УДК 517.9

А. В. ЖИБЕР, А. М. ГУРЬЕВА

ИНВАРИАНТЫ ЛАПЛАСА КЛАССИЧЕСКИХ СЕРИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ТИПА I

В работе показано, что цепочки Тоды с матрицами Картана A_n, B_n, C_n и D_n являются системами лиувиллевского типа. Для этих систем уравнений получены явные формулы для инвариантов и обобщенных инвариантов Лапласа. Показано, как с их помощью строить законы сохранения (x- и y- интегралы) и высшие симметрии. *Симметрии; интегралы; инварианты Лапласа; обобщенные инварианты*

ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее знаменитых примеров явно интегрируемого уравнения в частных производных является уравнение Лиувилля

$$u_{xy} = \exp(u). \qquad (1)$$

Исследование свойств этого уравнения привело [1–4] к различным, вообще говоря, неэквивалентным определениям класса точно интегрируемых гиперболических уравнений лиувиллевского типа. В частности, в работах [5–7] в качестве определения было выбрано свойство конечности цепочки инвариантов Лапласа линеаризованного уравнения.

Определение оказалось удачным, поскольку позволило использовать несколько классических тождеств [8], связанных с инвариантами Лапласа. В результате найдены общие формулы, позволяющие для таких уравнений, в терминах инвариантов Лапласа, описать высшие симметрии [5] и законы сохранения [6].

Свойство конечности цепочки инвариантов Лапласа может быть положено в основу классификации уравнений лиувиллевского типа. Недавно в работе [9] была приведена полная классификация всех таких скалярных уравнений вида

$$u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y) \qquad (2)$$

и предложена единая процедура нахождения общего решения.

Существование тесной связи между некоторыми важными свойствами нелинейных уравнений, такими как точная интегрируемость, наличие высших симметрий, законов сохранения и дифференциальных подстановок, и свойствами цепочки инвариантов линейного уравнения, обнаруженной в ряде работ [5, 7, 9–14], вызвало интерес к преобразованиям и инвариантам Лапласа.

Следующим естественным шагом в подобных исследованиях представляется обобщение этих результатов на системы уравнений.

В статье [9] определение уравнений лиувиллевского типа обобщено на случай нелинейных гиперболических систем вида (2) $\{u^i_{xy} = F^i(x, y, u, u_x, u_y)\}$: будем в дальнейшем u и F считать n-мерными векторами.

Далее мы для полноты изложения приводим основные результаты из работы [9], касающиеся систем дифференциальных уравнений. В случае систем дифференциальных уравнений здесь имеется серьезная проблема, связанная с определением инвариантов Лапласа. Линеаризованная система уравнений для системы (2) имеет вид

$$\left(D\bar{D} + aD + b\bar{D} + c\right) v = 0, \qquad (3)$$

где D и $\bar{D}$ — операторы полного дифференцирования по x и y соответственно, а a, b и c— матрицы:

$$a = -\left(\frac{\partial F^i}{\partial u^j_x}\right), \; b = -\left(\frac{\partial F^i}{\partial u^j_y}\right), \; c = -\left(\frac{\partial F^i}{\partial u^j}\right).$$

Прямолинейное обобщение понятия инвариантов на матричный случай состоит в следующем. Главные инварианты Лапласа определяются формулами

$$H_1 = D(a) + ba - c, \; K_1 = \bar{D}(b) + ab - c, \quad (4)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 02-01-00144)

а матрицы H_i при $i > 1$ находятся последовательно из системы уравнений

$$\bar{D}(H_i) + a_i H_i - H_i a_{i-1} = 0, \qquad (5)$$
$$H_{i+1} = D(a_i) + [b, a_i] - \bar{D}(b) + H_i, \qquad (6)$$

где $i = 1, 2, \dots, a_0 = a$. Если H_i при $i \leqslant m$ и a_i при $i \leqslant m-1$ уже известны, то из уравнения (5) определяется a_m, а затем из уравнения (6) $-H_{m+1}$. Однако если $\det H_m = 0$, то a_m либо вообще не существует, либо определяется с точностью до ядра матрицы H_m. При этом выбор элемента из ядра существенно влияет на факт существования и явные формулы для следующих инвариантов.

Аналогично определяются элементы K_i :

$$D(K_i) + b_i K_i - K_i b_{i-1} = 0, \qquad (7)$$
$$K_{i+1} = \bar{D}(b_i) + [a, b_i] - D(a) + K_i, \qquad (8)$$

где $i = 1, 2, \dots;\ \ b_0 = b$. Таким образом, мы сталкиваемся с проблемой корректного определения цепочки инвариантов.

Отметим, что именно система уравнений (2), для которой матрицы H_i и K_i вырожденные, и представляет интерес.

Теперь мы несколько по-иному определим элементы H_i и K_i: пусть матрицы $H_1, H_2, \dots, H_m$ известны и уравнение

$$\begin{gathered} \bar{D}(X_m) + a_m X_m - X_m a = 0, \\ X_m = H_m H_{m-1} \cdots H_1, \end{gathered} \qquad (9)$$

имеет решение a_m, тогда положим

$$\begin{gathered} H_{m+1} = D(a_m) + [b, a_m] - \bar{D}(b) + H_m, \\ m = 1, 2, \dots, \end{gathered} \qquad (10)$$

аналогично, если уже найдены элементы $K_1, K_2, \dots, K_m$ и существует решение b_m уравнения

$$\begin{gathered} D(Y_m) + b_m Y_m - Y_m b = 0, \\ Y_m = K_m K_{m-1} \cdots K_1, \end{gathered} \qquad (11)$$

то K_{m+1} определим по формуле

$$\begin{gathered} K_{m+1} = \bar{D}(b_m) + [a, b_m] - D(a) + K_m, \\ m = 1, 2 \dots . \end{gathered} \qquad (12)$$

Ясно, что формулы (4), (9)–(12) определяют последовательности матриц H_i и K_i, $i = 1, 2, \dots$, при условии разрешимости уравнений (9) и (11).

Заметим, что если выполнены соотношения (5) при $i = 1, 2, \dots k$, то справедливы равенства (9) для $m = 1, 2, \dots, k$. Обратное утверждение в общей ситуации неверно.

Матрицы H_i и K_i, определенные формулами (4), (9)–(12), по аналогии со скалярным случаем будем называть инвариантами Лапласа, а X_i и Y_i, $i = 1, 2, \dots$ — обобщенными инвариантами линеаризованной системы уравнений (3).

Условия существования решений a_m и b_m систем уравнений (9) и (11) приводятся в следующем предложении:

Лемма 1. *Система уравнений* (9) *имеет решение, если и только если выполнено условие*

$$\left(\bar{D} + a\right)(\operatorname{Ker} X_m) \subset \operatorname{Ker} X_m, \qquad (13)$$

а система (11)*– при условии*

$$(D + b)(\operatorname{Ker} Y_m) \subset \operatorname{Ker} Y_m. \qquad (14)$$

Так как матрицы a_i и b_i определяются неоднозначно, то инварианты H_m и K_m зависят от выбора матриц $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$ и $b_1, b_2, \dots, b_{m-1}$, и поэтому в общем случае обобщенные инварианты Лапласа X_m и Y_m определяются этим выбором. Таким образом, возникает вопрос: при каких условиях последовательности $\{X_i\}$ и $\{Y_i\}$ определены корректно. Решение этой задачи дается в предложении:

Теорема 1. *Пусть справедливы условия*

$$\begin{gathered} \left(D - b^T\right)(\operatorname{Coker} X_i) \subset \operatorname{Coker} X_i, \\ i = 1, 2, \dots, m, \\ \operatorname{Coker} X_1 \subset \operatorname{Coker} X_2 \subset \dots \subset \operatorname{Coker} X_m. \end{gathered} \qquad (15)$$

Тогда обобщенный инвариант X_{m+1} не зависит от выбора матриц $a_1, a_2, \dots, a_m$. Если

$$\begin{gathered} \left(\bar{D} - a^T\right)(\operatorname{Coker} Y_i) \subset \operatorname{Coker} Y_i, \\ i = 1, 2, \dots, m, \\ \operatorname{Coker} Y_1 \subset \operatorname{Coker} Y_2 \subset \dots \subset \operatorname{Coker} Y_m, \end{gathered} \qquad (16)$$

то обобщенный инвариант Y_{m+1} не зависит от выбора матриц $b_1, b_2, \dots, b_m$.

Таким образом, именно последовательности $\{X_i\}$ и $\{Y_i\}$ (а не $\{H_i\}$ и $\{K_i\}$) корректно определены и их обрыв был положен в основу определения систем (2) лиувиллевского типа.

Определение 1. *Назовем систему уравнений* (2) *системой лиувиллевского типа, если выполнены условия* (13) – (16) *и существуют $r \geqslant 1$ и $s \geqslant 1$ такие, что $X_r = Y_s = 0$.*

В частности в работе [9] было показано, что все цепочки Тоды, соответствующие простым алгебрам Ли ранга 2 и 3, являются системами лиувиллевского типа.

Отметим, что условия (13)–(16) были использованы в работе [15] для классификации линейных систем уравнений типа уравнений Эйлера–Пуассона.

Исследование систем уравнений лиувиллевского типа, например построения высших симметрий, законов сохранения, приводит к рассмотрению сопряженной по отношению к линеаризации (3) системы уравнений

$$\left(D\bar{D} + AD + B\bar{D} + C\right) v = 0, \tag{17}$$

где $A = -a^T$, $B = -b^T$, $C = c^T - D(a^T) - \bar{D}(b^T)$. Инварианты Лапласа системы (17) обозначим через h_i и k_i, $i = 1, 2, \ldots$, а обобщенные инварианты – символами x_m и y_m так, что

$$x_m = h_m h_{m-1} \cdots h_1 \quad \text{и} \quad y_m = k_m k_{m-1} \cdots k_1.$$

Следовательно, формулы (9)–(12) для сопряженной системы (17) запишутся в виде

$$\begin{gathered} \bar{D}(x_m) + A_m x_m - x_m A = 0, \\ h_{m+1} = D(A_m) + [B, A_m] - \bar{D}(B) + h_m, \\ m = 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{18}$$

и

$$\begin{gathered} D(y_m) + B_m y_m - y_m B = 0, \\ k_{m+1} = \bar{D}(B_m) + [A, B_m] - D(A) + k_m, \\ m = 1, 2, \ldots . \end{gathered} \tag{19}$$

Справедливо утверждение:

Теорема 2. *Обобщенные инварианты Лапласа X_m и Y_m системы уравнений (3) связаны с инвариантами x_m и y_m сопряженной системы (17) формулами:*

$$x_m = Y_m^T \qquad и \qquad y_m = X_m^T. \tag{20}$$

Доказательство. Так как главный инвариант h_1 системы (17) согласно (4) имеет вид

$$h_1 = D(A) + BA - C = (D(b) + ab - c)^T = K_1^T,$$

то

$$x_1 = Y_1^T.$$

Предположим, что первая формула (20) справедлива для $m > 1$. Покажем, что она верна при $m + 1$. Для этого умножим второе соотношение (18) справа на обобщенный инвариант x_m и, воспользовавшись индуктивным предположением, получим

$$x_{m+1} = \left\{D(A_m) - [b^T, A_m] + \bar{D}(b^T) + h_m\right\} Y_m^T. \tag{21}$$

Далее рассмотрим соотношение (11) и первое равенство (18). Перепишем их следующим образом:

$$b^T Y_m^T = D(Y_m^T) + Y_m^T b_m^T, \tag{22}$$

$$A_m Y_m^T = -\bar{D}(Y_m^T) - Y_m^T a^T. \tag{23}$$

Применяя к обеим частям равенства (22) оператор дифференцирования $\bar{D}$, а к (23) D и складывая полученные соотношения, будем иметь

$$\begin{gathered} \left[D(A_m) + \bar{D}(b^T)\right] Y_m^T = \\ = \bar{D}(Y_m^T b_m^T) - D(Y_m^T a^T) - A_m D(Y_m^T) - b^T \bar{D}(Y_m^T). \end{gathered}$$

Теперь формулу (21), учитывая последнее равенство и соотношения (22) и (23), запишем так:

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= \\ &= Y_m^T \left\{D(b_m^T) + [b_m^T, a^T] - D(a^T)\right\} + \\ &\quad + h_m Y_m^T. \end{aligned} \tag{24}$$

Так как в силу индуктивного предположения имеем

$$\begin{aligned} h_m Y_m^T &= h_m Y_{m-1}^T K_m^T = \\ &= h_m x_{m-1} K_m^T = x_m K_m^T = Y_m^T K_m^T, \end{aligned}$$

то (24) примет вид

$$x_{m+1} = Y_m^T \left\{D(b_m) + [a, b_m] - D(a) + K_m\right\}^T,$$

или, учитывая формулу (12), получим

$$x_{m+1} = Y_m^T K_{m+1}^T = Y_{m+1}^T.$$

Следовательно, согласно принципу математической индукции, получаем справедливость первой формулы (20) для любого m.

Аналогично, с использованием соотношений (4), (9), (10), (17) и (19), приходим к равенству $y_m = X_m^T$, $m = 1, 2, \ldots$. *Теорема доказана.*

Непосредственным обобщением уравнения Лиувилля (1) на случай систем (2) являются оборванные цепочки Тоды [16, 17], связанные с матрицами Картана простых алгебр

Ли. Одна из эквивалентных форм записи этих систем имеет вид

$$u^i_{xy} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \exp(u^j), \; i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (25)$$

Хорошо известно, что эти системы обладают x- и y-интегралами (см., например, [17, 18]).

В настоящей работе показано, что цепочки Тоды (25) с матрицами Картана A_n, B_n, C_n и D_n являются системами лиувиллевского типа в смысле определения, введенного выше. Для этих систем уравнений получены явные формулы для инвариантов и обобщенных инвариантов Лапласа. Показано, как с их помощью строить законы сохранения (x- и y- интегралы) и высшие симметрии.

В. В. *Соколовым* была высказана гипотеза, что индексы k, при которых происходит падение ранга обобщенных инвариантов Лапласа X_k, совпадают с показателями соответствующей простой алгебры Ли, а номер h, для которого $X_h = 0$, равен числу Кокстера. В настоящей работе она доказана для всех классических алгебр Ли.

Для исключительных матриц Картана $G_2, F_4, E_6 - E_8$, соответствующих простым алгебрам Ли, мы приведем в качестве иллюстрации описание инвариантов для системы (25) с матрицей G_2 :

$$\begin{aligned} u^1_{xy} &= 2\exp(u^1) - \exp(u^2), \\ u^2_{xy} &= -3\exp(u^1) + 2\exp(u^2). \end{aligned} \qquad (26)$$

Инварианты H_i и обобщенные инварианты X_i, определяемые соотношениями (4), (9) и (10), для уравнений (26) вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} &X_1 = H_1 = G_2 S_1, \\ &X_k = G_2 P^{-1} S_k Q, \quad k = 2, 3, 4, 5, \\ &X_6 = 0, \\ &H_k = G_2 P^{-1}(Z_k + B_k) P G_2^{-1}, \quad k = 2, 3, 4, 5, 6, \end{aligned}$$

где

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\exp(u^2) & \exp(u^1) \end{pmatrix},$$

$$B_k = \begin{pmatrix} b^k_{11} & 0 \\ b^k_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

b^k_{11} и b^k_{21} — произвольные элементы, $k = 3, 4, 5, 6$, $B_2 = 0$,

$$\begin{aligned} &S_1 = \operatorname{diag}(\exp(u^1), \exp(u^2)), \\ &S_2 = \operatorname{diag}(0, \exp(u^1 + u^2)), \\ &S_3 = \operatorname{diag}(0, 4\exp(2u^1 + u^2)), \\ &S_4 = \operatorname{diag}(0, 12\exp(3u^1 + u^2)), \\ &S_5 = \operatorname{diag}(0, 12\exp(3u^1 + 2u^2)), \\ &Z_3 = \operatorname{diag}(0, 4\exp(u^1)), \\ &Z_4 = \operatorname{diag}(0, 3\exp(u^1)), \\ &Z_5 = \operatorname{diag}(0, \exp(u^2)), \\ &Z_6 = 0. \end{aligned}$$

Отметим, что индексы k, при которых происходит падение ранга матрицы X_k, совпадают с показателями 1, 5 системы G_2, а номер $k = 6$, для которого $X_k = 0$, равен числу Кокстера [19].

1. ЦЕПОЧКА ТОДЫ СЕРИИ A_n

1.1. Инварианты и обобщенные инварианты Лапласа

Систему уравнений (25) с матрицей Картана

$$A = A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \ldots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

запишем в виде

$$D\bar{D}u = AUc. \qquad (27)$$

Здесь $u = (u^1, u^2, u^3, \ldots, u^{n-1}, u^n)^T$ — столбец неизвестных, $c = (1, 1, 1, \ldots, 1, 1)^T$, $U = \operatorname{diag}(\exp(u^1), \exp(u^2), \ldots, \exp(u^n))$. Тогда линеаризация уравнений (27) принимает форму

$$D\bar{D}v = AUv, \quad v = (v^1, v^2, \ldots, v^n)^T. \qquad (28)$$

Для описания инвариантов введем матрицы порядка n: J — верхняя треугольная матрица, все элементы которой на главной диагонали и выше ее равны единице; B_k — матрица, у которой первые $(k-1)$ столбцов произвольные, а остальные столбцы нулевые,

$k = 2, 3, \ldots, n$, $B_1 = 0$; матрицы $Z_k = \left(z^k_{ij}\right)$, $k = 2, 3, \ldots, n$, определяются как

$$z^k_{ii} = \exp(u^{i-k+1}), \quad z^k_{ii-1} = -\exp(u^i),$$
$$i = k, k+1, \ldots, n,$$

а остальные элементы равны нулю, $Z_{n+1} = 0$; матрица $T_k = \left(t^k_{ij}\right)$ содержит лишь один ненулевой элемент $t^k_{k-1,k-2} = -\exp(u^{k-1})$, $k = 3, 4, \ldots, n+1$, $T_2 = 0$;

$$S_k = \operatorname{diag}\left\{0, 0, \ldots, 0, \exp\sum_{i=1}^{k} u^i, \exp\sum_{i=2}^{k+1} u^i, \ldots, \exp\sum_{i=n-k}^{n-1} u^i, \exp\sum_{i=n-k+1}^{n} u^i\right\},$$

$$R_k = \operatorname{diag}\left\{0, 0, \ldots, 0, \sum_{i=1}^{k} u^i_y, \sum_{i=2}^{k+1} u^i_y, \ldots, \sum_{i=n-k}^{n-1} u^i_y, \sum_{i=n-k+1}^{n} u^i_y\right\}, \; k = 1, 2, \ldots, n.$$

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 3. *Система уравнений (27) является системой лиувиллевского типа. Обобщенные инварианты X_k и инварианты H_k линеаризованной системы (28), определяемые формулами (4), (9) и (10), вычисляются следующим образом:*

$$X_k = AJ^{1-k} S_k \left(J^T\right)^{1-k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad X_{n+1} = 0, \tag{29}$$

$$H_k = AJ^{1-k} Z_k J^{k-2} A^{-1} + Q_{k-1} J^{k-2} A^{-1}, \quad k = 2, 3, \ldots, n+1, \tag{30}$$

где матрицы Q_{k-1} задаются рекуррентными формулами

$$Q_{k-1} = AJ^{2-k} T_k + D(B_{k-1}) + Q_{k-2} J^{-1}, \quad k = 2, 3, \ldots, n+1, \tag{31}$$

$Q_0 = 0$. При этом решения a_k уравнений (9) имеют вид

$$a_k = -AJ^{1-k} R_k J^{k-1} A^{-1} + B_k J^{k-1} A^{-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{32}$$

Доказательство. Главный инвариант системы (28) (см. (4))

$$H_1 = AU.$$

Так как $U = S_1$, то мы приходим к формуле (29) при $k = 1$:

$$H_1 = X_1 = AS_1.$$

Матрица H_1 является невырожденной, поэтому решение уравнения (9) при $k = 1$ принимает вид

$$a_1 = -\bar{D}(X_1) X_1^{-1} = -AR_1 A^{-1}.$$

Последнее соотношение совпадает с формулой (32) для $k = 1$ потому, что B_1– нулевая матрица.

Далее согласно (10) имеем

$$H_2 = D(a_1) + H_1,$$

ввиду того, что в случае системы (28) $b = 0$. Следовательно,

$$H_2 = A\left[S_1 A - D(R_1)\right] A^{-1}$$

и так как

$$S_1 A - D(R_1) = J^{-1} Z_2,$$

то

$$H_2 = AJ^{-1} Z_2 A^{-1},$$

и мы приходим к (30) в случае $k = 2$, учитывая, что $T_2 = 0$, $Q_1 = 0$. Прямым вычислением получаем

$$X_2 = H_2 H_1 = AJ^{-1} Z_2 S_1 = AJ^{-1} S_2 \left(J^T\right)^{-1},$$

т. е. формула (29) верна при $k = 2$. Теперь решение уравнения (9) при $m = 2$ дается формулой

$$a_2 = -AJ^{-1} R_2 JA^{-1} + B_2 JA^{-1}.$$

Таким образом, справедлива формула (32) при $k = 2$.

Справедливость формул (29)–(32) для $k \leqslant n$ устанавливается методом математической индукции.

Вычислим инвариант H_{n+1}. Имеем согласно (10), (30) и (32):

$$H_{n+1} = D(a_n) + H_n = -AJ^{1-n}\left(D(R_n) - Z_n J^{-1}\right) J^{n-1} A^{-1} + \left(D(B_n) + Q_{n-1} J^{-1}\right) J^{n-1} A^{-1}.$$

Так как

$$D(R_n) - Z_n J^{-1} = -T_{n+1},$$

то

$$H_{n+1} = AJ^{1-n}T_{n+1}J^{n-1}A^{-1} + \\ + \left(D(B_n) + Q_{n-1}J^{-1}\right)J^{n-1}A^{-1}.$$

Последнюю формулу перепишем так:

$$H_{n+1} = Q_n J^{n-1}A^{-1}, \qquad (33)$$

где

$$Q_n = AJ^{1-n}T_{n+1} + D(B_n) + Q_{n-1}J^{-1}. \quad (34)$$

Таким образом, формулы (33) и (34) совпадают с (30) и (31) при $k = n+1$, ввиду того, что $Z_{n+1} = 0$.

И, наконец, вычислим обобщенный инвариант X_{n+1}. Согласно (29) и (33), имеем

$$X_{n+1} = H_{n+1}X_n = Q_n S_n \left(J^T\right)^{1-n}. \qquad (35)$$

Теперь, используя рекуррентную формулу (31) и (35), последовательно получаем

$$X_{n+1} = Q_{n-1}J^{-1}S_n\left(J^T\right)^{1-n} = \\ = Q_{n-2}J^{-3}S_n\left(J^T\right)^{1-n} = \cdots = \\ = Q_2 J^{2-n}S_n\left(J^T\right)^{1-n}. \quad (36)$$

Так как матрица Q_2 имеет лишь первый ненулевой столбец, а первая строка матрицы $J^{2-n}S_n$ нулевая, то из (36) следует, что $X_{n+1} = 0$. *Теорема доказана.*

Отметим, что $\mathrm{Rang}\, X_k = n - k + 1$, $k = 1, 2, \ldots, n+1$. Таким образом, индексы k, при которых происходит падение ранга матрицы X_k, совпадают с показателями $1, 2, \ldots, n$ системы A_n, а номер $k = n+1$, для которого $X_k = 0$, равен числу Кокстера [19].

Далее матрицы B_k можно выбрать так, что

$$Q_k = 0, \quad k = 2, 3, \ldots, n. \qquad (37)$$

Действительно, из цепочки (27) находим

$$\exp(u^k) = D(\theta_k),$$

$$\theta_k = \frac{1}{n+1}\bar{D}\left\{(n-k+1)\sum_{i=1}^{k} iu^i + \right. \\ \left. + k\sum_{i=k+1}^{n}(n-i+1)u^i\right\}.$$

Теперь введем матрицы $P_k = \left(p_{ij}^k\right)$, состоящие из одного ненулевого элемента

$$p_{k-1,k-2}^k = \theta_{k-1}, \quad k = 3, 4, \ldots, n+1.$$

Тогда

$$T_k = -D(P_k), \quad k = 3, 4, \ldots, n+1,$$

и если положить

$$B_k = AJ^{1-k}P_{k+1}, \quad k = 2, 3, \ldots, n,$$

то из формул (31) следуют равенства (37). При таком выборе матриц B_k инварианты H_k вычисляются следующим образом:

$$H_k = AJ^{1-k}Z_k J^{k-2}A^{-1}, \quad k = 2, 3, \ldots, n+1.$$

Так как $Z_{n+1} = 0$, то $H_{n+1} = 0$.

Заметим также, что инварианты K_i, обобщенные инварианты Y_i и коэффициенты b_i (см. (11), (12)) линеаризованной цепочки Тоды (28) определяются формулами (29)–(32) после замены оператора дифференцирования D на $\bar{D}$ и переменных u_y^i на u_x^i.

1.2. Симметрии и интегралы цепочки Тоды серии A_n

В этом разделе мы покажем, как строить симметрии и x- и y-интегралы системы уравнений (27). Это построение основано на формулах для интегралов и решений линеаризованной системы (28). Поэтому мы приведем эти формулы в случае общей линейной системы уравнений вида (3), которые получены в работе [20].

Предположим, что матрицы a_i и b_i можно выбрать так, что инварианты H_i и K_i системы (3) такие, что (см. (5), (7)):

$$\bar{D}(H_i) + a_iH_i - H_ia_{i-1} = 0, \\ i = 1, 2, \ldots, n, \quad H_{n+1} = 0, \quad (38)$$

$$D(K_i) + b_iK_i - K_ib_{i-1} = 0, \\ i = 1, 2, \ldots, m, \quad K_{m+1} = 0. \quad (39)$$

Тогда x- и y-интегралы уравнений (3) даются формулами

$$(D+b)\left(\bar{D}+a_n\right)\left(\bar{D}+a_{n-1}\right)\cdots\times \\ \times\left(\bar{D}+a_1\right)\left(\bar{D}+a\right)v = 0, \quad (40)$$

$$(\bar{D}+a)(D+b_m)(D+b_{m-1})\cdots\times \\ \times(D+b_1)(D+b)v=0. \quad (41)$$

Для построения решений системы (3) рассмотрим сопряженную к ней

$$\left(D\bar{D}+\tilde{a}D+\tilde{b}\bar{D}+\tilde{c}\right)V=0, \qquad (42)$$

$$\tilde{a}=-a^T, \quad \tilde{b}=-b^T, \quad \tilde{c}=c^T-D(a^T)-\bar{D}(b^T).$$

Обозначим через h_i и k_i инварианты Лапласа системы (42), которые удовлетворяют соотношениям:

$$\bar{D}(h_i)+\tilde{a}_ih_i-h_i\tilde{a}_{i-1}=0, \\ i=1,2,\ldots,m, \quad h_{m+1}=0, \quad (43)$$

$$D(k_i)+\tilde{b}_ik_i-k_i\tilde{b}_{i-1}=0, \\ i=1,2,\ldots,n, \quad k_{n+1}=0. \quad (44)$$

При этих условиях исходная линейная система (3) имеет специальные решения вида:

$$v=\left(D-\tilde{b}_1^T\right)\left(D-\tilde{b}_2^T\right)\cdots\left(D-\tilde{b}_n^T\right)f \quad (45)$$

и

$$v=(\bar{D}-\tilde{a}_1^T)(\bar{D}-\tilde{a}_2^T)\cdots(\bar{D}-\tilde{a}_m^T)\varphi, \quad (46)$$

где f и φ– решения уравнений

$$(\bar{D}+a)f=0 \quad \text{и} \quad (D+b)\varphi=0. \qquad (47)$$

Теперь приведенные выше формулы мы используем для нахождения высших симметрий и интегралов цепочки Тоды (27). Для этого выражения (30)–(32), определяющие матрицы H_k и a_k, перепишем, полагая

$$P_k=J^kA^{-1}Q_k \quad \text{и} \quad \Phi_k=-J^{k-1}A^{-1}B_k,$$

так:

$$H_k=AJ^{1-k}(Z_k+P_{k-1})J^{k-2}A^{-1}, \\ k=2,3,\ldots,n+1, \quad (48)$$

$$P_{k-1}=J\left[T_k-D(\Phi_{k-1})+P_{k-2}J^{-1}\right], \\ k=2,3,\ldots,n+1, \quad P_0=0, \quad (49)$$

$$a_k=-AJ^{1-k}(R_k+\Phi_k)J^{k-1}A^{-1}, \\ k=1,2,\ldots,n. \quad (50)$$

Напомним, что согласно определению матрицы B_k, Φ_k– матрица, у которой первые $(k-1)$ столбцов произвольные, а остальные столбцы нулевые.

Рассмотрим систему уравнений, сопряженную к линеаризованной цепочке Тоды (28):

$$D\bar{D}V=H_1^TV, \qquad H_1^T=UA. \qquad (51)$$

Так как обобщенные инварианты линеаризованной системы (3) и сопряженной к ней (17) связаны формулами (20), то, используя этот факт применительно к уравнениям (28) и (51) и учитывая результат Теоремы 3, нетрудно получить соотношения для вычисления инвариантов h_i и коэффициентов $\tilde{a}_i$ сопряженной системы (51):

$$h_k=J^{1-k}(Z_k+p_{k-1})J^{k-2}, \\ k=2,3,\ldots,n+1, \quad h_1=K_1^T, \quad (52)$$

$$p_{k-1}=J\left[T_k-D(\varphi_{k-1})+p_{k-2}J^{-1}\right], \\ k=2,3,\ldots,n+1, \quad p_0=0, \quad (53)$$

$$\tilde{a}_k=-J^{1-k}(R_k+\varphi_k)J^{k-1}, \\ k=1,2,\ldots,n. \quad (54)$$

Здесь φ_k– произвольная матрица, имеющая ту же структуру, что и матрица Φ_k.

Выберем Φ_k и φ_k, $k=2,3,\ldots$, такими, чтобы для инвариантов H_k и h_k выполнялись равенства (38) и (43). Отметим, что $n=m$ и при $k=1,2$ (38) и (43) выполнены, так как в рассматриваемом случае H_1 и K_1– невырожденные матрицы. Далее соотношения (38) и (43) в силу формул (48)–(50) и (52)–(54) эквивалентны уравнениям:

$$P_{k-1}=J\left[T_k-D(\Phi_{k-1})+P_{k-2}J^{-1}\right], \\ k=3,4,\ldots,n+1, \quad P_1=0, \quad P_n=0, \\ \bar{D}(P_{k-1})-(R_k+\Phi_k)P_{k-1}+ \\ +(Z_k+P_{k-1})\Phi_{k-1}=0, \quad k=3,4,\ldots,n \quad (55)$$

и

$$p_{k-1}=J\left[T_k-D(\varphi_{k-1})+p_{k-2}J^{-1}\right], \\ k=3,4,\ldots,n+1, \quad p_1=0, \quad p_n=0, \\ \bar{D}(p_{k-1})-(R_k+\varphi_k)p_{k-1}+ \\ (Z_k++p_{k-1})\varphi_{k-1}=0, \quad k=3,4,\ldots,n \quad (56)$$

соответственно.

Рассмотрим специальные решения системы (55) и (56) ($P_k = p_k,\ \Phi_k = \varphi_k$) вида

$$P_k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & \dots & . & . & \dots & . \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p^k_{k+1,1} & \dots & p^k_{k+1,k-1} & 0 & \dots & 0 \\ . & \dots & . & . & \dots & . \\ p^k_{n,1} & \dots & p^k_{n,k-1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & \dots & . & . & \dots & . \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \varphi^k_{k,1} & \dots & \varphi^k_{k,k-1} & 0 & \dots & 0 \\ . & \dots & . & . & \dots & . \\ \varphi^k_{n,1} & \dots & \varphi^k_{n,k-1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае уравнения (55) и (56) приводятся к следующим:

$$\begin{gathered} P_{k-1} = J\left[T_k - D(\Phi_{k-1}) + P_{k-2}J^{-1}\right], \\ k = 3, 4, \dots, n+1, \\ \bar{D}(P_{k-1}) - R_k P_{k-1} + Z_k \Phi_{k-1} = 0, \\ k = 3, 4, \dots, n, P_1 = 0, \quad P_n = 0. \end{gathered} \tag{57}$$

Система (57) совместна, последнее легко заметить после ее записи в скалярной форме.

Пусть P_k и Φ_k – решение системы (57). Тогда построенные по формулам (50) и (54) матрицы a_k и $\tilde{a}_k$ позволяют вычислить симметрии и интегралы цепочки Тоды (27). Действительно, согласно (46), (47) функция

$$v = \left(\bar{D} - \tilde{a}_1^T\right)\left(\bar{D} - \tilde{a}_2^T\right)\cdots \times \\ \times \left(\bar{D} - \tilde{a}_{n-1}^T\right)\left(\bar{D} - \tilde{a}_n^T\right)\bar{W}, \tag{58}$$

где $\bar{W}$ – произвольный y-интеграл цепочки Тоды $\left(D(\bar{W}) = 0\right)$ – есть решение линеаризованной системы (28). Последнее является высшей симметрией уравнения (27). Далее, в случае линеаризованной системы (28), заменяя в (40) функцию v на симметрию (58), будем иметь

$$D\left(\bar{D} + a_n\right)\left(\bar{D} + a_{n-1}\right)\cdots \times \\ \times \left(\bar{D} + a_1\right)\bar{D}\left(\bar{D} - \tilde{a}_1^T\right)\cdots \times \\ \times \left(\bar{D} - \tilde{a}_{n-1}^T\right)\left(\bar{D} - \tilde{a}_n^T\right)\left(\bar{W}\right) = 0.$$

Перепишем последнее соотношение следующим образом:

$$D\left[\bar{D}^{2n+1} + A_{2n}\bar{D}^{2n} + A_{2n-1}\bar{D}^{2n-1} + \\ + \dots + A_0\right]\left(\bar{W}\right) = 0,$$

откуда получаем, что

$$D(A_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, 2n.$$

Можно показать, что $A_{2n} = 0$, а $A_{2n-1}, \dots, A_n$ являются y-интегралами порядка $2, 3, \dots, n+$ $+\,1$ соответственно и эти матричные интегралы задают полный набор n скалярных y-интегралов, т. е. любой другой y-интеграл есть функция от этих интегралов и их производных.

Второе семейство высших симметрий и набор x-интегралов получаются из предыдущих заменой динамических переменных $u_y, u_{yy}, u_{yyy}, \dots$ на $u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots$. С другой стороны, аналогично, как и выше, их можно описать с использованием формул (41), (45) и (47) и инвариантов K_i и k_i уравнений (28) и (51).

2. ЦЕПОЧКА ТОДЫ СЕРИИ C_n

Система уравнений (25) с матрицей Картана C_n имеет вид

$$\begin{aligned} u^i_{xy} &= -\exp(u^{i-1}) + 2\exp(u^i) - \exp(u^{i+1}), \\ &\quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ u^n_{xy} &= -2\exp(u^{n-1}) + 2\exp(u^n), \\ u^0 &= -\infty. \end{aligned}$$

Для дальнейшего удобно последнюю переименованием неизвестных

$$u^i \longrightarrow u^{n-i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

привести к системе уравнений, которая в матричной форме записывается так:

$$D\bar{D}u = CUc. \tag{59}$$

Здесь

$$C = LC_nL,$$

$L = (l_{ij})$ – матрица, у которой $l_{i,n-i+1} =$ $= 1,\ i = 1, 2, \dots, n$, а остальные элементы нулевые, а c и U определены выше (см. разд. 1).

В этом разделе мы приведем формулы для инвариантов, обобщенных инвариантов и матриц $a_k,\ k = 1, 2, \dots$ линеаризованной системы

$$D\bar{D}v = CUv. \tag{60}$$

Для этого введем следующие матрицы: J_k – верхняя треугольная матрица порядка k, все элементы которой на главной диагонали и выше ее равны единице; E_k — единичная матрица порядка k; M_k и N_k — блочные матрицы порядка n :

$$M_k = \begin{pmatrix} J_k & 0 \\ 0 & E_{n-k} \end{pmatrix}, \quad N_k = \begin{pmatrix} E_{n-k} & 0 \\ 0 & J_k \end{pmatrix};$$

элементы диагональных матриц вида

$$S_m = \operatorname{diag}\left\{0, 0, \ldots, 0, \exp\left(\theta^m_{[\frac{m}{2}]+1} + \varepsilon_m\right), \exp\left(\theta^m_{[\frac{m}{2}]+2}\right), \ldots, \exp\left(\theta^m_n\right)\right\}$$

вычисляются следующим образом:

$$\theta^m_j = \sum_{i=1}^{j} u^i + \sum_{i=2}^{m+1-j} u^i,$$
$$\text{при } j = \left[\frac{m}{2}\right]+1, \left[\frac{m}{2}\right]+2, \ldots, m-1, \quad m = 3, 4, \ldots, n$$
$$\text{и при } j = \left[\frac{m}{2}\right]+1, \left[\frac{m}{2}\right]+2, \ldots, n, \quad m = n+1, n+2, \ldots, 2n-1,$$
$$\theta^m_j = \sum_{i=j-m+1}^{j} u^i,$$
$$\text{при } j = m, m+1, \ldots, n, \quad m = 2, 3, \ldots, n,$$

где $\varepsilon_m = 0$, если $m = 2k$ и $\varepsilon_m = \ln 2$ при $m = 2k+1$, $S_1 = U$ и $S_{2n} = 0$;

$$R_m = \operatorname{diag}\left\{0, 0, \ldots, 0, \bar{D}\left(\theta^m_{[\frac{m}{2}]+1}\right), \bar{D}\left(\theta^m_{[\frac{m}{2}]+2}\right), \ldots, \bar{D}\left(\theta^m_n\right)\right\},$$
$$m = 2, 3, \ldots, 2n-1,$$
$$R_1 = \operatorname{diag}\left\{u^1_y, u^2_y, \ldots, u^n_y\right\}, \quad R_{2n} = 0;$$

ненулевые элементы матриц порядка n $Z_m = \left(z^m_{ij}\right)$, $m = 2, 3, \ldots, 2n-1$ определяются так:

$$z^m_{ii-1} = -\exp(u^i),$$
$$i = \left[\frac{m}{2}\right]+1, \left[\frac{m}{2}\right]+2, \ldots, n, \quad m = 2, 3, \ldots, 2n-1,$$
$$z^m_{ii} = \exp(u^{m-i+1}),$$
$$i = \left[\frac{m}{2}\right]+2, \left[\frac{m}{2}\right]+3, \ldots, m, \quad m = 2, 3, \ldots, n-1 \text{ и}$$
$$i = \left[\frac{m}{2}\right]+2, \left[\frac{m}{2}\right]+3, \ldots, n, \quad m = n, n+1, \ldots, 2n-1,$$
$$z^m_{ii} = \exp(u^{i-m+1}),$$
$$i = m+1, m+2, \ldots, n, \quad m = 2, 3, \ldots, n-1,$$

при этом для $m = 2k, 2k+1$ $z^{2k}_{k+1,k+1} = \exp(u^k)$, $z^{2k+1}_{k+1,k+1} = 2\exp(u^{k+1})$, $Z_{2n} = 0$; первые $\left[\frac{m}{2}\right]$ столбцов матриц B_m, $m = 2, 3, \ldots, 2n-1$ состоят из произвольных элементов, а остальные столбцы нулевые; и, наконец, матрица L_k, $k = 2, 3, \ldots, n$, содержит лишь один ненулевой элемент $l^k_{kk-1} = -\exp(u^k)$, $k = 2, 3, \ldots, n$, $L_1 = 0$.

Результат этого раздела формулируется следующим образом:

Теорема 4. *Система уравнений (59) является системой лиувиллевского типа. Обобщенные инварианты X_k, инварианты H_k и матрицы a_k линеаризованной системы (60), определяемые формулами (4), (9) и (10), вычисляются следующим образом:*

$$\begin{aligned}
&X_k = P_k S_k P_k^T Q,\\
&H_k = P_k Z_k P_{k-1}^{-1} + \Phi_k, \quad k = 2, 3, \ldots, 2n-1,\\
&X_{2n} = 0,\\
&X_1 = H_1 = CS_1,\\
&H_{2n} = P_{2n-1} L_n P_{2n-1}^{-1} + D(B_{2n-1}) P_{2n-1}^{-1} + \Phi_{2n-1},\\
&a_k = -P_k R_k P_k^{-1} + B_k, \quad k = 1, 2, \ldots, 2n-1,
\end{aligned} \tag{61}$$

где матрицы n-го порядка P_k и Φ_k вычисляются по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned}
&P_{2k+1} = P_{2k} N_{n-k}^{-1},\\
&P_{2k} = P_{2k-1} N_{n-k+1}^{-1} M_{k+1}^{-1},\\
&\quad k = 1, 2, \ldots, n-1,\\
&P_1 = C, \quad Q = \left(J_n^{-1} M_2 J_n C^{-1}\right)^T,\\
&\Phi_{2k} = P_{2k} M_{k+1} L_k P_{2k-1}^{-1} + {}\\
&\qquad + D(B_{2k-1}) P_{2k-1}^{-1} + \Phi_{2k-1},\\
&\Phi_{2k+1} = D(B_{2k}) P_{2k}^{-1} + \Phi_{2k},\\
&\quad k = 1, 2, \ldots, n-1,\\
&\Phi_1 = 0, \quad B_1 = 0, \quad L_1 = 0.
\end{aligned} \tag{62}$$

Справедливость формул (61) и (62) обосновывается принципом математической индукции.

Так как $\operatorname{Rang} S_{2k} = \operatorname{Rang} S_{2k+1} = n-k$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, то из (61) получаем, что

$$\operatorname{Rang} X_{2k} = \operatorname{Rang} X_{2k+1} = n-k, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Таким образом, индексы k, при которых происходит падение ранга обобщенного инварианта X_k, совпадают с показателями $1, 3, 5, \ldots, 2n-1$ системы C_n, а номер $k = 2n$, для которого $X_k = 0$, равен числу Кокстера [19].

3. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ С МАТРИЦЕЙ КАРТАНА B_n

Как и в предыдущем разделе, систему уравнений (25) с матрицей B_n

$$
\begin{aligned}
u^1_{xy} &= 2\exp(u^1) - \exp(u^2),\\
u^i_{xy} &= -\exp(u^{i-1}) + 2\exp(u^i) - \exp(u^{i+1}),\\
&\quad i = 2,3,\dots,n-2,\\
u^{n-1}_{xy} &= -\exp(u^{n-2}) + 2\exp(u^{n-1}) - 2\exp(u^n),\\
u^n_{xy} &= -\exp(u^{n-1}) + 2\exp(u^n)
\end{aligned}
$$

переименованием неизвестных функций $u^i \longrightarrow u^{n-i+1}$, $i = 1,2,\dots,n$, удобно записать в матричной форме

$$D\bar{D}u = BUc, \quad B = LB_nL, \tag{63}$$

линеаризация которой имеет вид

$$D\bar{D}v = BUv. \tag{64}$$

Для определения инвариантов Лапласа уравнений (64) введем матрицы порядка n. Диагональные матрицы S_m, $m = 1,2,\dots,2n$ задаются так:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= U,\\
S_m &= \operatorname{diag}\Big\{0,0,\dots,0,\exp\left(\theta^m_{[\frac{m}{2}]+1}\right),\\
&\qquad \exp\left(\theta^m_{[\frac{m}{2}]+2}\right),\dots,\exp\left(\theta^m_n\right)\Big\},
\end{aligned}
$$

$m = 2,3,\dots,2n-1$, $S_{2n} = 0$, где элементы θ^m_j вычисляются по формулам

$$
\begin{aligned}
\theta^m_j &= 2\sum_{i=1}^{m-j} u^i + \sum_{i=m-j+1}^{j} u^i + \ln 4\\
&\text{при } j = \left[\frac{m}{2}\right]+1, \left[\frac{m}{2}\right]+2,\dots,m-1,\\
&\quad m = 3,4,\dots,n\\
&\text{и при } j = \left[\frac{m}{2}\right]+1, \left[\frac{m}{2}\right]+2,\dots,n,\\
&\quad m = n+1,n+2,\dots,2n-1,\\
\theta^m_m &= \sum_{i=1}^{m} u^i + \ln 2, \quad m = 2,3,\dots,n,\\
\theta^m_j &= \sum_{i=j-m+1}^{j} u^i, \quad j = m+1,m+2,\dots,n,\\
&\quad m = 2,3,\dots,n,\\
R_m &= \operatorname{diag}\Big\{0,0,\dots,0,\bar{D}\left(\theta^m_{[\frac{m}{2}]+1}\right),\\
&\qquad \bar{D}\left(\theta^m_{[\frac{m}{2}]+2}\right),\dots,\bar{D}\left(\theta^m_n\right)\Big\},\\
&\quad m = 2,3,\dots,2n-1,\\
R_1 &= \operatorname{diag}\left\{u^1_y, u^2_y,\dots,u^n_y\right\}, \quad R_{2n} = 0;
\end{aligned}
$$

ненулевые элементы матриц $Z_m = \left(z^m_{ij}\right)$, $m = 2,3,\dots,2n-1$ определяются по формулам:

$$
\begin{aligned}
z^m_{ii} &= \exp(u^{m-i}),\\
i &= \left[\frac{m}{2}\right]+1, \left[\frac{m}{2}\right]+2,\dots,l,\\
m &= 5,6,\dots,2n-1,
\end{aligned}
$$

где $l = n$, если $m \geqslant n+2$ и $l = m-2$ в случае $m < n+2$,

$$
\begin{aligned}
z^m_{m-1,m-1} &= 2\exp(u^1), \quad m = 3,4,\dots,n+1,\\
z^m_{mm} &= 2\exp(u^1), \quad m = 2,3,\dots,n,\\
z^m_{ii} &= \exp(u^{i-m+1}),\\
&\quad i = m+1,m+2,\dots,n,\\
&\quad m = 2,3,\dots,n-1,\\
z^m_{i+1,i} &= -\exp(u^{i+1}),\\
&\quad i = \left[\frac{m}{2}\right]+r_m, \left[\frac{m}{2}\right]+r_m+1,\dots,n-1,\\
&\quad m = 2,3,\dots,2n-2,
\end{aligned}
$$

где $r_m = 0$, если m — четное и $r_m = 1$, если m — нечетное, $Z_{2n} = 0$; матрица $\widetilde{J}_n$ отличается от J_n лишь элементом, стоящим на пересечении первой строки и первого столбца, который равен 2; $P_{2k} = E_n$, $P_{2k+1} = M^{-1}_{k+1}$, $k = 1,2,\dots,n-1$, $D_{2k} = 0$, $k = 1,2,\dots,n$, $D_{2k-1} = L_k$, $k = 2,3,\dots,n$.

Справедливо утверждение:

Теорема 5. *Система уравнений (63) является системой лиувиллевского типа. Обобщенные инварианты X_m и инварианты H_m системы уравнений (64) определяются следующим образом:*

$$
\begin{aligned}
X_m &= B\widetilde{J}_n^{-1}A_mS_mA_m^T\left(J_n^{-1}\right)^T,\\
&\quad m = 2,3,\dots,2n-1, \quad X_{2n} = 0,\\
H_m &= \left[B\widetilde{J}_n^{-1}A_mZ_mA_{m-1}^{-1} + Q_{m-1}A_{m-1}^{-1}\right]\widetilde{J}_nB^{-1},\\
&\quad m = 1,2,\dots,2n,
\end{aligned} \tag{65}
$$

где матрицы A_m и Q_{m-1} вычисляются с помощью рекуррентных соотношений

$$
\begin{aligned}
A_m &= A_{m-1}J_n^{-1}P_m^{-1}, \quad m = 3,4,\dots 2n-1,\\
A_0 &= \widetilde{J}_nB^{-1}\left(J_n^{-1}\right)^T, \quad A_1 = J_n, \quad A_2 = E_n,\\
Q_{m-1} &= B\widetilde{J}_n^{-1}A_mD_m + D(B_{m-1}) +\\
&\quad + Q_{m-2}A_{m-2}^{-1}A_{m-1}, \quad m = 2,3,\dots,2n,\\
Q_0 &= 0.
\end{aligned}
$$

При этом элементы a_m даются формулами

$$
\begin{aligned}
a_m &= \left[-B\widetilde{J}_n^{-1}A_mR_m + B_m\right]A_m^{-1}\widetilde{J}_nB^{-1},\\
&\quad m = 1,2,\dots,2n-1.
\end{aligned}
$$

Доказательство теоремы нетрудно провести с использованием метода математической индукции. Ввиду того, что

$$\mathrm{Rang}\, S_{2k} = \mathrm{Rang}\, S_{2k+1} = n-k,$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1,$$

то из (65) получаем равенства

$$\mathrm{Rang}\, X_{2k} = \mathrm{Rang}\, X_{2k+1} = n-k,$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Следовательно, индексы k, при которых происходит падение ранга обобщенных инвариантов X_k, совпадают с показателями $1, 3, 5, \dots, 2n-1$ системы B_n, а номер $k = 2n$, для которого $X_k = 0$, равен числу Кокстера.

4. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ С МАТРИЦЕЙ КАРТАНА $\mathcal{D}_n$

Система уравнений (25) с матрицей $\mathcal{D}_n$ имеет вид

$$\begin{aligned}
u^1_{xy} &= 2\exp(u^1) - \exp(u^2),\\
u^k_{xy} &= -\exp(u^{k-1}) + 2\exp(u^k) - \exp(u^{k+1}),\\
&\qquad i = 2, 3, \dots, n-3,\\
u^{n-2}_{xy} &= -\exp(u^{n-3}) + 2\exp(u^{n-2}) -\\
&\qquad - \exp(u^{n-1}) - \exp(u^n),\\
u^{n-1}_{xy} &= -\exp(u^{n-2}) + 2\exp(u^{n-1}),\\
u^n_{xy} &= -\exp(u^{n-2}) + 2\exp(u^n), \quad n \geqslant 3.
\end{aligned}$$

Для дальнейшего последнюю удобно переименованием неизвестных

$$u^k \longrightarrow u^{n-k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

записать в матричной форме

$$D\bar{D}u = \mathcal{D}Uc, \quad \mathcal{D} = L\mathcal{D}_n L. \tag{66}$$

Напомним, что $L = (l_{ij})$ — матрица, у которой элементы $l_{i,n-i+1} = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, а остальные нулевые, $U = \mathrm{diag}\,(\exp(u^1), \exp(u^2), \dots, \exp(u^n))$, $c = (1, 1, 1, \dots, 1)^T$. Линеаризация уравнений (66) записывается следующим образом:

$$D\bar{D}v = \mathcal{D}Uv. \tag{67}$$

Введем матрицы порядка n. Через S_m, $m = 1, 2, \dots, 2n-3$ обозначим диагональные матрицы

$$S_m = \mathrm{diag}\left\{0, 0, \dots, 0, \exp\left(\theta^m_{[\frac{m}{2}]+1}\right), \exp\left(\theta^m_{[\frac{m}{2}]+2}\right), \dots, \exp\left(\theta^m_n\right)\right\},$$

элементы которых вычисляются так:

$$\theta^m_m = u^1 + \sum_{k=3}^{m+1} u^k, \quad \theta^m_i = \sum_{k=i-m+1}^{i} u^k,$$

$$i = m+1, m+2, \dots, n, \quad m = 2, 3, \dots, n-1,$$

$$\theta^m_i = u^1 + u^2 + A^m_i + \sum_{k=m-i+2}^{i+1} u^k + \ln 4,$$

$$i = \left[\frac{m}{2}\right]+1, \left[\frac{m}{2}\right]+2, \dots, m-1,$$

$$m = 3, 4, \dots, n-1 \text{ и}$$

$$i = \left[\frac{m}{2}\right]+1, \left[\frac{m}{2}\right]+2, \dots, n-1,$$

$$m = n, n+1, \dots, 2n-3,$$

$$\theta^m_n = 0, \quad m = n, n+1, \dots, 2n-3,$$

где $A^m_i = 0$, если $m - i < 3$ и $A^m_i = 2\sum\limits_{k=3}^{m+1-i} u^k$ при $m - i \geqslant 2$; $S_1 = U$, $S_{2n-2} = 0$,

$$R_m = \mathrm{diag}\left\{0, 0, \dots, 0, \bar{D}\left(\theta^m_{[\frac{m}{2}]+1}\right), \bar{D}\left(\theta^m_{[\frac{m}{2}]+2}\right), \dots, \bar{D}\left(\theta^m_n\right)\right\},$$

$$m = 2, 3, \dots, 2n-3,$$

$R_1 = \mathrm{diag}\left\{u^1_y, u^2_y, \dots, u^n_y\right\}$, $R_{2n-2} = 0$; ненулевые элементы матриц $Z_m = \left(z^m_{ij}\right)$, $m = 1, 2, \dots, 2n-3$ определяются следующим образом:

$$z^m_{ii} = \exp(u^{m-i+1}),$$

$$i = \left[\frac{m}{2}\right]+1, \left[\frac{m}{2}\right]+2, \dots, m-2,$$

$$m = 5, 6, \dots, n \text{ и}$$

$$i = \left[\frac{m}{2}\right]+1, \left[\frac{m}{2}\right]+2, \dots, n-1,$$

$$m = n+1, n+2, \dots, 2n-3,$$

$$z^m_{ii} = \exp(u^{i-m+1}), \quad i = m+1, m+2, \dots, n,$$

$$m = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$z^m_{m-1,m-1} = 2\exp(u^2), \quad m = 3, 4, \dots, n,$$

$$z^m_{i+1,i} = -\exp(u^{i+2}),$$

$$i = \left[\frac{m}{2}\right]+r_m, \left[\frac{m}{2}\right]+r_m+1, \dots, m-1,$$

$$m = 2, 3, \dots, n-1 \qquad \text{и}$$

$$i = \left[\frac{m}{2}\right]+r_m, \left[\frac{m}{2}\right]+r_m+1, \dots, n-2,$$

$$m = n, n+1, \dots, 2n-4,$$

где $r_m = 0$, если m– четное и $r_m = 1$, при нечетном m,

$$
\begin{aligned}
z^m_{i+1,i} &= -\exp(u^{i+1}),\\
&\quad i = m, m+1, \dots, n-1,\\
&\quad m = 1, 2, \dots, n-1,\\
z^m_{m-1,m} &= 2\exp(u^1), \quad m = 3, 4, \dots, n,\\
z^m_{m,m+1} &= \exp(u^1), \quad m = 1, 2, \dots, n-1,
\end{aligned}
$$

Z_{2n-2} — нулевая матрица; положим

$$
Q^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad Q^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

и через Φ_k обозначим матрицы n-го порядка

$$
\Phi_k = \begin{pmatrix} E_{k-2} & 0 & 0 \\ 0 & Q^3 & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-k-1} \end{pmatrix},
$$

$$k = 2, 3, \dots, n-1,$$

$$
\Phi_n = \begin{pmatrix} E_{n-2} & 0 \\ 0 & Q^2 \end{pmatrix},
$$

$$\Phi_k = E_n, \quad k = n+1, n+2, \dots, 2n-2;$$

$$G_{2k} = J_n, \quad k = 1, 2, \dots, n-2,$$

$$
G_{2k+1} = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & J_{n-k} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n-3,
$$

$$G_{2n-3} = G_{2n-2} = E_n;$$

первые $\left[\frac{m}{2}\right]$ столбцов матриц B_m, $m = 2, 3, \dots, n-1$ состоят из произвольных элементов, а остальные столбцы нулевые, а при $m = n, n+1, \dots, 2n-3$ у матрицы B_m, помимо первых $\left[\frac{m}{2}\right]$ столбцов, произвольным является и последний; ненулевые элементы матриц $D_m = \left(d^m_{ij}\right)$ и $F_m = \left(f^m_{ij}\right)$, $m = 1, 2, \dots, 2n-2$ определяются следующим образом:

$$d^{2k+1}_{k+1,k} = -\exp(u^{k+2}), \quad k = 1, 2, \dots, n-2,$$

$$f^{n+1}_{n-1,n} = 2\exp(u^1) - 2\exp(u^2),$$

$$f^m_{n-1,n} = -\exp(u^{m-n+2})$$

$$m = n+2, n+3, \dots, 2n-3.$$

Теперь мы можем сформулировать результат этого раздела:

Теорема 6. *Система уравнений (66) является системой лиувиллевского типа. Обобщенные инварианты X_m и инварианты H_m системы уравнений (67) определяются следующим образом:*

$$
\begin{aligned}
X_m &= \mathcal{D} A_m S_m A^T_m,\\
&\quad m = 1, 2, \dots, 2n-3, \ X_{2n-2} = 0,\\
H_m &= \left[\mathcal{D} A_m Z_m + \Psi_{m-1}\right] A^{-1}_{m-1} \mathcal{D}^{-1},\\
&\quad m = 1, 2, \dots, 2n-2,
\end{aligned}
\tag{68}
$$

где матрицы A_m и Ψ_{m-1} задаются рекуррентными соотношениями

$$
\begin{aligned}
A_m &= A_{m-1} G^{-1}_m \Phi^{-1}_m, \quad A_1 = E_n,\\
A_0 &= \mathcal{D}^{-1} M_2 \left(J^T_n\right)^{-1},\\
\Psi_{m-1} &= \mathcal{D} A_{m-1} D_m + D(B_{m-1}) +\\
&\quad + \mathcal{D} A_{m-1} F_m + \Psi_{m-2} A^{-1}_{m-2} A_{m-1},\\
\Psi_0 &= 0, \quad m = 2, 3, \dots, 2n-2.
\end{aligned}
\tag{69}
$$

При этом коэффициенты a_m даются формулами

$$
\begin{aligned}
a_m &= \left[-\mathcal{D} A_m R_m + B_m\right] A^{-1}_m \mathcal{D}^{-1},\\
&\quad m = 1, 2, \dots, 2n-3.
\end{aligned}
\tag{70}
$$

Справедливость формул (68)–(70) проверяется с использованием математической индукции.

Согласно формулам (68)

$$\operatorname{Rang} X_m = \operatorname{Rang} S_m, \quad m = 1, 2, \dots, 2n-3,$$

поэтому (см. определение матриц S_m) при четном $n = 2r$ имеем

$$\operatorname{Rang} X_{2k} = \operatorname{Rang} X_{2k+1} = n - k,$$

$$k = 1, 2, \dots, r-1 \quad \text{и}$$

$$\operatorname{Rang} X_{2k} = \operatorname{Rang} X_{2k+1} = n - (k+1),$$

$$k = r, r+1, \dots, n-2,$$

а при $n = 2r + 1$

$$\operatorname{Rang} X_{2k} = \operatorname{Rang} X_{2k+1} = n - k,$$

$$k = 1, 2, \dots, r-1,$$

$$\operatorname{Rang} X_{2r} = n - r, \quad \operatorname{Rang} X_{2r+1} = n - r - 1 \quad \text{и}$$

$$\operatorname{Rang} X_{2k} = \operatorname{Rang} X_{2k+1} = n - (k+1),$$

$$k = r+1, r+2, \dots, n-2.$$

Следовательно, индексы m, при которых происходит падение ранга обобщенных инвариантов X_m, совпадают с показателями $1, 3, 5, \dots, 2n-3, n-1$ (последний показатель появляется дважды при четном n и один раз при нечетном n) системы $\mathcal{D}_n$, а номер $m = 2n - 2$, для которого $X_m = 0$, равен числу Кокстера.

Отметим, что построенные инварианты для конечных цепочек Тоды могут быть использованы не только для описания x- и y-интегралов и высших симметрий, но и как и в скалярном случае [9] для нахождения общих решений.

Заметим также, что, по-видимому, показатели простой алгебры Ли с точностью до слагаемого, равного единице, есть порядки минимальных x- и y- интегралов соответствующей ей цепочки Тоды.

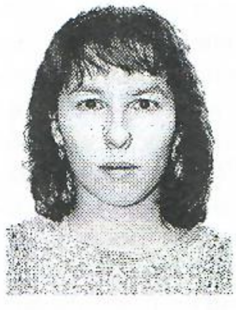
В заключение авторы выражают благодарность В. В. Соколову за полезные обсуждения результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Darboux G.** Lecons sur la theorie generale des surfaces et les applications geometriques du calcul infinitesimal. Paris: Gauthier–Villars, 1915. V. 2.
2. **Vessiot E.** Sur les equations aux derivees partialles du second order, $F(x, y, p, q, r, s, t) = 0$, inteqrables par la methode de Darboux // J. Math. Pure Appl. 18; 21 (1930; 1942), 1–61; 1–68.
3. **Звягин М. Ю.** Уравнения второго порядка, приводимые преобразованием Беклунда к $z_{xy} = 0$ // ДАН СССР. 1991. 316 (1). С. 36–40.
4. **Лезнов А. Н., Смирнов В. Г., Шабат А. Б.** Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем // ТМФ. 1982. 51 (1). С. 10–22.
5. **Жибер А. В., Соколов В. В., Старцев С. Я.** О нелинейных гиперболических уравнениях, интегрируемых по Дарбу // Докл. РАН. 1995. 343 (6). С. 746–748.
6. **Anderson J. M., Kamran N.** The variational bicomplex for second order scalar partial differential equations in the plane // Duke Math. J. 1997. V. 87 (2). P. 265–319.
7. **Sokolov V. V., Zhiber A. V.** On the Darboux integrable hyperbolic equations // Phys. Lett. A. 1995. V. 208. P. 303–308.
8. **Goursat E.** Lecons sur integration des equation aux derivees partielles du second order a deux variable independantes. Tome I, Tome II. Hermann, Paris, 1896, 1888.
9. **Жибер А. В., Соколов В. В.** Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа // УМН. 2001. Т. 56 (1). С. 63–106.
10. **Anderson J. M., Juras M.** Generalized Laplace invariants and the method of Darboux // Duke Math. J. 1997. V.,89 (2). P. 351–375.
11. **Царев С. П.** Факторизация линейных дифференциальных операторов с частными производными и метод Дарбу интегрирования нелинейных уравнений с частными производными // ТМФ. 2000. Т. 122 (1). С. 144–160.
12. **Старцев С. Я.** О гиперболических уравнениях, допускающих дифференциальные подстановки // ТМФ. 2001. Т. 127 (1). С. 63–74.
13. **Ферапонтов Е. В.** Преобразования Лапласа систем гидродинамического типа в инвариантах Римана // ТМФ. 1997. Т. 110 (1). С. 86–98.
14. **Адлер В. Э., Старцев С. Я.** О дискретных аналогах уравнения Лиувилля // ТМФ. 1999. Т. 121 (2). С. 271–284.
15. **Гиззаткулова А. М., Жибер А. В.** Системы уравнений Эйлера–Пуассона с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа // Математические модели и методы их исследования: Тр. междунар. конф. Красноярск, 2001. Т. 1. С. 169–175.
16. **Лезнов А. Н., Савельев М. В.** Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М.: Наука, 1985. 279 с.
17. **Шабат А. Б., Ямилов Р. И.** Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана: Препринт. Уфа: БФАН СССР, 1981. 23 с.
18. **Shabat A. B.** Higher symmetries of two-dimensional lattices // Phys. Lett. A. 1995. 200. P. 121–133.
19. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1972. 334 с.
20. **Жибер А. В., Старцев С. Я.** Об условиях существования преобразования Лапласа для линейной гиперболической системы уравнений // Симметрия и дифференциальные уравнения: Тр. III междунар. конф. Красноярск, 2002. С. 96–101.

ОБ АВТОРАХ

Жибер Анатолий Васильевич, проф., вед. науч. сотр. ИМ УНЦ РАН. Дипл. математик (Новосиб. гос. ун-т, 1969). Д-р физ.-мат. наук по диф. уравнениям (защ. в ИМиМ УрОРАН, Екб., 1994). Исследования в области современного группового анализа дифференциальных уравнений.



Гурьева Адель Минивасимовна, асп. кафедры математики УГАТУ. Дипл. магистр в области прикладной математики и информатики (УГАТУ, 2002). Готовит диссертацию о преобразованиях Лапласа линейных гиперболических уравнений под рук. проф. А. В. Жибера.