

УДК 519.217.2 + 004.052.3

## МАРКОВСКАЯ ЦЕПЬ ГИБЕЛИ И РАЗМНОЖЕНИЯ В МОДЕЛЯХ НАДЕЖНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

П. А. РАХМАН<sup>1</sup>, А. И. КАЯШЕВ<sup>2</sup>, М. И. ШАРИПОВ<sup>3</sup>

<sup>1</sup>pavelar@yandex.ru, <sup>3</sup>sharipovm@mail.ru

ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный нефтяной технический университет» (УГНТУ)  
Филиал в г. Стерлитамаке

*Поступила в редакцию 6 июня 2014 г.*

**Аннотация.** Рассматриваются марковская цепь гибели и размножения, и формулы для расчета стационарных вероятностей состояний, среднего времени перехода из одного заданного состояния в другое состояние. Также рассматриваются модели надежности технических систем с множеством идентичных восстанавливаемых элементов с заданным порогом отказа, с аварийным отключением и без отключения при достижении порога отказа, ряд частных случаев с расчетными формулами и примерами расчета показателей надежности.

**Ключевые слова:** марковская цепь гибели и размножения; показатели надежности.

### ВВЕДЕНИЕ

Современный мир практически невозможно представить без технических систем, ставших неотъемлемой частью как повседневной жизни и профессиональной деятельности человека, так и ключевыми элементами различных предприятий и отраслей экономики.

Помимо функциональных возможностей и основных технических характеристик, которые в первую очередь интересуют конечных потребителей и производителей, таких как: производительность, мощность, емкость и т. п., не менее важными являются показатели надежности, так как от них напрямую зависит эффективность и безопасность эксплуатации технических систем. Игнорирование показателей надежности в лучшем случае приводит к дополнительным материальным затратам и потере времени, в более тяжелом случае – потере важной информации, в худшем случае – человеческим жертвам и масштабным катастрофам. Соответственно, разработка моделей и методов для расчета показателей надежности систем (коэффициент готовности, среднее время наработки на отказ, среднее время восстановления) является актуальной и критически важной задачей.

На сегодняшний день имеется множество учебников и научных трудов, как отечественных [1, 2], так и зарубежных [3, 4], посвященных основам теории надежности, общим и специализированным моделям и методам расчета показателей надежности систем, а также мето-

дам резервирования и повышения отказоустойчивости систем.

Одной из самых распространенных моделей восстанавливаемых технических систем является модель на базе цепей Маркова, позволяющих оценить такие показатели надежности системы, как: коэффициент готовности, среднее время наработки на отказ, среднее время восстановления. В случае если система состоит из нескольких идентичных элементов, например: отказоустойчивые дисковые массивы хранения данных, высокопроизводительные вычислительные системы, гомогенные сети передачи данных, то в таком случае применяется хорошо известная марковская цепь гибели и размножения. Более того, если элементы имеют экспоненциальное распределение времени наработки на отказ и восстановления, то тогда нередко удается получить аналитические формулы для расчета показателей надежности. Но даже в этом случае могут встречаться определенные трудности, поскольку в системе могут присутствовать дополнительные ограничения на одновременность отказов (один, несколько или все элементы нагружены), ограничения на одновременность восстановления (одна, несколько или неограниченное число ремонтных бригад), а также зависимость нагрузки и интенсивности отказов элементов от конкретного состояния системы. Также могут присутствовать специфичные пороги отказа системы (минимальное количество элементов, при отказе которых система стано-

вится неработоспособной) при целой и дробной кратности резервирования. Наконец, система может аварийно останавливаться при достижении порога отказа, а может продолжать функционировать вплоть до отказа всех элементов системы. В каждом случае может быть использована марковская цепь гибели и размножения с соответствующими интенсивностями переходов. При этом в каждом случае приходится составлять и решать систему уравнений для получения показателей надежности. Очевидно, что намного более удобным было бы иметь решение обобщенной марковской цепи гибели и размножения с произвольно задаваемыми интенсивностями переходов с выведенными аналитическими формулами для расчета показателей надежности. Это бы значительно упростило анализ показателей надежности систем, описываемых марковской цепью гибели и размножения, в конкретных частных случаях.

В ряде отечественных книг [1] рассматривается обобщенная марковская цепь гибели и размножения для произвольно задаваемого количества элементов  $n$  и произвольно задаваемых интенсивностей переходов  $\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}$  и  $\mu_1 \dots \mu_n$ , но в них ограничиваются рассмотрением выведением формулы для расчета коэффициента готовности и среднего времени наработки до отказа для заданного порога отказа  $s$ . В ряде других книг [2] ограничиваются рассмотрением частных случаев обобщенной марковской цепи гибели и размножения для произвольно задаваемого количества элементов  $n$ . Наконец, в зарубежной литературе [3, 4] ограничиваются рассмотрением конкретных задач с заданным количеством элементов (дублированные системы  $n = 2$ , мажоритарные системы  $n = 3$  или 5).

Авторами был проведен ряд научных исследований в области надежности современных систем обработки, передачи и хранения данных [5–7], состоящих из нескольких идентичных элементов. В рамках практического опыта внедрения различных систем и анализа их показателей надежности возникала необходимость оценки не только коэффициента готовности и среднего времени наработки на отказ системы, но и оценки среднего времени перехода из любого состояния  $u$  в любое другое состояние  $v$ , причем  $u < v$ , а также среднего времени перехода обратно из состояния  $v$  в состояние  $u$ . Соответственно, авторами были выведены аналитические формулы для расчета среднего времени переходов. Также были выведены формулы для ряда частных случаев марковской цепи гибели и размножения.

В статье рассматриваются известные модели надежности и расчетные формулы для показателей надежности восстанавливаемого элемента, системы из двух идентичных восстанавливаемых элементов, известная обобщенная марковская цепь гибели и размножения и формула для расчета стационарных вероятностей состояний для системы из  $n$  идентичных элементов. Кроме того, приводятся полученные авторами математические модели и их решения для расчета среднего времени переходов из произвольного состояния  $u$  в произвольное состояние  $v$ , причем  $u < v$ , и среднего времени обратного перехода для обобщенной марковской цепи гибели и размножения.

Наконец, также рассматривается ряд частных случаев с выведенными для них расчетными формулами и несколько примеров расчета показателей надежности.

### 1. ВОССТАНАВЛИВАЕМЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Пусть имеется восстанавливаемый элемент с заданными интенсивностями отказов и восстановления. Тогда марковская модель надежности восстанавливаемого элемента (рис. 1) для расчета вероятностей всех состояний с исходным состоянием 0:

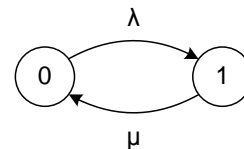


Рис. 1. Граф для расчета вероятностей состояний восстанавливаемого элемента

Соответственно, математическая модель (система уравнений Колмогорова–Чепмена):

$$\begin{cases} P_0(0) = 1; & P_1(0) = 0; \\ P_0(t) + P_1(t) = 1; \\ \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t); \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda P_0(t) - \mu P_1(t). \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получаем функции вероятностей состояний:

$$\begin{cases} P_0(t) = \frac{\mu}{\mu + \lambda} \left( 1 + \frac{\lambda}{\mu} e^{-(\mu + \lambda)t} \right); \\ P_1(t) = \frac{\lambda}{\mu + \lambda} (1 - e^{-(\mu + \lambda)t}). \end{cases} \quad (1)$$

Также имеем стационарные значения вероятностей при  $t \rightarrow \infty$ :

$$\begin{cases} P_0(\infty) = \frac{\mu}{\mu + \lambda}; \\ P_1(\infty) = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}. \end{cases} \quad (2)$$

Для расчета среднего времени перехода из состояния 0 в состояние 1, в исходной марковской модели делаем состояние 0 исходным, а состояние 1 поглощающим, и получаем следующую модель (рис. 2):

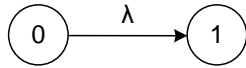


Рис. 2. Граф для расчета среднего времени перехода из состояния 0 в состояние 1

Соответственно, математическая модель (система уравнений Колмогорова–Чепмена):

$$\begin{cases} P_0(0) = 1; & P_1(0) = 0; \\ P_0(\infty) = 0; & P_1(\infty) = 1; \\ P_0(t) + P_1(t) = 1; \\ \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t); \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda P_0(t). \end{cases}$$

Тогда, среднее время перехода из состояния 0 в состояние 1:

$$\begin{aligned} T_{0,1} &= \int_0^{\infty} t \frac{dP_1(t)}{dt} dt = \int_0^{\infty} (1 - P_0(t)) dt = \\ &= -\frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} \frac{dP_0(t)}{dt} dt = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для расчета среднего времени перехода из состояния 1 в состояние 0, в исходной марковской модели делаем состояние 1 исходным, а состояние 0 поглощающим, и получаем следующую модель (рис. 3):

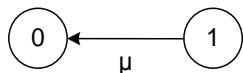


Рис. 3. Граф для расчета среднего времени перехода из состояния 1 в состояние 0

Соответственно, математическая модель (система уравнений Колмогорова–Чепмена):

$$\begin{cases} P_0(0) = 0; & P_1(0) = 1; \\ P_0(\infty) = 1; & P_1(\infty) = 0; \\ P_0(t) + P_1(t) = 1; \\ \frac{dP_0(t)}{dt} = \mu P_1(t); \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = -\mu P_1(t). \end{cases}$$

Тогда, среднее время перехода из состояния 1 в состояние 0:

$$\begin{aligned} T_{1,0} &= \int_0^{\infty} t \frac{dP_0(t)}{dt} dt = \int_0^{\infty} (1 - P_0(t)) dt = \\ &= -\frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} \frac{dP_1(t)}{dt} dt = \frac{1}{\mu}. \end{aligned} \quad (4)$$

## 2. СИСТЕМА С ДВУМЯ ИДЕНТИЧНЫМИ ВОССТАНАВЛИВАЕМЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Пусть имеется система с двумя идентичными восстанавливаемыми элементами с одинаковыми интенсивностями отказов и восстановления. Тогда обобщенная марковская модель системы (рис. 4) для расчета вероятностей всех состояний с исходным состоянием 0:

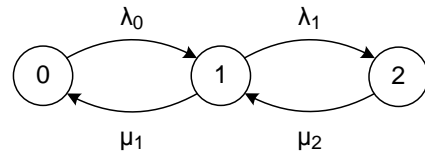


Рис. 4. Граф для расчета вероятностей состояний системы с двумя идентичными элементами

Соответственно, математическая модель (система уравнений Колмогорова–Чепмена):

$$\begin{cases} P_0(0) = 1; & P_1(0) = 0; & P_2(0) = 0; \\ P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) = 1; \\ \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t); \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda_0 P_0(t) - (\mu_1 + \lambda_1) P_1(t) + \mu_2 P_2(t); \\ \frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda_1 P_1(t) - \mu_2 P_2(t). \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получаем функции вероятностей состояний:

$$P_0(t) = \frac{\mu_1\mu_2}{\beta^2} \times \left( 1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} \left( 1 + \frac{\lambda_1}{\mu_2} \right) e^{-\alpha t} \times \left( \text{ch}(t\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) + \frac{\alpha(\lambda_1 + \mu_2) - \beta^2}{(\lambda_1 + \mu_2)\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \times \text{sh}(t\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) \right) \right), \quad (5)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2}(\lambda_0 + \lambda_1 + \mu_1 + \mu_2);$$

$$\beta^2 = \mu_1\mu_2 + \lambda_0\mu_2 + \lambda_0\lambda_1.$$

$$P_1(t) = \frac{\lambda_0\mu_2}{\beta^2} \times \left( 1 - e^{-\alpha t} \left( \text{ch}(t\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) + \frac{\alpha\mu_2 - \beta^2}{\mu_2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \times \text{sh}(t\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) \right) \right).$$

$$P_2(t) = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\beta^2} \times \left( 1 - e^{-\alpha t} \left( \text{ch}(t\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \times \text{sh}(t\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) \right) \right).$$

Также имеем стационарные значения вероятностей при  $t \rightarrow \infty$ :

$$\begin{cases} P_0(\infty) = \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1\mu_2 + \lambda_0\mu_2 + \lambda_0\lambda_1}; \\ P_1(\infty) = \frac{\lambda_0\mu_2}{\mu_1\mu_2 + \lambda_0\mu_2 + \lambda_0\lambda_1}; \\ P_2(\infty) = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2 + \lambda_0\mu_2 + \lambda_0\lambda_1}. \end{cases} \quad (6)$$

Для расчета среднего времени перехода из состояния 0 в состояние 1, в исходной марковской модели делаем состояние 0 исходным, а состояние 1 поглощающим, и получаем следующую модель (рис. 5):

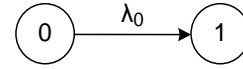


Рис. 5. Граф для расчета среднего времени перехода из состояния 0 в состояние 1

Соответственно, математическая модель (система уравнений Колмогорова–Чепмена):

$$\begin{cases} P_0(0) = 1; & P_1(0) = 0; \\ P_0(\infty) = 0; & P_1(\infty) = 1; \\ P_0(t) + P_1(t) = 1; \\ \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_0 P_0(t); \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda_0 P_0(t). \end{cases}$$

Тогда, среднее время перехода из состояния 0 в состояние 1:

$$\begin{aligned} T_{0,1} &= \int_0^{\infty} t \frac{dP_1(t)}{dt} dt = \int_0^{\infty} (1 - P_1(t)) dt = \\ &= -\frac{1}{\lambda_0} \int_0^{\infty} \frac{dP_0(t)}{dt} dt = \frac{1}{\lambda_0}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для расчета среднего времени перехода из состояния 1 в состояние 2, в исходной марковской модели делаем состояние 1 исходным, а состояние 2 поглощающим, и получаем следующую модель (рис. 6):

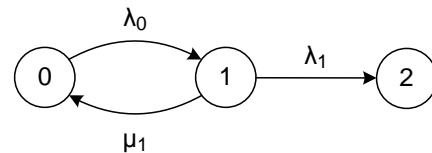


Рис. 6. Граф для расчета среднего времени перехода из состояния 1 в состояние 2

Соответственно, математическая модель (система уравнений Колмогорова–Чепмена):

$$\begin{cases} P_0(0) = 0; & P_1(0) = 1; & P_2(0) = 0; \\ P_0(\infty) = 0; & P_1(\infty) = 0; & P_2(\infty) = 1; \\ P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) = 1; \\ \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t); \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda_0 P_0(t) - (\mu_1 + \lambda_1) P_1(t); \\ \frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda_1 P_1(t). \end{cases}$$

Тогда, среднее время перехода из состояния 1 в состояние 2:

$$\begin{aligned}
 T_{1,2} &= \int_0^\infty t \frac{dP_2(t)}{dt} dt = \int_0^\infty (1 - P_2(t)) dt = \\
 &= - \int_0^\infty \frac{\mu_1 + \lambda_0 + \lambda_1}{\lambda_0 \lambda_1} \frac{dP_0(t)}{dt} dt - \\
 &- \int_0^\infty \frac{\mu_1 + \lambda_0}{\lambda_0 \lambda_1} \frac{dP_1(t)}{dt} dt = \frac{\mu_1 + \lambda_0}{\lambda_0 \lambda_1}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Также имеем среднее время перехода из состояния 0 в состояние 2:

$$T_{0,2} = T_{0,1} + T_{1,2} = \frac{\mu_1 + \lambda_0 + \lambda_1}{\lambda_0 \lambda_1}. \tag{9}$$

Для расчета среднего времени перехода из состояния 2 в состояние 1, в исходной марковской модели делаем состояние 2 исходным, а состояние 1 поглощающим, и получаем следующую модель (рис. 7):

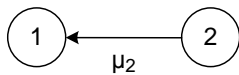


Рис. 7. Граф для расчета среднего времени перехода из состояния 2 в состояние 1

Соответственно, математическая модель (система уравнений Колмогорова–Чепмена):

$$\begin{cases}
 P_1(0) = 0; & P_2(0) = 1; \\
 P_1(\infty) = 1; & P_2(\infty) = 0; \\
 P_1(t) + P_2(t) = 1; \\
 \frac{dP_1(t)}{dt} = \mu_2 P_2(t); \\
 \frac{dP_2(t)}{dt} = -\mu_2 P_2(t).
 \end{cases}$$

Тогда, среднее время перехода из состояния 2 в состояние 1:

$$\begin{aligned}
 T_{2,1} &= \int_0^\infty t \frac{dP_1(t)}{dt} dt = \int_0^\infty (1 - P_1(t)) dt = \\
 &= - \frac{1}{\mu_2} \int_0^\infty \frac{dP_2(t)}{dt} dt = \frac{1}{\mu_2}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Для расчета среднего времени перехода из состояния 1 в состояние 0, в исходной марковской модели делаем состояние 1 исходным, а состояние 0 поглощающим, и получаем следующую модель (рис. 8):

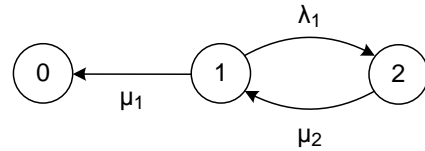


Рис. 8. Граф для расчета среднего времени перехода из состояния 1 в состояние 0

Соответственно, математическая модель (система уравнений Колмогорова–Чепмена):

$$\begin{cases}
 P_0(0) = 0; & P_1(0) = 1; & P_2(0) = 0; \\
 P_0(\infty) = 1; & P_1(\infty) = 0; & P_2(\infty) = 0; \\
 P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) = 1; \\
 \frac{dP_0(t)}{dt} = \mu_1 P_1(t); \\
 \frac{dP_1(t)}{dt} = -(\mu_1 + \lambda_1) P_1(t) + \mu_2 P_2(t); \\
 \frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda_1 P_1(t) - \mu_2 P_2(t).
 \end{cases}$$

Тогда, среднее время перехода из состояния 1 в состояние 0:

$$\begin{aligned}
 T_{1,0} &= \int_0^\infty t \frac{dP_0(t)}{dt} dt = \int_0^\infty (1 - P_0(t)) dt = \\
 &= - \int_0^\infty \frac{\mu_2 + \mu_1 + \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} \frac{dP_2(t)}{dt} dt - \\
 &- \int_0^\infty \frac{\mu_2 + \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} \frac{dP_1(t)}{dt} dt = \frac{\mu_2 + \lambda_1}{\mu_1 \mu_2}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Также имеем среднее время перехода из состояния 2 в состояние 0:

$$T_{2,0} = T_{2,1} + T_{1,0} = \frac{\mu_2 + \mu_1 + \lambda_1}{\mu_1 \mu_2}. \tag{12}$$

### 3. СИСТЕМА С МНОЖЕСТВОМ ИДЕНТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Пусть имеется система с  $n$  идентичными восстанавливаемыми элементами с одинаковыми интенсивностями отказов и восстановления.

Тогда имеем обобщенную марковскую модель системы (рис. 9) для расчета вероятностей всех состояний с исходным состоянием 0.

Соответственно, математическая модель (система уравнений Колмогорова–Чепмена) выглядит следующим образом:

$$\left\{ \begin{aligned} P_0(0) = 1; P_1(0) = 0; \dots P_n(0) = 0; \\ P_0(t) + P_1(t) + \dots + P_n(t) = 1; \\ \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t); \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda_0 P_0(t) - (\mu_1 + \lambda_1) P_1(t) + \mu_2 P_2(t); \\ \vdots \\ \frac{dP_{n-1}(t)}{dt} = \lambda_{n-2} P_{n-2}(t) - \\ - (\mu_{n-1} + \lambda_{n-1}) P_{n-1}(t) + \mu_n P_n(t); \\ \frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) - \mu_n P_n(t). \end{aligned} \right.$$

Стационарные вероятности при  $t \rightarrow \infty$  могут быть получены путем решения системы уравнений с учетом того, что в бесконечной перспективе марковский процесс становится установившимся, и производные стремятся к нулю  $dP_i(t)/dt \rightarrow 0$ .

Это упрощает решение системы и вывод формул для стационарных вероятностей:

$$P_k(\infty) = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} \lambda_i \prod_{j=k+1}^n \mu_j}{\sum_{q=0}^n \left( \prod_{i=0}^{q-1} \lambda_i \prod_{j=q+1}^n \mu_j \right)}; \quad (13)$$

$$0 \leq k \leq n.$$

Для расчета среднего времени перехода из произвольного состояния  $u$  в состояние  $v$ , причем  $0 \leq u < v \leq n$ , в исходной марковской модели делаем состояние  $u$  исходным, а состояние  $v$  поглощающим, и получаем следующую модель (рис. 10) и систему уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} P_0(0) = 0; \dots P_{u-1}(0) = 0; P_u(0) = 1; \\ P_{u+1}(0) = 0; \dots P_v(0) = 0; \\ P_0(\infty) = 0; \dots P_{v-1}(\infty) = 0; P_v(\infty) = 1; \\ P_0(t) + \dots + P_u(t) + \dots + P_v(t) = 1; \\ \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t); \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda_0 P_0(t) - (\mu_1 + \lambda_1) P_1(t) + \mu_2 P_2(t); \\ \vdots \\ \frac{dP_u(t)}{dt} = \lambda_{u-1} P_{u-1}(t) - \\ - (\mu_u + \lambda_u) P_u(t) + \mu_{u+1} P_{u+1}(t); \\ \vdots \\ \frac{dP_{v-1}(t)}{dt} = \lambda_{v-2} P_{v-2}(t) - (\mu_{v-1} + \lambda_{v-1}) P_{v-1}(t); \\ \frac{dP_v(t)}{dt} = \lambda_{v-1} P_{v-1}(t). \end{aligned} \right.$$

Авторами была выведена следующая формула для расчета среднего времени перехода из состояния  $u$  в состояние  $v$ , причем  $0 \leq u < v \leq n$ :

$$T_{u,v} = \int_0^\infty t \frac{dP_v(t)}{dt} dt = \int_0^\infty (1 - P_v(t)) dt = \sum_{k=0}^{v-1} \left( \sum_{q=\max(0, u-k)}^{v-1-k} \frac{1}{\lambda_q} \prod_{j=1}^k \frac{\mu_{q+j}}{\lambda_{q+j}} \right). \quad (14)$$

Для расчета среднего времени перехода из произвольного состояния  $v$  в состояние  $u$ , причем  $0 \leq u < v \leq n$ , в исходной марковской модели делаем состояние  $v$  исходным, а состояние  $u$  поглощающим, и получаем следующую модель (рис. 11) и систему уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} P_u(0) = 0; \dots P_{v-1}(0) = 0; P_v(0) = 1; \\ P_{v+1}(0) = 0; \dots P_n(0) = 0; \\ P_u(\infty) = 1; P_{u+1}(\infty) = 0; \dots P_n(\infty) = 0; \\ P_u(t) + \dots + P_v(t) + \dots + P_n(t) = 1; \\ \frac{dP_u(t)}{dt} = \mu_{u+1} P_{u+1}(t); \\ \frac{dP_{u+1}(t)}{dt} = -(\mu_{u+1} + \lambda_{u+1}) P_{u+1}(t) + \mu_{u+2} P_{u+2}(t); \\ \vdots \\ \frac{dP_v(t)}{dt} = \lambda_{v-1} P_{v-1}(t) - \\ - (\mu_v + \lambda_v) P_v(t) + \mu_{v+1} P_{v+1}(t); \\ \vdots \\ \frac{dP_{n-1}(t)}{dt} = \lambda_{n-2} P_{n-2}(t) - \\ - (\mu_{n-1} + \lambda_{n-1}) P_{n-1}(t) + \mu_n P_n(t); \\ \frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) - \mu_n P_n(t). \end{aligned} \right.$$

Авторами была выведена следующая формула для расчета среднего времени перехода из состояния  $v$  в состояние  $u$ , причем  $0 \leq u < v \leq n$ :

$$T_{v,u} = \int_0^\infty t \frac{dP_u(t)}{dt} dt = \int_0^\infty (1 - P_u(t)) dt = \sum_{k=u+1}^n \left( \sum_{q=\max(0, k-v)}^{k-u-1} \frac{1}{\mu_{n-q}} \prod_{j=1}^{n-k} \frac{\lambda_{n-q-j}}{\mu_{n-q-j}} \right). \quad (15)$$

Таким образом, формулы 14 и 15 позволяют вычислить среднее время перехода из любого заданного состояния в любое другое состояние.

#### 4. СИСТЕМА С МНОЖЕСТВОМ ИДЕНТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ЗАДАННЫМ ПОРОГОМ ОТКАЗА И БЕЗ ОТКЛЮЧЕНИЯ ПРИ ДОСТИЖЕНИИ ПОРОГА ОТКАЗА

Пусть имеется система с  $n$  идентичными восстанавливаемыми элементами с одинаковы-

ми интенсивностями отказов и восстановления, причем система неработоспособна при отказе  $s$  и более элементов, причем  $1 \leq s \leq n$ .

Кроме того, пусть при достижении состояния  $s$  система теряет работоспособность, но не отключается, и оставшиеся работоспособные элементы могут продолжать отказывать вплоть до отказа всех  $n$  элементов, а отказавшие элементы могут восстанавливаться, и при достижении состояния  $s - 1$  система вновь становится работоспособной.

Тогда обобщенная марковская модель системы (рис. 12):

Выведем теперь формулы для ряда важнейших показателей надежности системы.

Стационарный коэффициент готовности системы является суммой стационарных вероятностей состояний  $0 \dots s - 1$ , в которых система работоспособна, и они рассчитываются по формуле 13. Тогда, стационарный коэффициент готовности системы:

$$K_{\Gamma} = \sum_{k=0}^{s-1} P_k(\infty) = \frac{\sum_{k=0}^{s-1} \left( \prod_{i=0}^{k-1} \lambda_i \prod_{j=k+1}^n \mu_j \right)}{\sum_{q=0}^n \left( \prod_{i=0}^{q-1} \lambda_i \prod_{j=q+1}^n \mu_j \right)}. \quad (16)$$

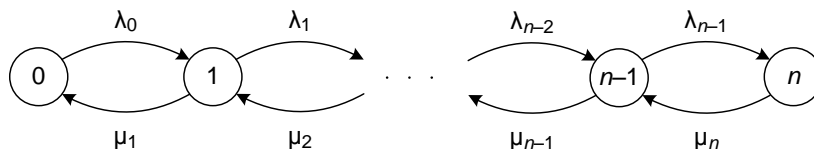


Рис. 9. Граф для расчета вероятностей состояний системы с  $n$  идентичными элементами

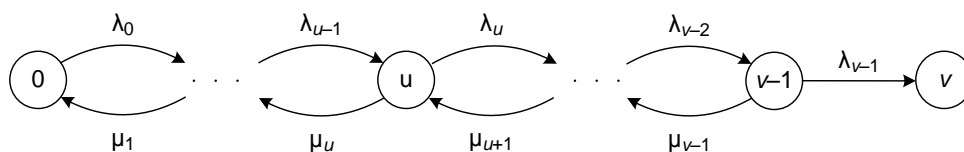


Рис. 10. Граф для расчета среднего времени перехода из состояния  $u$  в состояние  $v$

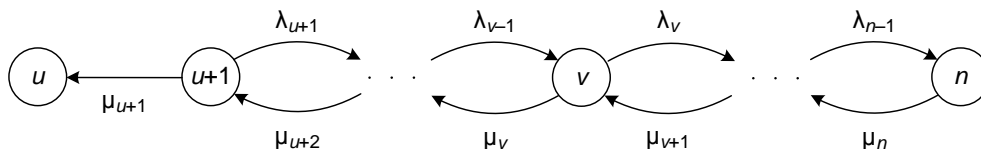


Рис. 11. Граф для расчета среднего времени перехода из состояния  $v$  в состояние  $u$

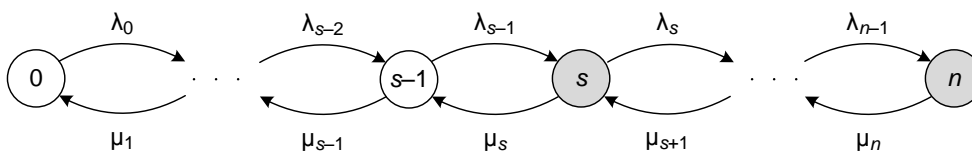


Рис. 12. Граф системы с  $n$  идентичными элементами и порогом отказа  $s$

Среднее время наработки системы до первого отказа из полностью исправного состояния является средним временем перехода из состояния 0 в состояние  $s$  и выводится из формулы 14 при подстановке  $u = 0$  и  $v = s$ :

$$T_{0,s} = \sum_{k=0}^{s-1} \left( \sum_{q=0}^k \left( \frac{1}{\lambda_q} \prod_{j=1}^{s-1-k} \left( \frac{\mu_{q+j}}{\lambda_{q+j}} \right) \right) \right). \quad (17)$$

Среднее время наработки на отказ является средним временем перехода из состояния  $s - 1$  в состояние  $s$  и выводится из формулы 14 при подстановке  $u = s - 1$  и  $v = s$ :

$$T_{s-1,s} = \sum_{k=0}^{s-1} \left( \frac{1}{\lambda_k} \prod_{j=1}^{s-1-k} \left( \frac{\mu_{k+j}}{\lambda_{k+j}} \right) \right). \quad (18)$$

Среднее время до первого восстановления из полностью неисправного состояния является средним временем перехода из состояния  $n$  в состояние  $s - 1$  и выводится из формулы 15 при подстановке  $u = s - 1$  и  $v = n$ :

$$T_{n,s-1} = \sum_{k=0}^{n-s} \left( \sum_{q=0}^k \left( \frac{1}{\mu_{n-q}} \prod_{j=1}^{n-s-k} \left( \frac{\lambda_{n-q-j}}{\mu_{n-q-j}} \right) \right) \right). \quad (19)$$

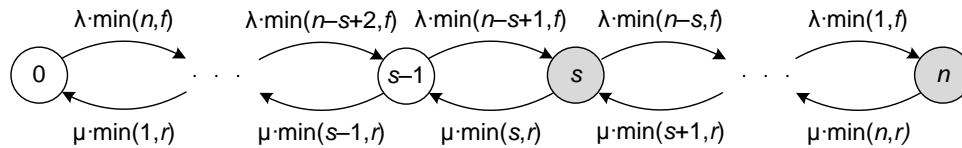


Рис. 13. Граф системы с  $n$  идентичными элементами, порогом отказа  $s$ ,  $f$  нагруженными элементами и  $r$  ремонтными бригадами

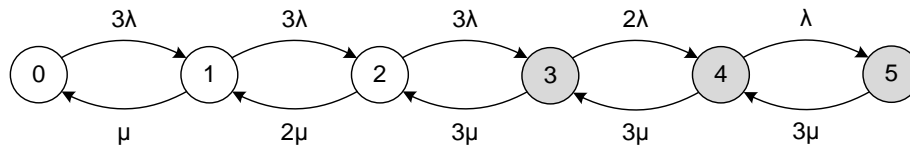


Рис. 14. Граф состояний рассматриваемой системы водоснабжения

Среднее время восстановления является средним временем перехода из состояния  $s$  в состояние  $s - 1$  и выводится из формулы (15) при подстановке  $u = s - 1$  и  $v = s$ :

$$T_{s,s-1} = \sum_{k=0}^{n-s} \left( \frac{1}{\mu_{n-k}} \prod_{j=1}^{n-s-k} \left( \frac{\lambda_{n-k-j}}{\mu_{n-k-j}} \right) \right). \quad (20)$$

Особо отметим, что коэффициент готовности связан со средним временем наработки на отказ и средним временем восстановления тождеством:  $K_{\Gamma} = \frac{T_{s-1,s}}{T_{s-1,s} + T_{s,s-1}}$ ;  $1 \leq s \leq n$ .

### 5. СИСТЕМА С $n$ ИДЕНТИЧНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ, ПОРОГОМ ОТКАЗА $s$ , $F$ НАГРУЖЕННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ И $R$ РЕМОНТНЫМИ БРИГАДАМИ

Пусть имеется система с  $n$  идентичными восстанавливаемыми элементами с интенсивностями отказов  $\lambda$  и восстановления  $\mu$ , причем система неработоспособна при отказе  $s$  и более элементов, причем  $1 \leq s \leq n$ . Кроме того, пусть при достижении состояния  $s$  система не отключается и продолжает функционировать, при этом оставшиеся элементы могут отказывать, а отказавшие элементы могут восстанавливаться, и при достижении состояния  $s - 1$  система вновь становится работоспособной. Кроме того, пусть одновременно могут отказывать не более  $f$  элементов, причем  $1 \leq f \leq n$ , и одновременно могут восстанавливаться не более  $r$  элементов, причем  $1 \leq r \leq n$ . Тогда марковская модель системы (рис. 13) является частным случаем рассмотренной выше общей модели с интенсивностями переходов  $\lambda_i = \lambda \min(n - i, f); i = 0 \dots n - 1$  и  $\mu_j = \mu \min(j, r); j = 1 \dots n$ .

Соответственно, стационарный коэффициент готовности системы:

$$K_{\Gamma} = \frac{\sum_{k=0}^{s-1} \lambda^k \mu^{n-k} \prod_{i=0}^{k-1} \min(n - i, f) \prod_{j=k+1}^n \min(j, r)}{\sum_{q=0}^n \lambda^q \mu^{n-q} \prod_{i=0}^{q-1} \min(n - i, f) \prod_{j=q+1}^n \min(j, r)}.$$

Среднее время наработки до первого отказа из полностью исправного состояния:

$$T_{0,s} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\mu^{s-1-k}}{\lambda^{s-1-k}} \sum_{q=0}^k \frac{\prod_{j=1}^{s-1-k} \min(q + j, r)}{\min(n - q, f)}.$$

Среднее время наработки на отказ:

$$T_{s-1,s} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\mu^{s-1-k}}{\lambda^{s-1-k}} \frac{\prod_{j=1}^{s-1-k} \min(k + j, r)}{\min(n - k, f)}.$$

Среднее время до первого восстановления из полностью неисправного состояния:

$$T_{n,s-1} = \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{n-s} \frac{\lambda^{n-s-k}}{\mu^{n-s-k}} \sum_{q=0}^k \frac{\prod_{j=1}^{n-s-k} \min(q + j, f)}{\min(n - q, r)}.$$

Среднее время восстановления:

$$T_{s,s-1} = \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{n-s} \frac{\lambda^{n-s-k}}{\mu^{n-s-k}} \frac{\prod_{j=1}^{n-s-k} \min(k + j, f)}{\min(n - k, r)}.$$

*Пример.* Имеется система водоснабжения, состоящая из  $n = 5$  насосов, из них  $f = 3$  являются нагруженными, остальные находятся в ненагруженном резерве. Число ремонтных бригад



$r = 3$ . Система обеспечивает требуемый объем воды, если работают не менее 3 насосов. В случае отказа  $s = n - 3 + 1 = 3$  и более насосов, система продолжает работать, но не обеспечивает требуемый объем. Интенсивность отказов насосов  $\lambda = 1/720$  (в среднем раз в месяц), интенсивность восстановления  $\mu = 1/12$  (в среднем в течение 12 часов). Рассчитать показатели надежности системы водоснабжения.

*Решение.* Имеем следующий граф состояний для рассматриваемой задачи (рис. 14).

Очевидно, задача является частным случаем рассмотренной выше системы с 5 элементами, порогом отказа 3, с 3 нагруженными элементами и 3 ремонтными бригадами.

Соответственно, стационарный коэффициент готовности системы водоснабжения:

$$K_{\Gamma} = P_0(\infty) + P_1(\infty) + P_2(\infty) = \frac{2\mu^5 + 6\mu^4\lambda + 9\mu^3\lambda^2}{2\mu^5 + 6\mu^4\lambda + 9\mu^3\lambda^2 + 9\mu^2\lambda^3 + 6\mu\lambda^4 + 2\lambda^5} \approx 0,9999799613.$$

Среднее время наработки до первого отказа из полностью исправного состояния:

$$T_{0,3} = \frac{2\mu^2 + 9\mu\lambda + 27\lambda^2}{27\lambda^3} \approx 207120 \text{ часов.}$$

Среднее время наработки на отказ:

$$T_{2,3} = \frac{2\mu^2 + 6\mu\lambda + 9\lambda^2}{27\lambda^3} \approx 201840 \text{ часов.}$$

Среднее время до первого восстановления из полностью неисправного состояния:

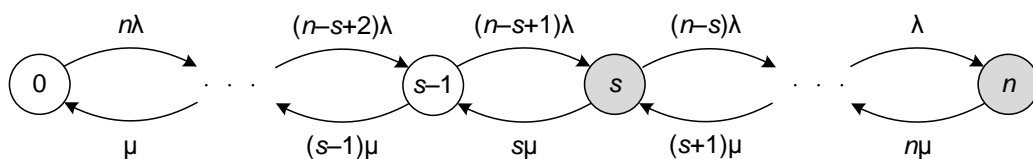
$$T_{5,2} = \frac{27\mu^2 + 9\mu\lambda + 2\lambda^2}{27\mu^3} \approx 12 \text{ часов.}$$

Среднее время восстановления:

$$T_{3,2} = \frac{9\mu^2 + 6\mu\lambda + 2\lambda^2}{27\mu^3} \approx 4 \text{ часов.}$$

*Частный случай 1.* Система из  $n$  одинаковых восстанавливаемых элементов с порогом отказа  $1 \leq s \leq n$  со всеми нагруженными элементами ( $f = n$ ) и неограниченными ремонтными возможностями ( $r = n$ ).

Тогда марковская модель системы (рис. 15) является частным случаем рассмотренной выше



**Рис. 15.** Граф системы с  $n$  идентичными элементами, порогом отказа  $s$ , со всеми нагруженными элементами и неограниченным ремонтом

общей модели с интенсивностями переходов  $\lambda_i = (n - i)\lambda; i = 0 \dots n - 1$  и  $\mu_j = j\mu; j = 1 \dots n$ :

Соответственно, стационарный коэффициент готовности системы:

$$K_{\Gamma} = \frac{\sum_{k=0}^{s-1} \lambda^k \mu^{n-k} C_n^k}{(\lambda + \mu)^n}.$$

Среднее время наработки до первого отказа из полностью исправного состояния:

$$T_{0,s} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{s-1} \left( \frac{\mu^{s-1-k}}{\lambda^{s-1-k}} \sum_{q=0}^k \left( \frac{C_n^q}{(s-k+q)C_n^{s+k-q}} \right) \right).$$

Среднее время наработки на отказ:

$$T_{s-1,s} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{s C_n^s} \sum_{k=0}^{s-1} \left( \frac{\mu^{s-1-k}}{\lambda^{s-1-k}} C_n^k \right).$$

Среднее время до первого восстановления из полностью неисправного состояния:

$$T_{n,s-1} = \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{n-s} \left( \frac{\lambda^{n-s-k}}{\mu^{n-s-k}} \sum_{q=0}^k \left( \frac{C_n^q}{(s+k-q)C_n^{s+k-q}} \right) \right).$$

Среднее время восстановления:

$$T_{s,s-1} = \frac{1}{\mu} \frac{1}{s C_n^s} \sum_{k=0}^{n-s} \left( \frac{\lambda^{n-s-k}}{\mu^{n-s-k}} C_n^k \right).$$

*Примечание 1.* В частности, при  $s = 1$  имеем чисто последовательную систему (неработоспособную при отказе любого элемента). Стационарный коэффициент готовности системы:

$K_{\Gamma} = P_0(\infty) = \frac{\mu^n}{(\lambda + \mu)^n}$ . Среднее время наработки на отказ (совпадает со средним временем наработки до первого отказа):  $T_{0,1} = \frac{1}{n\lambda}$ . Среднее

время восстановления:  $T_{1,0} = \frac{1}{n\lambda} \left( \left( 1 + \frac{\lambda}{\mu} \right)^n - 1 \right)$ .

Среднее время до первого восстановления из полностью неисправного состояния:

$T_{n,0} = \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1 + \lambda/\mu)^k}{1 + k}$ .

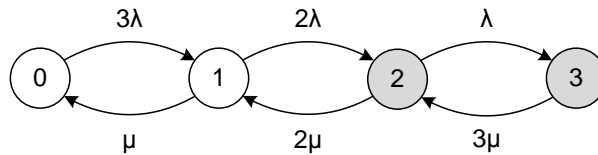


Рис. 16. Граф состояний вычислительной системы

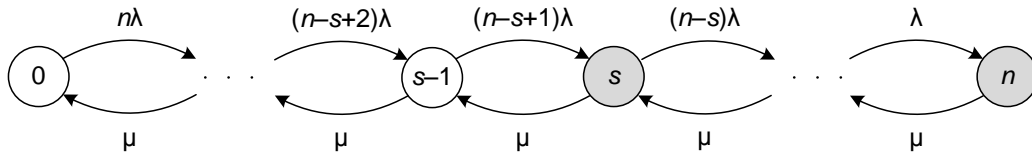


Рис. 17. Граф системы с  $n$  идентичными элементами, порогом отказа  $s$ , со всеми нагруженными элементами и одной ремонтной бригадой

*Примечание 2.* В частности, при  $s = n$  имеем чисто параллельную систему (неработоспособную только при отказе всех элементов). Стационарный коэффициент готовности системы:

$$K_{\Gamma} = 1 - P_n(\infty) = 1 - \frac{\lambda^n}{(\lambda + \mu)^n}.$$

Среднее время наработки до первого отказа из полностью исправного состояния:

$$T_{0,n} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1 + \mu/\lambda)^k}{1 + k}.$$

Среднее время наработки на отказ:

$$T_{n-1,n} = \frac{1}{n\mu} \left( \left( 1 + \frac{\mu}{\lambda} \right)^n - 1 \right).$$

Среднее время восстановления (совпадает со средним временем до первого восстановления из полностью неисправного состояния):

$$T_{n,n-1} = \frac{1}{n\mu}.$$

*Пример.* Имеется отказоустойчивая вычислительная система, состоящая из  $n = 3$  идентичных вычислительных блоков, выполняющих одни и те же вычисления. В качестве результата выбирается вариант, полученный большинством вычислительных блоков (мажоритарный принцип). Соответственно, при отказе  $s = 2$  и более вычислительных блоков система дает неверные результаты вычислений. Интенсивность отказов вычислительного блока  $\lambda = 1/8760$  (отказы в среднем раз в год), интенсивность восстановления  $\mu = 1/24$  (в среднем в течение суток). Все вычислительные блоки являются нагруженными, и имеются неограниченные ремонтные возможности. Рассчитать показатели надежности.

*Решение.* Граф состояний для рассматриваемой задачи (рис. 16):

Стационарный коэффициент готовности вычислительной системы:

$$K_{\Gamma} = P_0(\infty) + P_1(\infty) = \frac{\mu^3 + 3\mu^2\lambda}{(\lambda + \mu)^3} \approx 0,9999776454.$$

Среднее время наработки до первого отказа из полностью исправного состояния:

$$T_{0,2} = \frac{\mu + 5\lambda}{6\lambda^2} \approx 540200 \text{ часов.}$$

Среднее время наработки на отказ:

$$T_{1,2} = \frac{\mu + 3\lambda}{6\lambda^2} \approx 537280 \text{ часов.}$$

Среднее время до первого восстановления из полностью неисправного состояния:

$$T_{3,1} = \frac{\lambda + 5\mu}{6\mu^2} \approx 20 \text{ часов.}$$

Среднее время восстановления:

$$T_{2,1} = \frac{\lambda + 3\mu}{6\mu^2} \approx 12 \text{ часов.}$$

*Частный случай 2.* Система из  $n$  одинаковых восстанавливаемых элементов с порогом отказа  $1 \leq s \leq n$  со всеми нагруженными элементами ( $f = n$ ) и только с одной ремонтной бригадой ( $r = 1$ ). Тогда марковская модель системы (рис. 17) является частным случаем рассмотренной выше общей модели с интенсивностями переходов  $\lambda_i = (n - i)\lambda; i = 0 \dots n - 1$  и  $\mu_j = \mu; j = 1 \dots n$ .

Соответственно, стационарный коэффициент готовности системы:

$$K_{\Gamma} = \frac{\sum_{k=0}^{s-1} \left( \frac{\lambda^k \mu^{n-k} n!}{(n-k)!} \right)}{\sum_{q=0}^n \left( \frac{\lambda^q \mu^{n-q} n!}{(n-q)!} \right)}.$$

Среднее время наработки до первого отказа из полностью исправного состояния:

$$T_{0,s} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{s-1} \left( \frac{\mu^{s-1-k}}{\lambda^{s-1-k}} \sum_{q=0}^k \left( \frac{(n-s+k-q)!}{(n-q)!} \right) \right).$$

Среднее время наработки на отказ:

$$T_{s-1,s} = \frac{(n-s)!}{\lambda} \sum_{k=0}^{s-1} \left( \frac{\mu^{s-1-k}}{\lambda^{s-1-k}} \frac{1}{(n-k)!} \right).$$

Среднее время до первого восстановления из полностью неисправного состояния:

$$T_{n,s-1} = \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{n-s} \left( \frac{\lambda^{n-s-k}}{\mu^{n-s-k}} \sum_{q=0}^k \left( \frac{(n-s-k+q)!}{q!} \right) \right).$$

Среднее время восстановления:

$$T_{s,s-1} = \frac{(n-s)!}{\mu} \sum_{k=0}^{n-s} \left( \frac{\lambda^{n-s-k}}{\mu^{n-s-k}} \frac{1}{k!} \right).$$

*Частный случай 3.* Система из  $n$  одинаковых восстанавливаемых элементов с порогом отказа  $1 \leq s \leq n$  с одним нагруженным элементом ( $f = 1$ ) и неограниченными ремонтными возможностями ( $r = n$ ).

Тогда марковская модель системы (рис. 18) является частным случаем рассмотренной выше общей модели с интенсивностями переходов  $\lambda_i = \lambda; i = 0 \dots n-1$  и  $\mu_j = j\mu; j = 1 \dots n$ :

Соответственно, стационарный коэффициент готовности системы:

$$K_{\Gamma} = \frac{\sum_{k=0}^{s-1} \left( \frac{\lambda^k \mu^{n-k} n!}{k!} \right)}{\sum_{q=0}^n \left( \frac{\lambda^q \mu^{n-q} n!}{q!} \right)}.$$

Среднее время наработки до первого отказа из полностью исправного состояния:

$$T_{0,s} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{s-1} \left( \frac{\mu^{s-1-k}}{\lambda^{s-1-k}} \sum_{q=0}^k \left( \frac{(s-1-k+q)!}{q!} \right) \right).$$

Среднее время наработки на отказ:

$$T_{s-1,s} = \frac{(s-1)!}{\lambda} \sum_{k=0}^{s-1} \left( \frac{\mu^{s-1-k}}{\lambda^{s-1-k}} \frac{1}{k!} \right).$$

Среднее время до первого восстановления из полностью неисправного состояния:

$$T_{n,s-1} = \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{n-s} \left( \frac{\lambda^{n-s-k}}{\mu^{n-s-k}} \sum_{q=0}^k \left( \frac{(s-1+k-q)!}{(n-q)!} \right) \right).$$

Среднее время восстановления:

$$T_{s,s-1} = \frac{(s-1)!}{\mu} \sum_{k=0}^{n-s} \left( \frac{\lambda^{n-s-k}}{\mu^{n-s-k}} \frac{1}{(n-k)!} \right).$$

*Частный случай 4.* Система из  $n$  одинаковых восстанавливаемых элементов с порогом отказа  $1 \leq s \leq n$  с одним нагруженным элементом ( $f = 1$ ) и одной ремонтной бригадой ( $r = 1$ ).

Тогда марковская модель системы (рис. 19) является частным случаем рассмотренной выше общей модели с интенсивностями переходов  $\lambda_i = \lambda; i = 0 \dots n-1$  и  $\mu_j = \mu; j = 1 \dots n$ .

Соответственно, стационарный коэффициент готовности системы:

$$K_{\Gamma} = \sum_{k=0}^{s-1} P_k(\infty) = \frac{1 - (\lambda/\mu)^s}{1 - (\lambda/\mu)^{n+1}}.$$

Среднее время наработки до первого отказа из полностью исправного состояния:

$$T_{0,s} = \frac{s - (s+1)\mu/\lambda + (\mu/\lambda)^{s+1}}{\lambda(1 - \mu/\lambda)^2}.$$

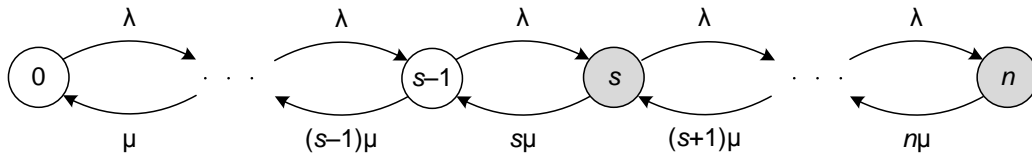


Рис. 18. Граф системы с  $n$  идентичными элементами, порогом отказа  $s$ , одним нагруженным элементом и неограниченным ремонтом

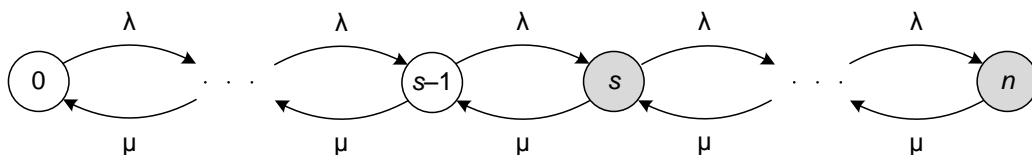


Рис. 19. Граф системы с  $n$  идентичными элементами, порогом отказа  $s$ , одним нагруженным элементом и одной ремонтной бригадой

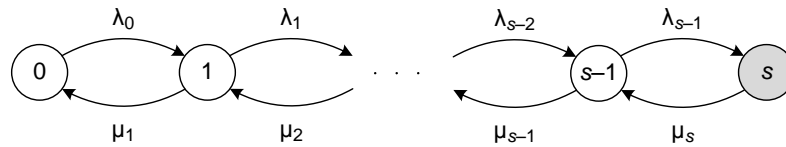


Рис. 20. Граф системы с  $n$  идентичными элементами, порогом отказа  $s$  и аварийным отключением системы при достижении состояния  $s$

Среднее время наработки на отказ:

$$T_{s-1,s} = \frac{1 - (\mu/\lambda)^s}{\lambda(1 - \mu/\lambda)} \quad K_{\Gamma} = \frac{\sum_{k=0}^{s-1} \left( \prod_{i=0}^{k-1} \lambda_i \prod_{j=k+1}^s \mu_j \right)}{\sum_{q=0}^s \left( \prod_{i=0}^{q-1} \lambda_i \prod_{j=q+1}^s \mu_j \right)}. \quad (21)$$

Среднее время до первого восстановления из полностью неисправного состояния:

$$T_{n,s-1} = \frac{(n-s+1)}{\mu(1-\lambda/\mu)^2} + \frac{(\lambda/\mu)^{n-s+2} - (n-s+2)\lambda/\mu}{\mu(1-\lambda/\mu)^2}.$$

Среднее время восстановления:

$$T_{s,s-1} = \frac{1 - (\lambda/\mu)^{n-s+1}}{\mu(1 - \lambda/\mu)}.$$

Среднее время наработки системы до первого отказа из полностью исправного состояния является средним временем перехода из состояния 0 в состояние  $s$ , и выводится из формулы 14 при  $u = 0$  и  $v = s$ :

$$T_{0,s} = \sum_{k=0}^{s-1} \left( \sum_{q=0}^k \left( \frac{1}{\lambda_q} \prod_{j=1}^{s-1-k} \left( \frac{\mu_{q+j}}{\lambda_{q+j}} \right) \right) \right). \quad (22)$$

Среднее время наработки на отказ является средним временем перехода из состояния  $s-1$  в состояние  $s$ , и выводится из формулы 14 при  $u = s-1$  и  $v = s$ :

$$T_{s-1,s} = \sum_{k=0}^{s-1} \left( \frac{1}{\lambda_k} \prod_{j=1}^{s-1-k} \left( \frac{\mu_{k+j}}{\lambda_{k+j}} \right) \right). \quad (23)$$

Среднее время до полного восстановления из аварийного состояния является средним временем перехода из состояния  $s$  в состояние 0, и выводится из формулы 15 при  $u = 0$  и  $v = s$ , и интенсивностях переходов  $\lambda_s = \dots = \lambda_{n-1} = 0$ :

$$T_{s,0} = \sum_{k=0}^{s-1} \left( \sum_{q=0}^k \left( \frac{1}{\mu_{s-q}} \prod_{j=1}^{s-1-k} \left( \frac{\lambda_{s-q-j}}{\mu_{s-q-j}} \right) \right) \right). \quad (24)$$

Среднее время восстановления является средним временем перехода из состояния  $s$  в состояние  $s-1$ , и выводится из формулы 15 при  $u = s-1$  и  $v = s$ , и интенсивностях переходов  $\lambda_s = \dots = \lambda_{n-1} = 0$ :

$$T_{s,s-1} = \frac{1}{\mu_s}. \quad (25)$$

Особо отметим, что коэффициент готовности связан со средним временем наработки на

### 6. СИСТЕМА С МНОЖЕСТВОМ ИДЕНТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ЗАДАННЫМ ПОРОГА ОТКАЗА И С ОТКЛЮЧЕНИЕМ ПРИ ДОСТИЖЕНИИ ПОРОГА ОТКАЗА

Пусть имеется система с  $n$  идентичными восстанавливаемыми элементами с одинаковыми интенсивностями отказов и восстановления, причем система неработоспособна при отказе  $s$  и более элементов, причем  $1 \leq s \leq n$ .

Кроме того, пусть при достижении состояния  $s$  система аварийно отключается, и оставшиеся работоспособные элементы не могут отказывать, а отказавшие элементы могут восстанавливаться, и после восстановления одного элемента система вновь становится работоспособной. Тогда обобщенная марковская модель системы (рис. 20):

Выведем теперь формулы для расчета показателей надежности системы.

Стационарный коэффициент готовности системы является суммой стационарных вероятностей состояний  $0 \dots s-1$ , в которых система работоспособна, и она выводится из формулы (13) при интенсивностях  $\lambda_s = \dots = \lambda_{n-1} = 0$ :

отказ и средним временем восстановления тождеством:  $K_{\Gamma} = \frac{T_{s-1,s}}{T_{s-1,s} + T_{s,s-1}}$ ;  $1 \leq s \leq n$ .

*Примечание.* Если  $\mu_s = 0$ , то получаем модель системы с необратимым отказом. Несмотря на то, что элементы системы являются восстанавливаемыми, в целом система оказывается невозстанавливаемой и функционирует до первого отказа. Стационарный коэффициент готовности такой системы  $K_{\Gamma} = 0$ . Формула для вычисления среднего времени наработки до первого отказа из полностью исправного состояния  $T_{0 \rightarrow s}$  остается такой же. Временные показатели  $T_{s-1 \rightarrow s}$ ,  $T_{s \rightarrow s-1}$  и  $T_{s \rightarrow 0}$  теряют смысл. Примером таких систем являются избыточные дисковые массивы хранения данных RAID (redundant array of inexpensive disks).

Мы не будем повторно рассматривать различные частные случаи данной модели, как это было сделано выше, поскольку соответствующие формулы могут быть получены путем соответствующих подстановок для интенсивностей переходов  $\lambda_i$  и  $\mu_j$ .

Ограничимся рассмотрением одного специального случая системы из  $n$  идентичных элементов с равномерным перераспределением нагрузки при отказе элементов с пропорциональным увеличением интенсивности отказов оставшихся элементов, одной ремонтной бригадой, и отключением системы при достижении порога отказа  $s$ .

*Частный случай.* Пусть имеется система из  $n$  идентичных элементов, аварийно отключающаяся при отказе  $s$  элементов, со всеми нагруженными элементами и одной единственной ремонтной бригадой.

Базовая интенсивность отказов при работоспособности всех элементов равна  $\lambda$ . При отказе элементов нагрузка отказавших элементов равномерно перераспределяется между оставшимися элементами с учетом того, что у них есть определенные запасы мощности для выполнения дополнительной нагрузки. Будем упрощенно считать, что интенсивность отказов элементов при этом пропорционально возраста-

ет и становится равной  $\lambda n / (n - k)$ , где  $k$  – число отказавших элементов. Тогда, поскольку число оставшихся элементов равно  $n - k$ , трудно заметить, что суммарная интенсивность отказов всех работающих элементов при таком перераспределении нагрузки будет равна  $n\lambda$  при любом количестве отказов  $k < s$ .

Интенсивность восстановления (замены) элемента равна  $\mu$ . В силу ограниченных ремонтных возможностей в каждый момент времени только один элемент может находиться в ремонте. Кроме того, после аварийного отключения системы помимо восстановления одного элемента необходима дополнительная работа по запуску системы. Соответственно, итоговая интенсивность вывода из аварийного состояния равна  $\gamma$ , причем  $\gamma < \mu$ .

Тогда имеем следующую модель надежности (рис. 21), получаемую из общей модели с аварийным отключением путем подстановки в качестве интенсивностей:  $\lambda_0 = \dots = \lambda_{s-1} = n\lambda$ ,  $\mu_1 = \dots = \mu_{s-1} = \mu$  и  $\mu_s = \gamma$ .

Соответственно, стационарный коэффициент готовности системы:

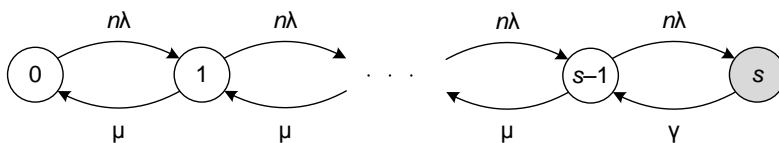
$$K_{\Gamma} = \frac{1 - \left(\frac{n\lambda}{\mu}\right)^s}{1 - \left(\frac{n\lambda}{\mu}\right)^s \left(1 - \frac{\mu}{\gamma} \left(1 - \frac{n\lambda}{\mu}\right)\right)}$$

Среднее время наработки до первого отказа из полностью исправного состояния:

$$T_{0,s} = \frac{s - (s+1) \frac{\mu}{n\lambda} + \left(\frac{\mu}{n\lambda}\right)^{s+1}}{n\lambda \left(1 - \frac{\mu}{n\lambda}\right)^2}$$

Среднее время наработки на отказ:

$$T_{s-1,s} = \frac{1 - \left(\frac{\mu}{n\lambda}\right)^s}{n\lambda \left(1 - \frac{\mu}{n\lambda}\right)}$$



**Рис. 21.** Граф системы с  $n$  идентичными элементами, порогом отказа  $s$ , перераспределением нагрузки, одной ремонтной бригадой и аварийным отключением при отказе  $s$  элементов

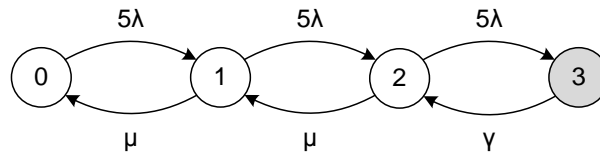


Рис. 22. Граф состояний системы электропитания

Среднее время до полного восстановления из аварийного состояния:

$$T_{s,0} = \frac{\left(\frac{n\lambda}{\mu}\right)^s + \left(s + \frac{\mu}{\gamma} \left(1 - \left(\frac{n\lambda}{\mu}\right)^s\right)\right) \left(1 - \frac{n\lambda}{\mu}\right) - 1}{\mu \left(1 - \frac{n\lambda}{\mu}\right)^2}.$$

Среднее время восстановления:

$$T_{s,s-1} = \frac{1}{\gamma}.$$

*Пример.* Имеется система электропитания, состоящая из  $n = 5$  идентичных блоков питания с интенсивностями отказов  $\lambda = 1/8760$  (в среднем раз в год). Система обеспечивает электропитанием некоторую установку, которая в равных долях использует мощности всех работоспособных блоков питания. При отказе блоков, потребляемая мощность равномерно перераспределяется между оставшимися блоками. Соответственно, также пропорционально возрастает интенсивность отказов оставшихся блоков.

Интенсивность восстановления блоков питания  $\mu = 1/48$  (в среднем 48 часов). В каждый момент времени может ремонтироваться только один блок питания.

Мощности блоков питания хватает для того, чтобы обеспечивать требуемую нагрузку при работоспособности не менее 3 блоков. При отказе  $s = (n - 3) + 1 = 3$  блоков питания, система электропитания аварийно отключается. Интенсивность восстановления системы из аварийного состояния, включая восстановление блока питания и дополнительные работы, составляет  $\gamma = 1/60$  (в среднем 60 часов). Рассчитать показатели надежности системы.

*Решение.* Граф состояний для рассматриваемой задачи (рис. 22).

Стационарный коэффициент готовности системы:

$$K_T \approx 0,9999749986.$$

Среднее время наработки до первого отказа из полностью исправного состояния:

$$T_{0,3} \approx 2467254 \text{ часов.}$$

Среднее время наработки на отказ:

$$T_{2,3} \approx 2399802 \text{ часов.}$$

Среднее время до полного восстановления из аварийного состояния:

$$T_{3,0} \approx 159 \text{ часов.}$$

Среднее время восстановления:

$$T_{3,2} \approx 60 \text{ часов.}$$

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в рамках статьи рассмотрены известные модели надежности и расчетные формулы для показателей надежности восстанавливаемого элемента, системы из двух идентичных восстанавливаемых элементов, известная обобщенная марковская цепь гибели и размножения и формула для расчета стационарных вероятностей состояний для системы из  $n$  идентичных элементов.

Кроме того, приведены полученные авторами математические модели и их решения для расчета среднего времени переходов из произвольного состояния  $u$  в произвольное состояние  $v$ , причем  $u < v$ , и среднего времени обратного перехода для обобщенной марковской цепи гибели размножения. Также рассмотрен ряд частных случаев с выведенными для них расчетными формулами и несколько примеров расчета показателей надежности.

Полученные теоретические результаты использовались в многолетней практике проектирования и эксплуатации систем хранения, обработки и передачи данных НИУ МЭИ (ТУ), Балаковской АЭС, ОАО «Красный Пролетарий» и ряда других предприятий, а также при преподавании дисциплины «Диагностика и надежность автоматизированных систем».

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черкесов Г. Н. Надежность аппаратно-программных комплексов. СПб.: Питер, 2005. [[ G. N. Cherkesov, *Reliability of Hardware and Software Systems*, (in Russian). Saint-Petersburg: Piter, 2005. ]]
2. Половко А. М., Гуров С. В. Основы теории надежности. 2-е изд. СПб.: БХВ-Петербург, 2006. [[ A. M. Polovko

and S. V. Gurov, *Basis of Reliability Theory*, (in Russian). Saint-Petersburg: BHV-Petersburg, 2006. ]]

3. **Rausand M., Hoyland A.** System reliability theory. John Wiley & Sons Inc., 2004. [[ Marvin Rausand, Arnljot Hoyland, System reliability theory, John Wiley and Sons Inc., 2004. ]]

4. **Shooman M. L.** Reliability of computer systems and networks. John Wiley & Sons Inc., 2002. [[ Martin L. Shooman, Reliability of computer systems and networks, John Wiley & Sons Inc., 2002. ]]

5. **Каяшев А. И., Рахман П. А., Шарипов М. И.** Анализ показателей надежности избыточных дисковых массивов // Вестник УГАТУ. 2013. Т. 17, № 2 (55). С. 163-170. [[ A. I. Kayashev, P. A. Rahman, M. I. Sharipov, "Reliability analysis of redundant disk arrays," (in Russian), *Vestnik UGATU*, vol. 17, no. 2 (55), pp. 163-170, 2013. ]]

6. **Каяшев А. И., Рахман П. А., Шарипов М. И.** Анализ показателей надежности локальных компьютерных сетей // Вестник УГАТУ. 2013. Т. 17, № 5 (58). С. 140-149. [[ A. I. Kayashev, P. A. Rahman, M. I. Sharipov, "Reliability analysis of local area networks," (in Russian), *Vestnik UGATU*, vol. 17, no. 5 (58), pp. 140-149, 2013. ]]

7. **Каяшев А.И., Рахман П.А., Шарипов М.И.** Анализ показателей надежности двухуровневых магистральных сетей // Вестник УГАТУ. 2014. Т. 18, № 2 (63). С. 197-207. [[ A. I. Kayashev, P. A. Rahman, M. I. Sharipov, "Reliability analysis of two-level backbone networks," (in Russian), *Vestnik UGATU*, vol. 18, no. 2 (63), pp. 197-207, 2014. ]]

#### ОБ АВТОРАХ

**РАХМАН Павел Азизурович**, доц. каф. автоматизир. техн. и информ. систем. М-р техн. и технол. по информатике и выч. технике (МЭИ, 2000). Канд. техн. наук по телеком. системам и комп. сетям (МЭИ, 2005). Иссл. в обл. телекоммуникационных систем и компьютерных сетей.

**КАЯШЕВ Александр Игнатьевич**, проф., зав. каф. автоматизир. техн. и информ. систем. Дипл. инж. (Рязанск. радиотехн. ин-т, 1967). Д-р техн. наук (МГТУ «Станкин», 1996). Иссл. в обл. управления технол. объектами с распр. параметрами.

**ШАРИПОВ Марсель Ильгизович**, доц. каф. автоматизир. техн. и информ. систем. Дипл. инженер (УГНТУ, 2006). Канд. техн. наук (УГНТУ, 2010). Иссл. в обл. машин, агрегатов и процессов в нефтегазовой отрасли.

#### METADATA

**Title:** Markov birth-death chain in reliability models of technical systems.

**Authors:** P. A. Rahman<sup>1</sup>, A. I. Kayashev<sup>2</sup>, M. I. Sharipov<sup>3</sup>.

**Affiliation:** Sterlitamak branch of Ufa State Petroleum Technological University, Russia.

**E-mail:** pavelar@yandex.ru<sup>1</sup>, sharipovm@mail.ru<sup>3</sup>

**Language:** Russian.

**Source:** Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 19, no. 1 (67), pp. 156-170, 2015. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

**Abstract:** Markov birth-death chain and analytic formulas for steady-state probabilities of states, mean time of passage from one given state to another state are observed. Reliability model of system with set of identical repairable elements, given failure threshold, with or without emergency shutdown after reaching failure threshold, several particular cases, analytic formulas for reliability indicators and calculation examples are also provided.

**Key words:** markov birth-death chain; reliability indicators.

#### About authors:

**RAHMAN, Pavel Azizurovich**, Associate professor (docent) of Automated Technological and Informational Systems Department, Sterlitamak branch of Ufa State Petroleum Technological University. M.Sc. in Computer Science (Moscow Power Engineering Institute, 2000), Ph.D. in Technical Sciences (Moscow Power Engineering Institute, 2005).

**KAYASHEV, Alexander Ignatievich**, Head of Automated Technological and Informational Systems Department, Sterlitamak branch of Ufa State Petroleum Technological University. Dr. of Tech. Sci. (Moscow State University of Technology «Stankin», 1996).

**SHARIPOV, Marsel Ilgizovich**, Associate professor (docent) of Automated Technological and Informational Systems Department, Sterlitamak branch of Ufa State Petroleum Technological University. Ph.D. in Technical Sciences (Ufa State Petroleum Technological University, 2010).