Уфа: УГАТУ, 2006 Вестник УГАТУ Т. 7, № 1 (14). С. 133–216

НАУЧНЫЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.2

Н. К. БАКИРОВ, Н. Ф. ЛУКМАНОВ

ВЕРОЯТНОСТЬ НАХОЖДЕНИЯ ОДНОЙ БРОУНОВСКОЙ ТРАЕКТОРИИ МЕЖДУ ДВУМЯ ДРУГИМИ

Получена вероятность нахождения одной броуновской траектории между двумя другими.
Винеровский процесс; броуновская траектория

Пусть $W_1(t), W_2(t), W_3(t)$, $t \in [0,1]$ суть независимые стандартные винеровские процессы, обозначим для $C_1 \geqslant 0$, $C_2 \geqslant 0$

$$U(C_1, C_2) = \mathbf{P}\{W_1(t) - C_1 \leqslant W_2(t) \leqslant \leqslant W_3(t) + C_2, \forall t \in [0,1]\}$$

— вероятность того, что три независимые броуновские частицы, стартующие одновременно из разных точек на прямой, не столкнутся в течение промежутка времени $[0,1]$

Вероятность нестолкновения двух частиц по известной классической формуле равна, [1]

$$A(C_1) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}\{W_1(t) - C_1 \leqslant W_2(t), \forall t \in [0,1]\} = \mathbf{P}\left\{\sup_{t\in[0,1]} W_1(t) \leqslant \frac{C_1}{2}\right\} = 1 - 2\int\limits_{C_1/\sqrt{2}}^{\infty} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dz.$$

Цель настоящей работы – в выводе формулы для величины $U(C_1, C_2)$.

На плоскости R^2 обозначим через D_1 сектор с вершиной в начале координат, лежащий в первой и четвертой четвертях, симметричный относительно оси OX, с углом при вершине $60°$. Прямые $x = 0, y = \pm x/\sqrt{3}$ разбивают плоскость на шесть конгруэнтных секторов $D_1, D_2, \ldots, D_6$, здесь нумерация секторов соответствует их обходу против часовой стрелки. Пусть $z = (x, y)$, P_k – оператор поворота плоскости относительно начала координат на угол $(k-1)60°$ по часовой стрелке, обозначим

$$Q(z) = \frac{4}{\pi} e^{-\frac{x^2}{2} - \frac{3y^2}{2}},\ f(z) = (-1)^{k+1} Q(P_k z),$$

$$\forall z \in D_k \quad k = 1, 2, ..., 6,$$

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \frac{1}{k!\Gamma(k+\nu+1)},$$

$$R(t) = \sqrt{t} e^{-t} I_0(t),$$

$$G_\lambda(z) = \frac{|z|}{8\sqrt{2\pi}(1-\lambda^2)^{3/2}} R'\left(\frac{|z|^2}{8(1-\lambda^2)}\right),$$

$$|z|^2 = x^2 + y^2.$$

Теорема. *Справедливо представление:*

$$U(C_1, C_2) = V\left(\frac{C_1 + C_2}{2}, \frac{C_2 - C_1}{2\sqrt{3}}\right) + A(C_1)A(C_2), \quad \forall C_1, C_2 \geqslant 0,$$

где

$$V(x, y) = -\frac{1}{2}\int_0^1 f\left(\frac{z}{\lambda}\right) * G_\lambda(z)\,d\lambda,$$

здесь $u * v$ – операция свертки функций u и v.

Доказательство теоремы разбивается на два этапа. На первом выводится дифференциальное уравнение для вероятности $U(C_1, C_2)$, на втором этапе определяется его решение.

1. ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТИ $U(C_1, C_2)$

Обозначим $\mathcal{F}_\alpha$ – сигма-алгебру, порожденную случайным вектором $W(\alpha) = (W_1(\alpha), W_2(\alpha), W_3(\alpha))$, и определим случайное событие

$$R[\alpha, \beta] = \Big\{W_1(t) - C_1 \leqslant W_2(t) \leqslant \leqslant W_3(t) + C_2, \forall t \in [\alpha, \beta]\Big\},$$

тогда, в силу свойства марковости винеровского процесса,

$$U(C_1, C_2) = \mathbf{EP}\left\{R[0,\alpha], R[\alpha, 1] \middle| \mathcal{F}_\alpha\right\} = \mathbf{EP}\left\{R[0,\alpha] \middle| \mathcal{F}_\alpha\right\} \mathbf{P}\left\{R[\alpha, 1] \middle| \mathcal{F}_\alpha\right\}.$$

Обозначим

$$O_1 = \Big\{W_1(t) - C_1 \leqslant W_2(t), \forall t \in [0, \alpha]\Big\},$$

$$O_2 = \left\{ W_2(t) \leqslant W_3(t) + C_2,\ \forall t \in [0, \alpha] \right\},$$

тогда, в силу автомодельности винеровского процесса: $\mathbf{P}\{O_1\} = A(C_1/\sqrt{\alpha}), \mathbf{P}\{O_2\} = A(C_2/\sqrt{\alpha})$. Далее, оценим

$$\mathbf{E}\left(1 - \mathbf{P}\left\{R[0,\alpha] \middle| \mathcal{F}_\alpha\right\}\right) = 1 - \mathbf{P}\left\{R[0,\alpha]\right\} =$$
$$= 1 - \mathbf{P}\{O_1 O_2\} = \mathbf{P}\{\overline{O}_1 + \overline{O}_2\} \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}\{\overline{O}_1\} + \mathbf{P}\{\overline{O}_2\} =$$
$$= 2 - A(C_1/\sqrt{\alpha}) - A(C_2/\sqrt{\alpha}) =$$
$$= 2 \int\limits_{C_1/\sqrt{2\alpha}}^{\infty} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dz + 2 \int\limits_{C_2/\sqrt{2\alpha}}^{\infty} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dz =$$
$$= o(\alpha^N), \quad \forall N > 0$$

при $\alpha \to 0$, $C_1, C_2 > 0$. Далее, ввиду свойств автомодельности винеровского процесса, следующие случайные процессы:

$$W_j^0(t) = \frac{W_j(\alpha + t(1-\alpha)) - W_j(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha}},$$
$$t \in [0,1],\ j = 1,2,3,$$

суть независимые стандартные винеровские случайные процессы, не зависящие от $W(\alpha)$, что позволяет переписать $\mathbf{P}\left\{R[\alpha,1] \middle| \mathcal{F}_\alpha\right\}$ через $U(.,.)$. Таким образом, учитывая сказанное выше, получаем $\forall N > 0$ при $\alpha \to 0$

$$U(C_1, C_2) = \mathbf{EP}\left\{R[\alpha,1] \middle| \mathcal{F}_\alpha\right\} + o(\alpha^N) =$$
$$= \mathbf{E}U\left(\frac{C_1 + \sqrt{\alpha}\,\gamma_1}{\sqrt{1-\alpha}}, \frac{C_2 + \sqrt{\alpha}\,\gamma_2}{\sqrt{1-\alpha}}\right) + o(\alpha^N), \quad (1)$$

где (γ_1, γ_2) – гауссовский вектор со средним 0 и матрицей ковариаций

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Следующая лемма приводится без доказательства.

Лемма 1. *Функция $U(C_1, C_2)$ бесконечно дифференцируема, все её производные непрерывны и ограничены на замыкании первого квадранта.*

Записывая

$$U\left(\frac{C_1 + \sqrt{\alpha}\,\gamma_1}{\sqrt{1-\alpha}}, \frac{C_2 + \sqrt{\alpha}\,\gamma_2}{\sqrt{1-\alpha}}\right) =$$
$$= U(C_1 + \Delta_1, C_2 + \Delta_2)$$

для соответствующих Δ_1, Δ_2 и применяя далее формулу Тейлора в (1) по Δ_1, Δ_2 в точке $\Delta_1, \Delta_2 = 0$, получаем для любых натуральных N

$$0 = \sum_{k=1}^{N} L_k(U)\alpha^k + o(\alpha^N), \quad \alpha \to 0,$$

где $L_k, k \geqslant 1$ суть соответствующие линейные дифференциальные операторы. Тем самым функция $U(C_1, C_2)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений $L_k(U) = 0, k \geqslant 1$. При $k = 1$ нетрудно подсчитать, что

$$L_1(U) = \frac{\partial^2 U}{\partial C_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial C_2^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial C_1 \partial C_2} +$$
$$+ \frac{C_1}{2}\frac{\partial U}{\partial C_1} + \frac{C_2}{2}\frac{\partial U}{\partial C_2} = 0. \quad (2)$$

Уточним теперь граничные условия на функцию $U(C_1, C_2)$. Ясно, что $U(0, C_2) = U(C_1, 0) = 0$, $\forall C_1 \geqslant 0, C_2 \geqslant 0$ и

$$\lim_{C_1 \to \infty} U(C_1, C_2) = A(C_2),$$
$$\lim_{C_2 \to \infty} U(C_1, C_2) = A(C_1). \quad (3)$$

Пусть теперь $U(C_1, C_2) = u(C_1, C_2) + A(C_1)A(C_2)$. Из (2),(3) следует, что функция $u(C_1, C_2)$ является решением следующей задачи Дирихле: $\forall C_1 > 0,\ C_2 > 0$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial C_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial C_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial C_1 \partial C_2} +$$
$$+ \frac{C_1}{2}\frac{\partial u}{\partial C_1} + \frac{C_2}{2}\frac{\partial u}{\partial C_2} = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{C_1^2 + C_2^2}{4}},$$
$$u(0, C_2) = u(C_1, 0) = 0,$$
$$\lim_{C_1 \to \infty} u(C_1, C_2) = 0, \quad \lim_{C_2 \to \infty} u(C_1, C_2) = 0. \quad (4)$$

Отсюда, в частности, в силу принципа максимума для эллиптических дифференциальных уравнений следует неравенство $u \leqslant 0$ или $U(C_1, C_2) \leqslant A(C_1)A(C_2)$, $\forall C_1, C_2 \geqslant 0$.

2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ

Ниже будет применяться метод Фурье, поэтому сначала убедимся, что функция $u(x, y)$ достаточно быстро убывает при $x, y \to \infty$. Обозначим

$$A = \left\{ \sup_{t \in [0,1]} (W_1(t) - W_2(t)) \leqslant C_1 \right\},$$
$$B = \left\{ \sup_{t \in [0,1]} (W_2(t) - W_3(t)) \leqslant C_2 \right\}$$

и $\overline{A}, \overline{B}$ – дополнения ко множествам A, B соответственно, тогда

$$0 \leqslant -u = \mathbf{P}\{A\}\mathbf{P}\{B\} - \mathbf{P}\{AB\} =$$
$$= \mathbf{P}\{\overline{A}\}\mathbf{P}\{\overline{B}\} - \mathbf{P}\{\overline{A}\,\overline{B}\} \leqslant \mathbf{P}\{\overline{A}\}\mathbf{P}\{\overline{B}\} =$$
$$= (1 - A(C_1))(1 - A(C_2)) \leqslant 4e^{-\frac{C_1^2 + C_2^2}{4}},$$

здесь мы воспользовались известным неравенством для гауссовских случайных величин

$$\mathbf{P}\{N(0,1) > x\} \leqslant e^{-x^2/2}, \quad \forall x > 0.$$

Таким образом, функция $u(C_1, C_2)$ достаточно быстро убывает на бесконечности, в частности, она суммируема на своей области определения: $C_1, C_2 \geqslant 0$.

Обозначим $\overline{U}(x, y) = u(2x, 2y)$, тогда

$$\overline{U}_{xx} + \overline{U}_{yy} - \overline{U}_{xy} + 2x\overline{U}_x + 2y\overline{U}_y = \frac{4}{\pi}e^{-x^2-y^2},$$

$$\overline{U}(0, y) = \overline{U}(x, 0) = 0, \quad x \geqslant 0, y \geqslant 0. \qquad (5)$$

Наличие мешающего члена $\overline{U}_{xy}$ в (5) приводит к неинвариантности этого уравнения к ортогональным преобразованиям. Наша ближайшая цель – избавиться от члена $\overline{U}_{xy}$ в уравнении (переходом к новой системе координат) и затем продолжить функцию $\overline{U}(x, y)$ на пространство R^2 без начала координат так, чтобы продолженная функция удовлетворяла бы там тому же дифференциальному уравнению, что и исходная функция.

Обозначим:

$$z' = (x', y'),\ Q(z') = Q(x', y') = \frac{4}{\pi}e^{-\frac{x'^2}{2}-\frac{3y'^2}{2}},$$

$$L(V) = L_{z'}(V(z')) = V_{x'x'} + V_{y'y'} + 2x'V_{x'} + 2y'V_{y'},$$

здесь индекс z' в записи $L_{z'}(.)$ обозначает переменные дифференцирования.

Переходя к новой аффинной системе координат:

$$x' = x + y, \quad y' = -\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}},$$

получаем после элементарных вычислений для $V(x', y') \stackrel{\text{def}}{=} \overline{U}(x(x', y'), y(x', y'))$:

$$V_{x'x'} + V_{y'y'} + 2x'V_{x'} + 2y'V_{y'} = \frac{4}{\pi}e^{-\frac{x'^2}{2}-\frac{3y'^2}{2}}, \qquad (6)$$

или

$$L(V) = Q(z'),$$

причем равенство выполнено на области определения функции V:

$$\forall\ x' > 0, \quad -\frac{x'}{\sqrt{3}} < y' < \frac{x'}{\sqrt{3}}.$$

Уравнение (6) записано для функций, определенных внутри сектора D_1 с вершиной в начале кординат, лежащего в первой и четвертой четвертях, симметричного относительно оси OX, с углом при вершине 60°. На сторонах сектора, очевидно, функция $V(x', y')$ равна нулю, а все её производные непрерывны в замыкании $\overline{D_1}$.

Заметим, что прямые $x' = 0, y' = \pm x'/\sqrt{3}$ разбивают плоскость R^2 на шесть конгруэнтных секторов $D_1, D_2, \ldots, D_6$, здесь нумерация секторов соответствует их обходу против часовой стрелки. Определим функцию $V(x', y')$ на D_2 следующим образом:

$$V(z') = -V(P_2 z'), \qquad \forall z' = (x', y') \in D_2,$$

где P_2 — оператор поворота относительно начала координат на 60^o по часовой стрелке, т. е.

$$P_2 z' = \left(\frac{x'}{2} + \frac{\sqrt{3}y'}{2}, -\frac{\sqrt{3}x'}{2} + \frac{y'}{2}\right).$$

Легко проверить, что дифференциальный оператор L инвариантен к ортогональным преобразованиям C (в частности, для P_2):

$$L_{z'}(V(Cz')) = L_z(V(z))|_{z=Cz'},$$

поэтому в области D_2

$$L(V) = L_{z'}(V(z')) = -L_{z'}(V(P_2 z')) =$$
$$= -\ L_z(V(z))|_{z=Pz'} = -Q(P_2 z').$$

Далее, последовательно меняя знак функции V, а её аргумент поворачивая против часовой стрелки на угол, кратный 60°, мы определим функцию V последовательно на D_3, D_4, D_5, D_6. Тем самым функцию V мы продолжим на $R^2 \setminus O$ так, что там функция V:

1) непрерывна;

2) имеет первые производные, непрерывные на прямых $x' = 0,\ y' = \pm x'/\sqrt{3}$, что вытекает в числе прочих причин также и из симметричности исходной функции $U(x, y)$ относительно перестановки её аргументов;

3) удовлетворяет уравнению

$$L(V) = V_{xx} + V_{yy} + 2xV_x + 2yV_y = f(x, y), \qquad (7)$$

здесь вторые производные могут иметь разрывы на прямых $x' = 0, y' = \pm x'/\sqrt{3}$ (т. е. уравнение (7) выполнено в обобщенном смысле), функция $f(x, y)$ определена равенствами: при $z \in D_k$

$$f(x, y) = f(z) = (-1)^{k+1}Q(P_k z), \quad k = 1, 2, \ldots, 6,$$

где P_k – оператор поворота относительно начала координат на угол $(k-1)60°$ по часовой стрелке.

Далее мы используем метод Фурье, применяя к обеим частям уравнения (7) преобразование Фурье. Обозначим:

$$v = v(p, q) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ipx+iqy}V(x, y)\,dx\,dy,$$

$$F = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ipx+iqy}f(x, y)\,dx\,dy,$$

тогда, очевидно, в силу (6) и непрерывности первых производных $V(x, y)$ функция v удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$pv'_p + qv'_q + \left(\frac{p^2+q^2}{2} + 2\right)v = -\frac{1}{2}F,$$

следовательно, в полярных координатах для

$$p = r\cos\phi, \qquad q = r\sin\phi,$$
$$v(p, q) = \hat{v}(r, \phi), \qquad F(p, q) = \hat{F}(r, \phi)$$

мы получим

$$r\hat{v}'_r + \left(2 + \frac{r^2}{2}\right)\hat{v} = -\frac{1}{2}\hat{F}, \qquad \hat{v}(0,\phi) \equiv 0$$

и, стало быть,

$$\hat{v}(r,\phi) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^r \frac{s^2}{r^2} e^{\frac{s^2-r^2}{4}} \hat{F}(s,\phi)\,ds.$$

Вводя замену переменных: $s = r\lambda$, получаем

$$\hat{v}(r,\phi) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 re^{-\frac{1}{4}r^2(1-\lambda^2)}\lambda^2 \hat{F}(r\lambda,\varphi)\,d\lambda, \tag{8}$$

при этом, очевидно, величина $\lambda^2\hat{F}(r\lambda,\varphi)$ есть преобразование Фурье функции $f(z/\lambda)$. Величину $re^{-\frac{1}{4}r^2(1-\lambda^2)}$ также можно представить как преобразование Фурье. Обозначим через $I_\nu(x)$ модифицированную функцию Бесселя:

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}\frac{1}{k!\Gamma(k+\nu+1)},$$

$$R(z) = \sqrt{z}e^{-z}I_0(z).$$

Лемма 2. *Справедливо представление*

$$re^{-\frac{1}{4}r^2(1-\lambda^2)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ipx+iqy}G_\lambda(x,y)\,dx\,dy,$$

$$r = \sqrt{p^2+q^2},$$

где

$$G_\lambda(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{8\sqrt{2\pi}(1-\lambda^2)^{3/2}}R'\left(\frac{x^2+y^2}{8(1-\lambda^2)}\right).$$

Доказательство. Используем известное представление, [1, с. 63]:

$$\int_{S_r} e^{i(\mu,z)}\,dz = 2\pi r J_0(|\mu| r), \tag{9}$$

где S_r – окружность радиуса r с центром в начале координат, $(.,.)$, $|.|$ – скалярное произведение и Евклидова норма в R^2, $J_0(x)$ – функция Бесселя первого рода, нулевого порядка, в общем случае

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)},$$

$$|\arg x| < \pi,$$

а также равенство [2, с. 724], для $\alpha > 0, \beta > 0$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} J_0(\beta x)\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\beta}R(z),$$

где $z = \beta^2/(8\alpha)$. Дифференцируя последнее тождество по α, находим, что

$$\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x^2} J_0(\beta x)\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha\beta}zR'(z). \tag{10}$$

Мы можем теперь записать, применяя (9):

$$G_\lambda(x,y) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx-iqy}re^{-\frac{1}{4}r^2(1-\lambda^2)}\,dp\,dq =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^\infty dr\int_{S_r} e^{-ipx-iqy)}re^{-\frac{1}{4}r^2(1-\lambda^2)}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty r^2 e^{-\frac{1}{4}r^2(1-\lambda^2)}J_0(r\sqrt{x^2+y^2})\,dr.$$

Применяя далее (10), получаем требуемую формулу.

Лемма доказана.

Применяя теперь к (8) обратное преобразование Фурье, получаем, что

$$V(x,t) = -\frac{1}{2}\int_0^1 f\left(\frac{z}{\lambda}\right) * G_\lambda(z)\,d\lambda,$$

где $u * v$ – операция свертки функций u и v, ч. т. д.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гихман, И. И.** Введение в теорию случайных процессов / И. И. Гихман, А. В. Скороход. М. : Наука, 1965. 656 с.
2. **Градштейн, И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. М. : Физматгиз, 1962. 1100 с.

ОБ АВТОРАХ

Бакиров Наиль Кутлужанович, вед. науч. сотр. Ин-та математики с ВЦ УНЦ РАН. Дипл. математик (МГУ, 1975). Д-р физ.-мат. наук (СПб., 1995). Область научных интересов: случайные процессы.

Лукманов Наиль Флерович, ст. преп. кафедры математики УГАТУ. Дипл. математик-инж. (УГАТУ, 1998). Исследования в области случайных процессов, страховой и финансовой математики.