

УДК 62-82:681.5

ИССЛЕДОВАНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ В ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРИВОДАХ, РАБОТАЮЩИХ В УСЛОВИЯХ ТРЕНИЯ

П. В. ПЕТРОВ¹, А. А. КОЕВА²

¹pgl.petrov@mail.ru, ²kerargirit@rambler.ru

ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

Поступила в редакцию 27 марта 2014 г.

Аннотация. Приводятся проблемы, связанные с применением аналитических методов для исследования гидравлических устройств. Рассматриваются особенности поведения и специфика создания автоколебательных систем. Исследуются вынужденные колебания подпружиненной массы и влияние сухого трения, относительной частоты на протекание рабочих процессов. Описывается алгоритм расчета колебательных систем и особенности построения амплитудно-фазочастотных характеристик и переходных процессов.

Ключевые слова: аналитические методы; автоколебания; нелинейная математическая модель; сила сухого трения.

СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА

Широко применяемые линейные аналитические методы исследования современных гидромеханических систем в ряде случаев оказываются не состоятельными. В условиях, когда существенную роль играют нелинейные факторы, необходимо применять точные и эффективные методы, дающие возможность анализа различных сложных устройств. Возникшие при этом сложные нелинейные задачи зачастую не поддаются аналитическому решению. Численные исследования, проводившиеся по детальным моделям, также столкнулись с серьезными трудностями, обусловленными большим объемом переменных, ограниченностью и недостаточной точностью получаемой информации, а также в ряде случаев невозможностью моделирования реальных процессов и явлений. К примеру, типичным для нелинейных систем является режим автоколебаний (предельных колебаний). При такой постановке задачи, помимо определения устойчивости, возникает необходимость определения амплитуды и частоты колебаний. На практике применяется достаточное количество приближенных методов, как правило, в предположении, что гармоники

возникающих в нелинейной системе колебаний подавляются линейной частью системы, обладающими свойствами фильтра нижних частот. Тогда циркулирующие в системе синусоидальные колебания можно описать средствами линейной теории (например, с помощью частотных характеристик). В этом случае, если предположить, что высшие гармоники подавляются достаточно хорошо, то нелинейную систему можно линеаризовать с помощью методов теории колебаний.

Однако не стоит забывать, что в некоторых случаях обыкновенная линеаризация существующих нелинейностей невозможна, так, например, для исследования сухого трения применяются приближенные аналитические (например, метод гармонической линеаризации и фазовых траекторий) или численные методы [1]. Приближенные методы не обеспечивают заданную точность, годятся для систем невысоких порядков и, как правило, описывают частные свойства нелинейных систем. Так, метод гармонической линеаризации позволяет определить амплитуду и частоту возможных в системе автоколебаний. Реальное нелинейное звено при этом заменяется на эквивалентное линейное, коэффициент усиления которого

$$q = \frac{4 \cdot F_c}{\pi \cdot A}$$

уменьшается с ростом амплитуды автоколебаний. Фактически это означает замену постоянной силы трения эквивалентным вязким сопротивлением так, чтобы рассеянная за цикл энергия была одинакова в обоих случаях.

Безусловно, аналитические методы являются самым радикальным средством исследования. Все методы анализа и синтеза линейных систем основаны на символьном решении. На предварительных этапах проектирования, на этапе предконструкторского анализа стараются пренебречь малыми параметрами и понизить порядок дифференциального уравнения. Если это не влияет на устойчивость, то такая система является грубой (робастной) согласно [2]. Для частотных, и особенно корневых методов, наиболее приемлемым считается вариант, когда система получается не выше третьего порядка.

Основным и важным достоинством аналитических методов является получение решения в общем виде, так что из полного решения вытекают различные частные случаи, и на основе найденного результата удобно выполнять анализ влияния различных факторов на характер решения задачи.

НЕЛИНЕЙНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Наличие нелинейных элементов в системе значительно затрудняет ее исследование. В тех случаях, когда ее поведение описывается нелинейным дифференциальным уравнением высокого порядка, анализ значительно усложняется. При такой постановке вопроса наиболее оптимальным вариантом исследования являются методы, основанные на фундаментальных уравнениях сохранения, с учетом существенных нелинейностей, что способствует значительному повышению адекватности моделей.

Дифференциальное уравнение, в котором пренебрегли малым параметром, обращается в алгебраическое так, что система обычно описывается совокупностью дифференциальных и алгебраических уравнений. К ним могут добавляться алгебраические выражения или уравнения, обусловленные различными причинами, например, изменением поведения (системы с гибридным поведением) или разного рода феноменологические выражения [3]. Если для рассматриваемой задачи составляется индивидуальная программа методом конечных разностей, то это не является препятствием, так как в данном случае все дифференциальные уравнения превращаются в алгебраические. Совсем другая ситуация получается при использовании стан-

дартного математического обеспечения. Здесь системы алгебраических и дифференциальных уравнений решаются разными решателями, что приводит к необходимости исключения алгебраических выражений путем включения их в состав дифференциальных уравнений. Последняя операция является нестандартной и, как правило, приводит к необходимости громоздких преобразований.

В расчетной практике наибольшее распространение получили очень удобные линейные модели с одной степенью свободы, однако такая идеализация не всегда допустима; очень часто ситуация требует адекватного описания. Практически это приводит к увеличению числа дифференциальных уравнений, к их нелинейности и, следовательно, к существенному усложнению модели.

Рассмотрим вынужденные колебания с одной степенью свободы, но с учетом трения скольжения. Автоколебательная система – устройство, способное генерировать колебания на основе преобразования постоянного движения в колебательное. Такая система характеризуется наличием источника энергии, колебательного контура, клапана, пропускающего энергию от источника к колебательному контуру периодически порциями, и обратной связи со стороны колебательного контура, управляющего работой клапана (рис. 1).

Устойчивый режим автоколебаний определяется энергетическим балансом, то есть равенством энергии, подводимой от источника к колебательному контуру, и энергии, теряемой контуром. При этом различают два случая: если автоколебания происходят с заданной частотой, то условие энергетического баланса определяет установившуюся амплитуду автоколебаний; если же автоколебания происходят с заданной амплитудой, то условие баланса определяет частоту автоколебаний [2].



Рис. 1. Схема автоколебательной системы

Различают мягкое и жесткое самовозбуждение. В первом случае система самостоятельно раскачивается из положения покоя. Во втором для возбуждения системы требуется конечной величины начальный толчок.

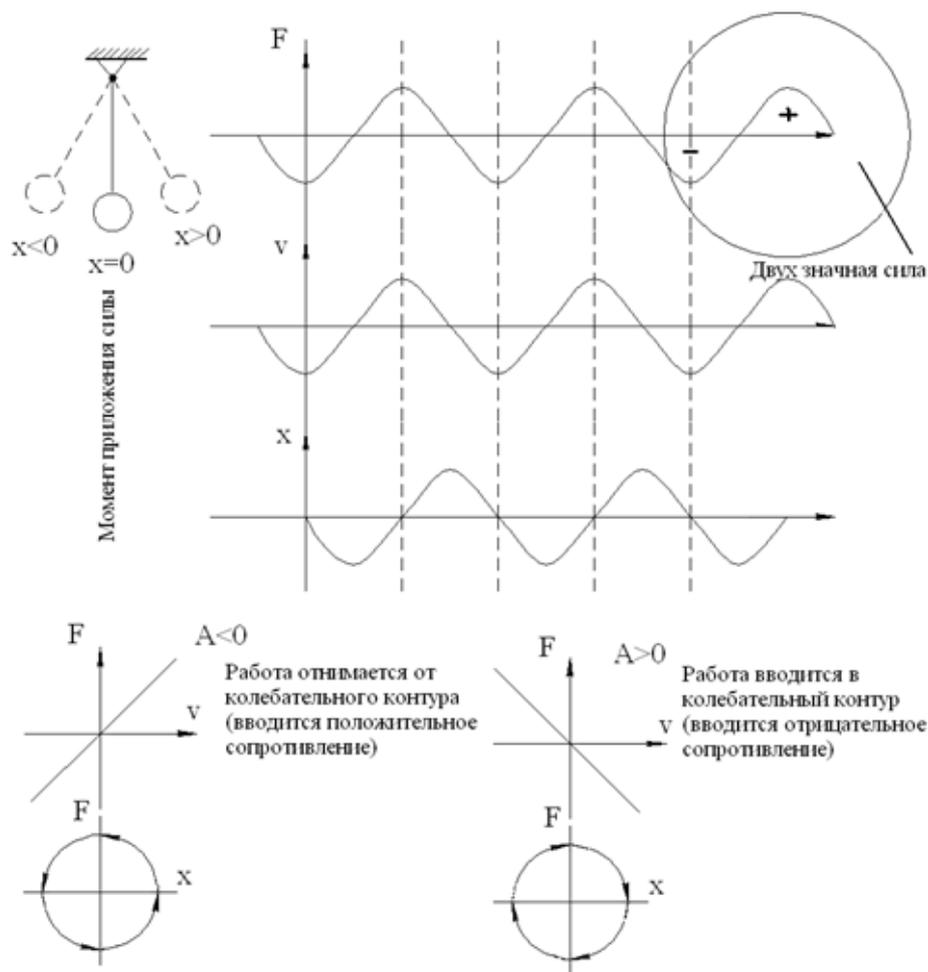


Рис. 2. Схема приложения силы с получением максимального момента

Мягкое и жесткое самовозбуждение связаны со свойством устойчивости. Мягким самовозбуждением обладает система, динамически не устойчивая в положении покоя. Жестким самовозбуждением – система, устойчивая в положении покоя.

Для того чтобы автоколебания были возможны, необходимо, чтобы в колебательную систему периодически вкладывалась энергия. Это означает, что переменная (периодическая) сила, возникающая в результате действия обратной связи и клапана, должна совершать за каждый цикл определенную работу. Но это невозможно, если сила есть однозначная функция положения системы. Для того чтобы работа могла быть совершена, необходимо, по меньшей мере, двухзначная зависимость силы от смещения.

Требуемая двухзначность может быть двоякого рода – статическая и динамическая. Статическая двухзначность обнаруживается в статических характеристиках зависимость силы от смещения, то есть при сколь угодно медленных

изменениях этих величин. Динамическая двухзначность, наоборот, проявляется лишь в колебательном режиме и зависит от наличия в уравнениях системы членов с производными по времени.

Как статическая, так и динамическая двухзначность могут трактоваться в колебательном режиме. С точки зрения фазового сдвига между основными гармониками силы и смещения (для силы и скорости или давления и расхода) работа совершается, если внешняя сила совпадает по фазе со скоростью или, что то же самое, если она опережает смещение по фазе на 90° (а может быть меньше или равно этому значению).

При синусоидальном движении высшие гармоники силы работу не совершают и могут не приниматься во внимание.

Для исследования энергетических соотношений полезно построение диаграмм работы, представляющих собой графики в координатах сила–перемещение (или напряжение–заряд, или давление–объем) (рис. 2). При установившемся периодическом движении диаграмма работы

представляет собой замкнутый контур. Площадь, охватываемая этим контуром, дает величину, совершаемой за цикл работы. Работа положительна ($A > 0$) или отрицательна ($A < 0$), то есть энергия вкладывается в систему или отбирается от нее в зависимости от направления обхода диаграммы изображающей точкой.

В ряде случаев полезным оказывается понятие отрицательного сопротивления. Это понятие связано с фазовыми отношениями. В обыкновенном (положительном) сопротивлении напряжение и ток или сила и скорость (давление и расход) совпадают по фазе. Такое сопротивление является потребителем энергии. Если же на каком-то элементе колебательного контура обнаруживается, что напряжение и ток противоположны по фазе, то такой элемент может являться источником колебательной энергии и обозначается как отрицательное сопротивление.

Если какой либо элемент обладает падающей характеристикой зависимости силы от скорости, то это значит, что его сопротивление, определяемое как отношение приращения напряжения к приращению тока, отрицательно. Падающая характеристика и отрицательное сопротивление – понятия, выражающие одно и то же свойство системы.

Понятие отрицательного сопротивления имеет смысл только применительно к колебательным режимам.

Падающая характеристика зависимости любых двух колебательных величин означает, что эти величины лежат в противофазе (если их изменение лежит в пределах падающего участка).

При исследовании сложных автоколебательных систем и для выяснения роли тех или иных звеньев этих систем полезен анализ фаз. Под этим понимается рассмотрение фазовых соотношений в замкнутой цепи колебательной системы и обратной связи, основанное на том, что результирующий фазовый сдвиг после обхода этой замкнутой цепи равен нулю.

Автоколебательные системы делятся на почти гармонические и релаксационные. Для первых характерна почти синусоидальная форма автоколебаний, для вторых – резко несинусоидальная и иногда почти разрывная. Имеется существенное различие в колебательных системах: в почти гармонических системах имеется колебательный комплекс из двух элементов (например, индуктивность и емкость или пружина и масса), то запасаящий энергию, то отдающий ее. В соответствии с этим в релаксационной системе действие клапана характеризуется перепадом между двумя значениями энергии

накопителя, при одном из которых клапан открыт, а при другом закрыт [2].

Для релаксационных систем этого типа характерно также, что они работают в режиме заданной амплитуды, не зависящей от нагрузки, но определяемой величиной вышеупомянутого перепада.

Наличие на характеристике клапана падающего участка может привести к плавному переходу от релаксационных колебаний к почти гармоническим, при соответствующем постоянном изменении колебательной системы или режима.

На практике при реализации систем, работающих в режиме автоколебаний, приходится решать две основные задачи: как получить и сохранить на уровне колебания требуемой частоты, мощности и формы, если они нужны, или как их устранить, если они не нужны.

Особенностью силы трения скольжения является зависимость ее от относительных скоростей тел, между которыми она действует. Характер зависимости силы трения скольжения от скорости относительного движения бывает различными для разных видов трения. Вязкое или жидкостное трение – пропорционально скорости и при ее отсутствии равно нулю; характерной особенностью сухого трения является наличие трения покоя, что приводит к существенно нелинейной математической модели, например, вида: $F_c = F_c \cdot \text{sign}(v)$.

Обычно считается, что вязкое трение оказывает значительное демпфирующее действие, а сухое трение, в зависимости от характера связи трения и скорости, может оказывать как стабилизирующее, так и дестабилизирующее действие. Несмотря на многолетнюю историю исследования трения скольжения (в 1500 г. Леонардо да Винчи поставил знаменитые пять вопросов о зависимости силы трения от различных факторов) общие исчерпывающие характеристики, в особенности по сухому трению, отсутствуют. До сих пор открываются новые факты, связанные с сухим трением.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОДПРУЖИНОЙ МАССЫ В УСЛОВИЯХ СУХОГО ТРЕНИЯ

Один из подходов к анализу автоколебательных систем является рассмотрение подобных систем с энергетической точки зрения. При данном подходе, прежде всего, рассматривается энергетический баланс явления. Знание энергетического баланса не определяет специфических черт данного частного явления, но энерге-

тическое рассмотрение целой группы родственных явлений позволяет установить наиболее общие черты, их объединяющие.

С энергетической точки зрения действие автоколебательной системы может быть описано следующим образом. Пусть колебания уже происходят. Энергия этих колебаний должна была бы убывать вследствие неизбежных потерь (или вследствие передачи колебательной энергии потребителю). Но убыль энергии пополняется за счет источника, от которого известная порция энергии за каждый период (или вообще периодически) пропускается клапаном в колебательную систему. Совершенно ясно, что установившиеся (т. е. незатухающие и не возрастающие по амплитуде) колебания возможны в том единственном случае, когда поступление энергии от источника за период (или в единицу времени) в точности равно потере энергии за то же время. Это условие баланса энергии и есть условие существования незатухающих колебаний. Также ясно, что если баланс будет нарушен в том смысле, что пополнение потерь будет недостаточным, то колебания будут затухать. Если же, наоборот, энергия будет поступать от источника в избытке, то колебания будут нарастать [4].

Масса движется под действием приложенной возмущающей силы, ей противодействует сила «сухого» трения. В положении равновесия систему поддерживают две пружины (рис. 3). Возмущающая сила представляет собой двигатель, на валу которого закреплен эксцентрик.

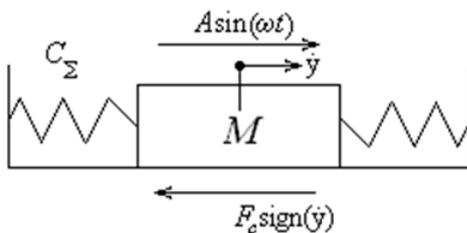


Рис. 3. Принципиальная схема системы «масса с пружинами»

Схему, приведенную на рис. 3, при определенных допущениях можно описать следующим дифференциальным уравнением второго порядка:

$$m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = A \cdot \sin(\omega \cdot t) - F_c \cdot \text{sign}(v) - k_v \cdot \frac{dy}{dt} - c \cdot dy, \quad (1)$$

где m – масса с 1/3 массы пружин; y – перемещение массы; $\frac{dy}{dt} = v$ – скорость массы;

$\frac{d^2 y}{dt^2} = \ddot{y}$ – ускорение массы; $A \cdot \sin(\omega \cdot t)$ – гармоническая движущая сила; A – амплитуда вынуждающей гармонической силы; F_c – сила сухого трения массы о поверхность; $\text{sign}(v)$ – функция знака; k_v – сила вязкого трения; c – суммарная жесткость пружин.

Вводя в уравнение (1) масштабы преобразования для времени $\bar{t} = \sqrt{\frac{m}{c}}$ и перемещения

$\bar{y} = \frac{A}{c}$, получим весьма простую безразмерную форму уравнения:

$$\ddot{\bar{y}} + 2 \cdot \xi_v \cdot \dot{\bar{y}} + \bar{y} = \sin(\bar{\omega} \cdot \bar{t}) - \xi_c \cdot \text{sign}(\dot{\bar{y}}),$$

где $\bar{y} = \frac{y}{A}$ – безразмерное перемещение; $\bar{\omega} = \frac{\omega}{T}$

– безразмерная частота; $\bar{t} = \frac{t}{T}$ – безразмерное

время; $\xi_c = \frac{F_c}{A}$ – относительное трение.

Проводилась серия интегрирований для построения АФЧХ исследуемой системы. Ниже представлена структура MathCAD-document.

Изменяемые величины:

$\bar{\omega} \equiv 0,3$ – безразмерная частота колебаний;

$\xi_c \equiv 0,3$ – коэффициент сухого трения.

Исходные данные:

$\xi_v \equiv 0,1$ – коэффициент вязкого трения.

Начальные данные:

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица первых производных:

$$D(\bar{t}, y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ \sin(\bar{\omega} \cdot \bar{t}) - y_0 - 2 \cdot \xi_v \cdot y_1 - \\ - \xi_c \cdot \text{sign}(y_1) \end{pmatrix}.$$

Якобиан системы уравнений математической модели:

$$J(\bar{t}, y) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \bar{\omega} \cdot \cos(\bar{\omega} \cdot \bar{t}) & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Число шагов для решения системы уравнений $n := 0 \dots 10000$.

Вызов решателя: $z := \text{stiffb}(y, 0, 400, 1000, D, J)$.

Далее приведены результаты по обоим методам численного моделирования (рис. 4–7).

Как видно из рис. 4, колебания груза имеют некоторые особенности: в отличие от возмущающей силы колебания массы периодические,

но не гармонические, и при этом имеют запаздывание по фазе, что более заметно на рис. 5. Вид такой характеристики обусловлен наличием сухого трения.

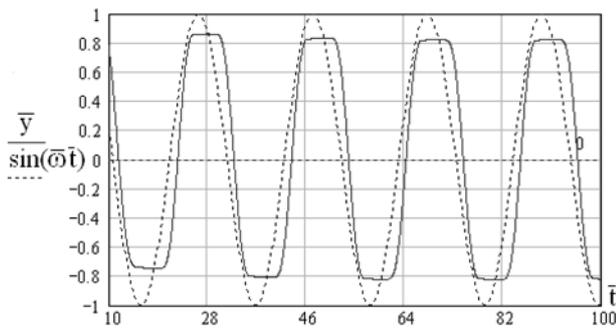


Рис. 4. Перемещения массы с возмущающим гармоническим сигналом

При увеличении частоты колебаний без изменения величины силы трения амплитуда колебаний уменьшается, то есть стремится к нулю (рис. 6). В районе частот собственных колебаний $\bar{\omega} = 1$ наблюдается резонансный пик, а при уменьшении частоты колебаний от 1 к нулю идет уменьшение амплитуды от резонансного пика к вырождению зависимости в прямую, при частоте равной нулю, хотя этот процесс протекает более резко, чем в случае увеличения частоты колебаний.

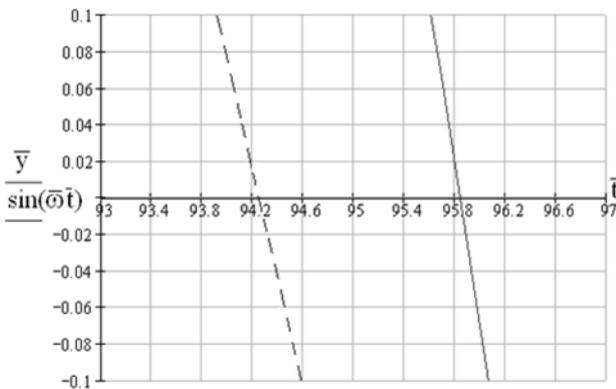


Рис. 5. Увеличение участка графика перемещения массы для рассмотрения запаздывания фазы

При увеличении силы трения амплитуда колебаний уменьшается и при достижении случая $\xi_c = 1$ практически вырождается в прямую. При $\xi_c = 0$ вид кривой практически совпадает с вынуждающими колебаниями, несовпадение обуславливается наличием сил вязкого трения в системе (рис. 7).

Влияние относительного трения на характер вынужденного движения можно наблюдать по осциллограммам на рис. 8.

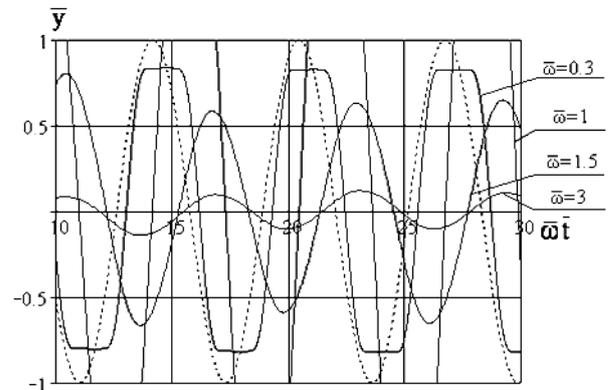


Рис. 6. Влияние относительной частоты на вид переходного процесса

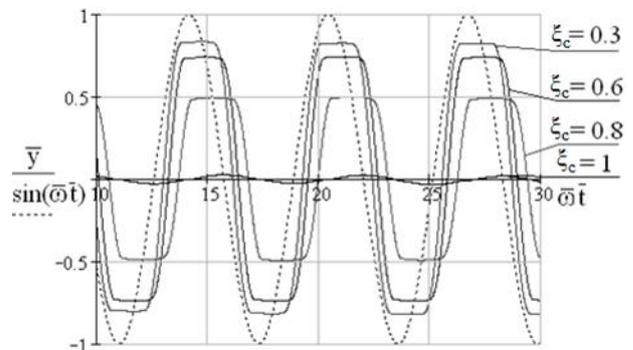


Рис. 7. Влияния относительной силы трения на вид переходного процесса

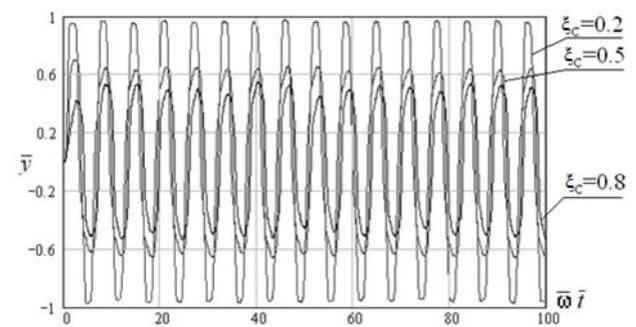


Рис. 8. Влияние интенсивности сухого трения на вынужденное движение колебательного устройства

Вынужденное движение тела является также периодическим и при малых значениях трения ($\xi_c < 0,2$) – почти гармоническое; при увеличении трения появляются нелинейные искажения и сдвиг фазы колебаний по отношению к наложенным, величина запаздывания по фазе увеличивается (рис. 8).

Для количественной оценки этого явления по результатам серии численных экспериментов построена условная (эффективная) амплитудно-

фазовая характеристика (рис. 10–12). Методика построения характеристик поясняется на рис. 9.

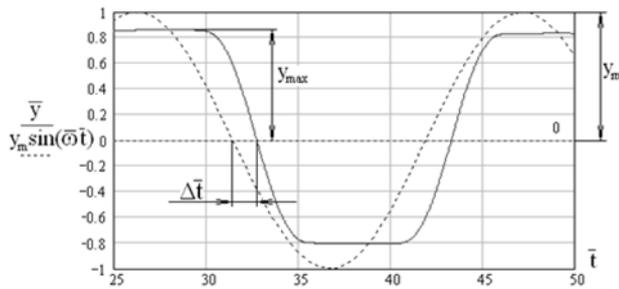


Рис. 9. К методике построения эквивалентной характеристики

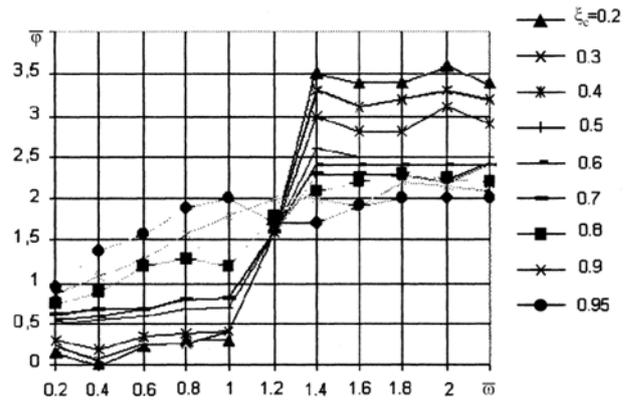


Рис. 12. Фаза условной АФЧХ

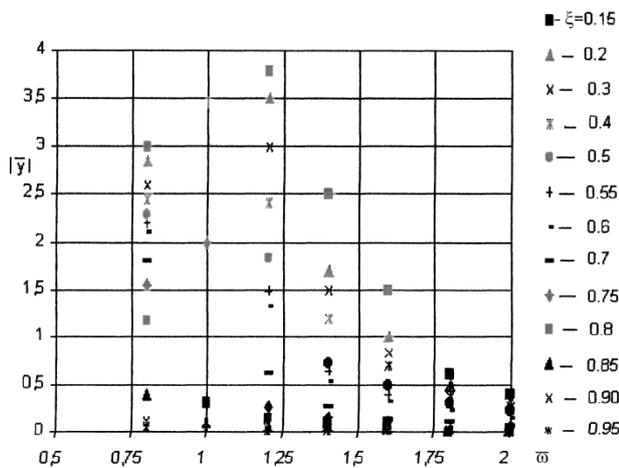


Рис. 10. Модуль условной АФЧХ

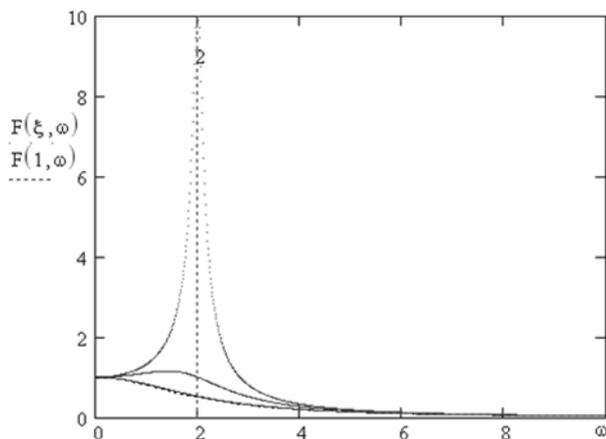


Рис. 11. Модуль АФЧХ линейной системы

Модуль эквивалентной характеристики рассчитывался как отношение полуразмахов вынужденных колебаний и амплитуды наложенных

колебаний, т. е. $|\bar{y}| = \frac{y_{\max}}{y_m}$, а фаза – $\bar{\varphi} = \bar{\omega} \cdot \Delta \bar{t}$.

Амплитудная характеристика, в общем, похожа на характеристику обычного линейного колебательного звена с вязким трением (рис. 11), так как наблюдается резонансный пик характеристики в районе частоты собственных колебаний, как и при вязком трении [2]. Данное исследование показывает, что предположение о возможной замене характеристики сухого трения эквивалентной характеристикой вязкого трения, в моделях, полученных в результате гармонической линеаризации, качественно подтверждается.

Фазовая характеристика значительно отличается в диапазоне исследуемых величин (рис. 12). При малых значениях относительного трения ($\xi_c < 0,5$) фаза с ростом частоты увеличивается от 0 до 3,5, а при большом трении ($\xi_c > 0,8$) слабо растет от 1 до 2,5.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Не принижая значения определения автоколебательных режимов, отметим, что имеются и другие проблемы, связанные с трением. Так, в гидромеханике существует обычная дилемма: доля уменьшения утечек и перетечек. Для этого необходимо увеличивать мощность уплотнений, но при этом увеличивается трение. Обычно требуется ответить на такие вопросы как: если трение увеличится на 1 %, то так и насколько изменятся статические и динамические характеристики? Какие трущиеся пары следует использовать в данной ситуации? Как изменится точность? и т. п. В такой постановке вопросов единственно реальной альтернативой остаются численные методы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Сунарчин Р. А.** Выбор параметров гидромеханических регуляторов авиационных двигателей. Численные методы исследования: учеб. пособие для вузов. Уфа: УГАТУ, 2005. 120 с. [R. A. Sunarchin, *Choice of aviation engines hydromechanical regulators parameters. Numerical methods of research*, (in Russian). Ufa: Ufa state aviation technical university, 2005.]

2. **Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.** Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568с. [A. A. Andronov, A. A. Vit., and S. E. Khaikin, *Fluctuations theory*, (in Russian). Moscow: Nauka, 1981.]

3. **Пановко Я. Г.** Введение в теорию механических колебаний: учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1980. 270 с. [Ya. G. Panovko, *Introduction in the mechanical fluctuations theory*, (in Russian). Moscow: Nauka, 1980.]

4. **Коева А. А., Петров П. В., Целищев В. А.** Концепция исследований устройств гидроавтоматики сложных энергетических систем // Вестник УГАТУ. 2012. Т. 16, № 5 (50). С. 103–108. [A. A. Koeva, P. V. Petrov, and V. A. Tselischev, "Concept of compound energy systems hydroautomatic devices researches," (in Russian), *Vestnik UGATU*, vol. 16, no. 5 (50), pp. 103-108, 2012.]

ОБ АВТОРАХ

ПЕТРОВ Павел Валерьевич, доц каф. прикладной гидромеханики. М-р техн. и технол. по гидравл., вакуумн. и компрес. технике (УГАТУ, 2006). Канд. техн. наук по гидравл. машинам и гидропневмоагрег. (УГАТУ, 2009). Иссл. в обл. гидромех. систем автоматизации ЛА и двиг. установок.

КОЕВА Анна Александровна, ст. преп. каф. прикладной гидромеханики. М-р техн. и технол. по гидравл., вакуумн. и компрес. технике» (УГАТУ, 2009). Иссл. в обл. моделир. и диагностики устройств гидроавтоматики.

METADATA

Title: Research of hydromechanical drives self-oscillations in the friction conditions.

Authors: P. V. Petrov¹, A. A. Koeva²

Affiliation:

Ufa State Aviation Technical University (UGATU), Russia.

Email: ²kerargirit@rambler.ru.

Language: Russian.

Source: Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 18, no. 4 (65), pp. 183-190, 2014. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

Abstract: The problems connected with analytical methods application for hydraulic devices research are given. Behavior features and creation specifics of self-oscillatory systems are considered. The sprung weight compelled fluctuations and dry friction influence, relative frequency on working processes course are investigated. The oscillatory systems calculation algorithm and creation feature of amplitude-phase-frequency characteristics and transients are described.

Key words: analytical methods; self-oscillations; nonlinear mathematical model; force of a dry friction.

About authors:

PETROV, Pavel Valerievich, Assoc. Prof., Dept. of Applied hydromechanics. Master of Technics & Technology (UGATU, 2006). Cand. of Tech. Sci. (UGATU, 2009).

KOEVA, Anna Aleksandrovna, Assis. Prof., Dept. of Applied hydromechanics. Master of Technics & Technology (UGATU, 2009).