of similarity for regression modeling of resource consumption of nodes CCD elements.

Key words: experimental design; similarity criterion; power plant; GTE.

About authors:

AGEEV, Georgy Konstantinovich, Prof., Dept. of Aircraft Engines. Dipl. engineer (USATU, 2007). Cand. of Tech. Sci. (USATU, 2012).

GISHVAROV, Anas Saidovich, Prof., Dept. of Aircraft Engines. Dipl. engineer (USATU, 1973). Dr. of Tech. Sci. (USATU, 1993).

DAVYDOV, Marsel Nikolaevich, Prof., Dept. of Aircraft Engines. Dipl. engineer (USATU, 2002). Cand. of Tech. Sci. (USATU, 2006).