Уфа: УГАТУ, 2003

Вестник УГАТУ

Т. 4, № 2. С. 46–54

НАУЧНЫЕ СТАТЬИ И ДОКЛАДЫ • МАТЕМАТИКА

УДК 517.958:532.5

Г. Т. БУЛГАКОВА

ЗАДАЧА ТИПА ГУРСА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НЕРАВНОВЕСНОЙ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Исследуется краевая задача типа Гурса для уравнений неравновесной двухфазной фильтрации. Доказывается согласованность начальных и граничных условий в смысле существования непрерывного решения. В частном случае для линейной функции Баклея–Леверетта получено точное решение, непрерывно зависящее от граничных условий. *Двухфазная фильтрация; неравновесная фазовая проницаемость; корректность, существование и единственность решения краевой задачи*

ВВЕДЕНИЕ

Фундамент современных расчетов двухфазных фильтрационных течений – феноменологическая теория Маскета–Леверетта – исходит из уравнений сохранения масс фаз и обобщенного закона Дарси для потоков фаз и замыкается эмпирическими функциями фазовых проницаемостей и капиллярного давления. Именно видом функций фазовых проницаемостей определяется конкретная картина двухфазного течения (в частности, процесса вытеснения нефти водой).

Результаты лабораторных исследований вытеснения нефти водой [1] и численного моделирования процесса двухфазной фильтрации на капиллярных моделях [2] показали, что кривые фазовых проницаемостей двухфазной системы непостоянны во времени, что свидетельствует о неравновесном характере несмешивающегося вытеснения и является важным аргументом в пользу методики нестационарных исследований кернов. Фильтрационные модели, описывающие неравновесные течения, могут быть идентифицированы только по данным нестационарных исследований.

В этом случае эмпирические зависимости относительных фазовых проницаемостей (ОФП) оцениваются косвенным образом, путем решения соответствующей обратной задачи, состоящей в определении ОФП вытесняющей жидкости $f_1(s)$ и вытесняемой фазы $f_2(s)$ по замерам перепада давления на образце пористой среды $\Delta p^0(t)$ и объёма вытесненной жидкости $Q_2^0(t)$, полученных в ходе лабораторного эксперимента. Во избежание неустойчивости при нахождении функциональных зависимостей используется метод параметризации искомых функций с помощью эталонных кривых [3]. При этом оптимальное число искомых параметров определяется методами теории нечетких множеств.

Решение обратной задачи сводится к минимизации невязки

$$J=\sum_i [\alpha(\Delta p^0(t_i)-\Delta p(t_i))^2+(Q_2^0(t_i)-Q_2(t_i))^2],$$

где $\alpha = Q_2^*/\Delta p^*$ – коэффициент, учитывающий различие в масштабах изменения и размерностях величин Q_2 и Δp, Q_2^* и Δp^* – их характерные значения. Функции $\Delta p(t)$ и $Q_2(t)$ определяются из решения прямой задачи, которая формулируется следующим образом.

По современным представлениям неравновесность фазовых проницаемостей связана с процессами переноса между порами. Предложения по совершенствованию моделей фильтрации с учетом неравновесных эффектов имеются, например, в работах [4–7] и др. В большинстве из них использовались общепринятые в теории фильтрации феноменологические уравнения баланса массы, импульса и энергии для элементарного объёма, характерный размер которого предполагается достаточно большим по сравнению с размером поровых каналов, но существенно меньшим характерного размера пласта. Неравновесность учитывалась либо введением в уравнения дополнительных членов, либо корректировкой равновесных соотношений, учитывающей взаимодействие фаз при тех или иных предположениях о его механизме.

Введение дополнительных слагаемых, учитывающих неравновесность, повышает порядок уравнения для определения насыщенности. Оно принимает вид типичного уравнения второго порядка гиперболического вида, линейного по старшим производным, характеристиками которого являются координатные линии. Постановки краевых задач неравновесной двухфазной фильтрации в [4–7] не обоснованы, что приводит к рассогласованию начальных и граничных условий. Краевая задача оказывается недоопределенной.

Исследования корректности краевых задач двухфазной релаксационной фильтрации (согласованность начальных и граничных условий) и поведения скачка насыщенности для произвольного ядра релаксации проведены в [8–9]. Однако в этих работах не обсуждается конкретный вид начальных и граничных условий.

В представленной работе предлагается нестационарное граничное условие для краевой задачи, которое учитывает особенности переходных процессов неравновесной двухфазной фильтрации. Доказывается корректность, существование и единственность решения поставленной задачи. В частном случае получено точное решение.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При нестационарной двухфазной фильтрации в рамках известного подхода [5] неравновесные фазовые проницаемости и капиллярное давление определяются при некоторой эффективной насыщенности $\tilde{s}$, связанной с истинной насыщенностью s кинетическим уравнением

$$\tilde{s} = s + \tau \frac{\partial s}{\partial t}, \tag{1.1}$$

где τ — время релаксации, t — текущее время.

Для ОФП принимается:

$$f(\tilde{s}) = f\left(s + \tau \frac{\partial s}{\partial t}\right). \tag{1.2}$$

Тогда процесс вытеснения нефти из образца пористой среды при постоянной суммарной скорости фильтрации смеси V_0 и постоянном τ для одномерного движения описывается системой уравнений для насыщенности s и полной скорости фильтрации V_0

$$m\frac{\partial s}{\partial t} + V_0 \frac{\partial F(\tilde{s})}{\partial x} = 0, \tag{1.3}$$

$$-\frac{k}{\mu_1}\left[f_1(\tilde{s}) + \mu_0 f_2(\tilde{s})\right]\frac{\partial p}{\partial x} = V_0, \tag{1.4}$$

где $\mu_0 = \mu_1/\mu_2$ — отношение вязкостей вытесняющей и вытесняемой фаз, m — пористость, k — абсолютная проницаемость, p — давление в образце пористой среды, $F(s) = f_1(s)/(f_1(s) + \mu_0 f_2(s))$ — функция Баклея–Леверетта.

Перейдем к безразмерным переменным и введем следующие величины: $\theta = \frac{V_0 t}{ml}$ — безразмерное время, равное отношению объема закачанной жидкости к объему пор, $\xi = \frac{x}{l}$, где l — длина образца, $\bar{\tau} = \frac{\tau V_0}{ml}$ — безразмерный параметр неравновесности (в дальнейшем черточки опускаются). Уравнения (1.1), (1.3), (1.4) в этих переменных принимают вид

$$\tilde{s} = s + \tau \frac{\partial s}{\partial \theta}, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \xi} F(\tilde{s}) = 0, \tag{1.6}$$

$$\left[f_1(\tilde{s}) + \mu_0 f_2(\tilde{s})\right]\frac{\partial p}{\partial \xi} = -\frac{l\mu_1 V_0}{k}. \tag{1.7}$$

Уравнения (1.5)–(1.7) замыкаются начальными граничными условиями:

$$s(\xi, 0) = s_0, \quad s(0,\theta) + \tau\frac{\partial s(0,\theta)}{\partial \theta} = s_k, \tag{1.8}$$

$$p(0,\theta) = \varphi(\theta), \tag{1.9}$$

где s_0 и s_k — начальная и конечная насыщенности пористой среды вытесняющим агентом.

Из решения задачи (1.5)–(1.9) определяются функции $\Delta p^0(t)$ и $Q_2^0(t)$, которые используются для минимизации невязки J. Отметим, что $s_k > s_0 > 0$.

2. РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМИ ПРИБЛИЖЕНИЯМИ

Задачу (1.5), (1.6), (1.8) для определения неизвестной функции $s = s(\xi, \theta)$ перепишем следующим образом:

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} = \frac{1}{\tau}(\tilde{s} - s), \quad \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \xi} = \frac{1}{\tau F'(\tilde{s})}(s - \tilde{s}), \tag{2.1}$$

$$s(\xi, 0) = s_0, \quad \tilde{s}(0,\theta) = s_k. \tag{2.2}$$

Нашей целью является нахождение условий, при которых задача (2.1), (2.2) имеет гладкое решение в прямоугольнике $0 \leqslant \xi \leqslant a$,

$0 \leqslant \theta \leqslant b$. Краевая задача (2.1), (2.2) сводится к интегральным уравнениям вида

$$s\,(\xi,\theta) = s_0 + \frac{1}{\tau}\int\limits_0^{\theta} \left[\tilde{s}\,(\xi,\eta) - s\,(\xi,\eta)\right] d\eta,$$

$$\tilde{s}\,(\xi,\theta) = s_k + \frac{1}{\tau}\int\limits_0^{\xi} \frac{1}{F'\left(\tilde{s}\,(\eta,\theta)\right)} \times$$
$$\times \left[s\,(\eta,\theta) - \tilde{s}\,(\eta,\theta)\right] d\eta. \tag{2.3}$$

Для построения решения системы интегральных уравнений (2.3) мы воспользуемся методом последовательных приближений:

$$\overset{(n+1)}{s}(\xi,\theta) = s_0 + \frac{1}{\tau}\int\limits_0^{\theta} \left[\overset{(n)}{\tilde{s}}(\xi,\eta) - \overset{(n)}{s}(\xi,\eta)\right] d\eta,$$

$$\overset{(n+1)}{\tilde{s}}(\xi,\theta) = s_k + \frac{1}{\tau}\int\limits_0^{\xi} \frac{1}{F'\left(\overset{(n)}{\tilde{s}}(\eta,\theta)\right)} \times$$
$$\times \left[\overset{(n)}{s}(\eta,\theta) - \overset{(n)}{\tilde{s}}(\eta,\theta)\right] d\eta\,,$$
$$n = 0,1,2,\ldots\,, \quad \overset{(0)}{s} = s_0, \quad \overset{(0)}{\tilde{s}} = s_k\,. \tag{2.4}$$

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 1. *Пусть производная функции $F\,(s)$ не обращается в нуль на любом интервале $(-a,a)$, а именно:*

$$\left|\,F'\,(s)\,\right| \geqslant \mathrm{A} > 0\,, \tag{2.5}$$

и постоянная А *не зависит от a. Тогда для последовательных приближении справедливы оценки в прямоугольнике $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0$, $0 \leq \theta \leqslant \theta_0$, где $\theta_0 < \frac{\tau}{2}$, $\xi_0 < \frac{\tau \mathrm{A}}{2}$ для последовательных приближении справедливы оценки*

$$\left|\overset{(n)}{s}(\xi,\theta)\right| \leqslant M\,, \quad \left|\overset{(n)}{\tilde{s}}(\xi,\theta)\right| \leq M\,, \tag{2.6}$$
$$n = 0,1,2,\ldots\,.$$

Здесь постоянная M определяется так:

$$M = \max\left\{\frac{s_0\tau}{\tau - 2\theta_0},\ \frac{s_k\tau\mathrm{A}}{\tau\mathrm{A} - 2\xi_0},\right.$$
$$\left. s_0 + \frac{(s_k - s_0)}{\tau}\theta_0, s_k + \frac{(s_k - s_0)\,\xi_0}{\tau\mathrm{A}}\right\}. \tag{2.7}$$

Доказательство: Из (2.4) при $n = 0$ имеем

$$\overset{(1)}{s} = s_0 + \frac{s_k - s_0}{\tau}\,\theta,$$
$$\overset{(1)}{\tilde{s}} = s_k + \frac{1}{\tau F'\,(s_k)}\,(s_0 - s_k)\;\xi,$$

откуда согласно (2.5) и (2.7) получаем, что

$$\left|\overset{(1)}{s}(\xi,\theta)\right| \leqslant M, \quad \left|\overset{(1)}{\tilde{s}}(\xi,\theta)\right| \leqslant M \tag{2.8}$$

в прямоугольнике $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0$, $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$. Теперь, используя оценки (2.8), из (2.4) при $n = 1$ получаем, что

$$\left|\overset{(2)}{s}(\xi,\eta)\right| \leqslant s_0 + \frac{2}{\tau}M\theta.$$
$$\left|\overset{(2)}{\tilde{s}}(\xi,\eta)\right| \leqslant s_k + \frac{2M\xi}{\tau A}\,.$$

Далее на постоянную M наложим требования вида

$$s_0 + \frac{2}{\tau}M\theta_0 \leqslant M, \quad s_k + \frac{2}{\tau A}M\xi_0 \leqslant M.$$

$$s_0 \leqslant M\left(1 - \frac{2\theta_0}{\tau}\right), \quad s_k \leqslant M\left(1 - \frac{2\xi_0}{\tau A}\right).$$

Таким образом,

$$\theta_0 < \frac{\tau}{2} \quad \text{и} \quad \xi_0 < \frac{\tau A}{2},$$
$$\frac{s_0\tau}{\tau - 2\theta_0} \leqslant M \quad \text{и} \quad \frac{s_k\tau A}{\tau A - 2\xi_0} \leqslant M. \tag{2.9}$$

Согласно (2.9) постоянную M определим теперь по формуле (2.7). И, наконец, справедливость оценок (2.6) докажем методом математической индукции. Пусть оценки (2.6) верны для n. Тогда из (2.4) получаем, что в прямоугольнике $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0$, $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$ имеют место оценки

$$\left|\overset{(n+1)}{s}(\xi,\theta)\right| \leqslant s_0 + \frac{2M\theta_0}{\tau}$$
$$\text{и} \quad \left|\overset{(n+1)}{\tilde{s}}(\xi,\theta)\right| \leqslant s_k + \frac{2M\xi_0}{\tau A}.$$

Теперь, учитывая (2.7), получаем, что

$$\left|\overset{(n+1)}{s}(\xi,\theta)\right| \leqslant M \quad \text{и} \quad \left|\overset{(n+1)}{\tilde{s}}(\xi,\theta)\right| \leqslant M.$$

Лемма доказана.

С использованием леммы доказывается теорема существования и единственности решения задачи (2.1) – (2.2).

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

$$\left|F'(s)\right| \geqslant A > 0, \quad \left|F''(s)\right| \leqslant B, \quad s \in [-M, M], \tag{2.10}$$

тогда в прямоугольнике $0 \le \xi \le \xi_0, 0 \le \theta \le \theta_0$ существует и притом единственное решение системы интегральных уравнений (2.3).

Доказательство. Покажем сходимость последовательных приближений (2.4). Для этого вычтем из равенств (2.4) аналогичные равенства, получаемые заменой n на $n-1$, будем иметь

$$\overset{(n+1)}{s}(\xi,\theta) - \overset{(n)}{s}(\xi,\theta) = \frac{1}{\tau}\int_0^\theta \left[\left(\overset{(n)}{\tilde{s}}(\xi,\eta) - \overset{(n-1)}{\tilde{s}}(\xi,\eta)\right) - \left(\overset{(n)}{s}(\xi,\eta) - \overset{(n-1)}{\tilde{s}}(\xi,\eta)\right)\right] d\eta, \tag{2.11}$$

$$\overset{(n+1)}{\tilde{s}}(\xi,\theta) - \overset{(n)}{s}(\xi,\theta) = \frac{1}{\tau}\int_0^\xi \left\{\frac{1}{F'\left(\overset{(n)}{\tilde{s}}(\eta,\theta)\right)} \times \left[\left(\overset{(n)}{s}(\eta,\theta) - \overset{(n-1)}{s}(\eta,\theta)\right) - \left(\overset{(n)}{\tilde{s}}(\eta,\theta) - \overset{(n-1)}{\tilde{s}}(\eta,\theta)\right)\right] + \left[\frac{1}{F'\left(\overset{(n)}{s}(\eta,\theta)\right)} - \frac{1}{F'\left(\overset{(n-1)}{\tilde{s}}(\eta,\theta)\right)}\right] \times \left(\overset{(n-1)}{s}(\eta,\theta) - \overset{(n-1)}{\tilde{s}}(\eta,\theta)\right)\right\} d\eta. \tag{2.12}$$

Соотношение (2.12) перепишем следующим образом:

$$\overset{(n+1)}{\tilde{s}}(\xi,\theta) - \overset{(n)}{s}(\xi,\theta) = \frac{1}{\tau}\int_0^\xi \left\{\frac{1}{F'\left(\overset{(n)}{\tilde{s}}(\eta,\theta)\right)} \times \left[\left(\overset{(n)}{s}(\eta,\theta) - \overset{(n-1)}{s}(\eta,\theta)\right) - \left(\overset{(n)}{\tilde{s}}(\eta,\theta) - \overset{(n-1)}{\tilde{s}}(\eta,\theta)\right)\right] - \frac{F''\left(\overset{(n-1)}{\tilde{s}}(\eta,\theta) + \alpha\left(\overset{(n)}{\tilde{s}}(\eta,\theta) - \overset{(n-1)}{\tilde{s}}(\eta,\theta)\right)\right)}{F'^2\left(\overset{(n-1)}{\tilde{s}}(\eta,\theta) + \alpha\left(\overset{(n)}{\tilde{s}}(\eta,\theta) - \overset{(n-1)}{s}(\eta,\theta)\right)\right)} \times \left(\overset{(n)}{\tilde{s}}(\eta,\theta) - \overset{(n-1)}{\tilde{s}}(\eta,\theta)\right) \times \left(\overset{(n-1)}{s}(\eta,\theta) - \overset{(n-1)}{\tilde{s}}(\eta,\theta)\right)\right\} d\eta. \tag{2.13}$$

Теперь, учитывая оценки (2.6) и (2.10), из (2.11) и (2.13) получаем

$$\left|\overset{(n+1)}{s} - \overset{(n)}{s}\right| \leqslant \frac{1}{\tau}\int_0^\theta \left[\left|\overset{(n)}{\tilde{s}} - \overset{(n-1)}{\tilde{s}}\right| + \left|\overset{(n)}{s} - \overset{(n-1)}{\tilde{s}}\right|\right] d\eta, \tag{2.14}$$

$$\left|\overset{(n+1)}{\tilde{s}} - \overset{(n)}{\tilde{s}}\right| \leqslant \frac{1}{\tau}\int_0^\xi \left\{\frac{1}{A}\left[\left|\overset{(n)}{s} - \overset{(n-1)}{s}\right| + \left|\overset{(n)}{\tilde{s}} - \overset{(n-1)}{\tilde{s}}\right|\right] + \frac{2MB}{A^2}\left|\overset{(n)}{\tilde{s}} - \overset{(n-1)}{\tilde{s}}\right|\right\} d\eta. \tag{2.15}$$

Далее, полагая

$$p_n = \left|\overset{(n)}{s} - \overset{(n-1)}{s}\right| + \left|\overset{(n)}{\tilde{s}} - \overset{(n-1)}{\tilde{s}}\right|, \quad n = 1, 2, \dots,$$

из (2.14) и (2.15) получаем, что

$$p_{n+1}(\xi,\theta) \leqslant C\left[\int_0^\theta p_n(\xi,\eta)\,d\eta + \int_0^\xi p_n(\eta,\theta)\,d\eta\right], \tag{2.16}$$

$n = 1, 2, \ldots$. Здесь постоянная C зависит от τ, A, B и M.

Теперь в силу Леммы 1 имеем

$$p_1(\xi, \theta) \leqslant 4M$$

в прямоугольнике $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0$, $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$ и тогда из (2.16) при $n = 1$ получаем

$$p_2(\xi, \theta) \leqslant 4MC(\theta + \xi). \qquad (2.17)$$

Далее, используя (2.17) из (2.16), для $n = 2$ будем иметь

$$p_3(\xi, \theta) \leqslant 4MC^2(\theta + \xi)^2.$$

Аналогично получаем, что

$$p_4(\xi, \theta) \leqslant \frac{4MC^3 2(\theta + \xi)^3}{3},$$

$$p_5(\xi, \theta) \leqslant \frac{4MC2^2(\theta + \xi)^4}{3 \cdot 4},$$

и вообще

$$p_n(\xi, \theta) \leqslant \frac{2^n MC^{n-1}}{(n-1)!}(\theta + \xi)^{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots. \qquad (2.18)$$

Формулу (2.18) легко обосновать методом математической индукции.

Доказанное таким образом неравенство (2.18) показывает, что два ряда

$$\overset{(0)}{s} + \left(\overset{(1)}{s} - \overset{(0)}{s}\right) + \left(\overset{(2)}{s} - \overset{(1)}{s}\right) + \cdots + \left(\overset{(n)}{s} - \overset{(n-1)}{s}\right) + \cdots$$

$$\overset{(0)}{\tilde{s}} + \left(\overset{(1)}{\tilde{s}} - \overset{(0)}{\tilde{s}}\right) + \left(\overset{(2)}{\tilde{s}} - \overset{(1)}{\tilde{s}}\right) + \cdots + \left(\overset{(n)}{\tilde{s}} - \overset{(n-1)}{\tilde{s}}\right) + \cdots \qquad (2.19)$$

допускают в качестве мажоранты ряд из функций M и $p_n(\xi, \theta)$:

$$M + p_1(\xi, \theta) + p_2(\xi, \theta) + \ldots + p_n(\xi, \theta) + \ldots, \qquad (2.20)$$

который в свою очередь допускает в качестве мажоранты сходящийся ряд с постоянными членами

$$M + 4M + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n MC^{n-1}}{(n-1)!}(\xi_0 + \theta_0)^{n-1} = 3M + 2Me^{2C(\xi_0 + \theta_0)}. \qquad (2.21)$$

Следовательно, ряды (2.19) абсолютно и равномерно сходятся в прямоугольнике $0 \leqslant \xi < \xi_0$, $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$, последнее равносильно тому, что $\overset{(n)}{s}$ и $\overset{(n)}{\tilde{s}}$ при $n \to \infty$ равномерно стремятся к некоторым вполне определенным пределам s и $\tilde{s}$ соответственно.

Далее, эти пределы удовлетворяют интегральным уравнениям (2.3), так как в формулах (2.4) можно перейти к пределу при $n \to \infty$ «под знаками интегралов», в результате чего эти формулы перейдут в интегральные уравнения (2.3).

Докажем наконец, что функции s и $\tilde{s}$ образуют единственное решение системы интегральных уравнений (2.3).

Действительно, пусть s^* и $\tilde{s}^*$ — какое-нибудь решение системы интегральных уравнений (2.3). Тогда, вычитая из рекуррентных формул (2.4) интегральные уравнения (2.3), в которые вместо s и $\tilde{s}$ подставлены соответственно s^* и $\tilde{s}^*$, мы получаем формулы, аналогичные (2.14) и (2.15):

$$\left|\overset{(n+1)}{s} - s^*\right| \leqslant \frac{1}{\tau}\int_0^\theta \left[\left|\overset{(n)}{\tilde{s}} - \tilde{s}^*\right| + \left|\overset{(n)}{s} - s^*\right|\right] d\eta, \qquad (2.22)$$

$$\left|\overset{(n+1)}{\tilde{s}} - \tilde{s}^*\right| \leqslant \frac{1}{\tau}\int_0^\xi \left\{\frac{1}{A}\left[\left|\overset{(n)}{s} - s^*\right| + \left|\overset{(n)}{\tilde{s}} - \tilde{s}^*\right|\right] + \frac{2MB}{A^2}\left|\overset{(n)}{\tilde{s}} - \tilde{s}^*\right|\right\} d\eta, \qquad (2.23)$$

откуда, если положить

$$p_n^*(\xi, \theta) = \left|\overset{(n)}{s} - s^*\right| + \left|\overset{(n)}{\tilde{s}} - \tilde{s}^*\right|, \qquad (2.24)$$

следует, как и выше, что

$$p_{n+1}^*(\xi, \theta) \leqslant C\left[\int_0^\theta p_n^*(\xi, \eta)\, d\eta + \int_0^\xi p_n^*(\eta, \theta)\, d\eta\right]. \qquad (2.25)$$

Но из этого неравенства, имеющего точно тот же вид, что и (2.16), получаем оценку

$$p_n^*(\xi,\theta) \leqslant \frac{2^n M C^{n-1}}{(n-1)!}(\theta+\xi)^{n-1}. \qquad (2.26)$$

Следовательно, p_n^*, не превосходя общего члена всюду сходящегося ряда, необходимо стремится к нулю при $n \to \infty$, откуда тем более

$$\lim_{n\to\infty}\left|\overset{(n)}{s} - s^*\right| = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\left|\overset{(n)}{\tilde{s}} - \tilde{s}^*\right| = 0, \qquad (2.27)$$

т. е. s^* и $\tilde{s}^*$ необходимо должны совпадать соответственно с пределами $\overset{(n)}{s}$ и $\overset{(n)}{\tilde{s}}$ при $n\to\infty$, ранее обозначенными через s и $\tilde{s}$. Тем самым *теорема доказана*.

Замечание 1. Используя принцип продолжения решения, можно доказать существование и единственность решения системы интегральных уравнений (2.3) в произвольном прямоугольнике R.

Замечание 2. Так как решение системы (2.3) $s(\xi,\theta)$ и $\tilde{s}(\xi,\theta)$ — непрерывные функции в прямоугольнике R, то и производные $\frac{\partial s(\xi,\theta)}{\partial\theta}$ и $\frac{\partial \tilde{s}(\xi,\theta)}{\partial\xi}$ суть непрерывные функции в R.

Замечание 3. Теорема 1 справедлива и в случае, если $s_0 = s_0(\xi)$ и $s_k = s_k(\theta)$ являются гладкими функциями.

Отметим также, что классическое решение рассматриваемой задачи (1.5)–(1.6) непрерывным образом зависит от граничных условий (1.8).

3. ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Построим решение исходной задачи (1.5)–(1.6), (1.8) в случае, когда функция $F(s)$ — линейная, т. е., $F(s) = As + B$, A, B — постоянные.

Таким образом, система уравнений (2.1), (2.2), соответствующая рассматриваемой задаче, имеет вид

$$\frac{\partial s}{\partial\theta} = \frac{1}{\tau}(\tilde{s}-s), \quad \frac{\partial\tilde{s}}{\partial\xi} = \frac{1}{\tau A}(s-\tilde{s}), \qquad (3.1)$$

$$s(\xi,0) = s_0, \qquad \tilde{s}(0,\theta) = s_k. \qquad (3.2)$$

Положим

$$\begin{array}{ll} \theta = \tau y, & \xi = -\tau x A, \\ s(\xi,\theta) = p(x,y), & \tilde{s}(\xi,\theta) = q(x,y), \end{array} \qquad (3.3)$$

тогда (3.1), (3.2) сводятся к следующей задаче:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = q - p, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = q - p, \qquad (3.4)$$

$$p(x,0) = s_0, \quad q(0,y) = s_k. \qquad (3.5)$$

Далее решение задачи (3.4), (3.5) будем искать в виде

$$\begin{aligned} p(x,y) &= \sum_{i=0}^{\infty} p_i(x)\, y^i, \\ q(x,y) &= \sum_{i=0}^{\infty} q_i(x)\, y^i. \end{aligned} \qquad (3.6)$$

Подстановка рядов (3.6) в уравнения (3.4) приводит к следующим соотношениям на неизвестные функции $p_i(x)$ и $q_i(x)$:

$$\begin{aligned} (1+i)\,p_{i+1}(x) &= q_i(x) - p_i(x), \\ q_i'(x) &= (1+i)\,p_{i+1}(x), \\ i &= 0,1,2,\ldots \end{aligned} \qquad (3.7)$$

При этом граничные условия (3.5) приводятся к виду

$$p_0(x) = s_0, \ q_0(0) = s_k, \ q_i(0) = 0, \ i = 1,2,\ldots. \qquad (3.8)$$

Теперь из (3.7) и (3.8) получаем задачу для определения коэффициентов $p_i(x)$ вида

$$\begin{aligned} & p_{i+1}'(x) - p_{i+1}(x) = \\ & \quad = -\frac{1}{(i+1)}p_i'(x), \quad i = 0,1,2,\ldots, \end{aligned} \qquad (3.9)$$

$$\begin{aligned} & p_0(x) = s_0, \quad p_1(0) = s_k - s_0, \\ & p_{i+1}(0) = -\frac{1}{(i+1)}p_i(0), \quad i = 1,2,\ldots. \end{aligned} \qquad (3.10)$$

Из (3.10) находим

$$p_{i+1}(0) = \frac{(-1)^i}{(1+i)!}(s_k - s_0), \quad i = 0,1,2,\ldots. \qquad (3.11)$$

Далее в уравнениях (3.9) удобно для дальнейшего положить

$$p_i(x) = h_i(x)\, e^x, \quad i = 1,2,\ldots. \qquad (3.12)$$

Тогда подстановка (3.12) в (3.9) дает

$$h'_{i+1}(x) = -\frac{1}{(i+1)}\left[h'_i(x) + h_i(x)\right], \quad i = 1, 2, \dots . \qquad (3.13)$$

В силу (3.11) и (3.12)

$$h_{i+1}(0) = \frac{(-1)^i}{(1+i)\,!}(s_k - s_0), \quad i = 0, 1, 2, \dots , \qquad (3.14)$$

а из (3.9) при $i = 0$ с учетом условий (3.10) будем иметь

$$p_1(x) = (s_k - s_0)\, e^x.$$

Следовательно, согласно (3.12)

$$h_1(x) = s_k - s_0. \qquad (3.15)$$

Теперь из (3.13) и (3.14) получаем

$$h_{i+1}(x) = -\frac{1}{(i+1)}\left[h_i(x) + \int\limits_0^x h_i(\eta)\, d\eta\right], \quad i = 1, 2, \dots . \qquad (3.16)$$

И, наконец, учитывая (3.15) из (3.16) находим, что

$$h_i(x) = \frac{(-1)^{i+1}(s_k - s_0)}{i\,!}\sum_{k=0}^{i-1}\frac{1}{k!}\, C_{i-1}^k x^k, \quad i = 1, 2, \dots \qquad (3.17)$$

Здесь

$$C_{i-1}^k = \frac{(i-1)!}{k!\,(i-1-k)!}, \qquad 0\,! = 1.$$

Формула (3.17) обосновывается принципом математической индукции с использованием соотношения

$$C_{i-1}^k + C_{i-1}^{k-1} = C_i^k.$$

Таким образом, согласно формулам (3.6), (3.7), (3.8), (3.12), (3.17) имеем

$$p(x, y) = s_0 + \sum_{i=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{i+1}(s_k - s_0)}{i!}\sum_{j=0}^{i-1}\frac{1}{j!}\, C_{i-1}^j x^j\right\} e^x y^i,$$

$$q(x, y) = s_0 + (s_k - s_0)\, e^x + \sum_{i=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^i (s_k - s_0)}{i!}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j!} C_{i-1}^{j-1} x^j\right\} e^x y^i. \qquad (3.18)$$

Итак, формулы (3.18) дают решение задачи (3.4), (3.5).

Возвращаясь к старым переменным (3.3), получаем из (3.18) решение исходной задачи (3.1), (3.2):

$$s(\xi, \theta) = s_0 + \sum_{i=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{i+1}}{i\,!}(s_k - s_0) \times \sum_{j=0}^{i-1}\frac{1}{j!}\, C_{i-1}^j\left(-\frac{\xi}{\tau A}\right)^j\right\} e^{-\frac{\xi}{\tau A}}\left(\frac{\theta}{\tau}\right)^i,$$

$$\tilde{s}(\xi, \theta) = s_0 + (s_k - s_0)\, e^{-\frac{\xi}{\tau A}} + \sum_{i=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^i (s_k - s_0)}{i!} \times \sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j!} C_{i-1}^{j-1}\left(-\frac{\xi}{\tau A}\right)^j\right\} e^{-\frac{\xi}{\tau A}}\left(\frac{\theta}{\tau}\right)^i. \qquad (3.19)$$

Отметим, что формулы (3.19) можно получить, решая систему интегральных уравнений (2.3) в случае $F(s) = As + B$ методом последовательных приближений.

4. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим уравнение (1.7) и соответствующее ему краевое условие (1.9):

$$\left[f_1(\tilde{s}) + \mu_0 f_2(\tilde{s})\right]\frac{\partial p}{\partial \xi} = -l\mu_1 V_0/k, \qquad (4.1)$$

$$p(0, \theta) = \varphi(\theta). \qquad (4.2)$$

Как было показано в разделе 3, функция $\tilde{s}(\xi, \theta)$ определена в прямоугольнике R, причем $|\tilde{s}| \leqslant M$. Пусть в промежутке $[-M, M]$ функция $f_1(\tilde{s}) + \mu_0 f_2(\tilde{s})$ не обращается в нуль. Тогда решение задачи (4.1) и (4.2) вычисляется по формуле

$$p(\xi, \theta) = \varphi(\theta) - \int\limits_0^{\xi}\left\{\frac{l\mu_1 V_0}{k f_1(\tilde{s}) + k\mu_0 f_2(\tilde{s})}\right\} d\eta. \qquad (4.3)$$

5. ДОПОЛНЕНИЕ

Отметим, что второе условие (1.7) можно записать как

$$s(0,\theta) = (s_0 - s_k)\, e^{-\frac{\theta}{\tau}} + s_k. \qquad (5.1)$$

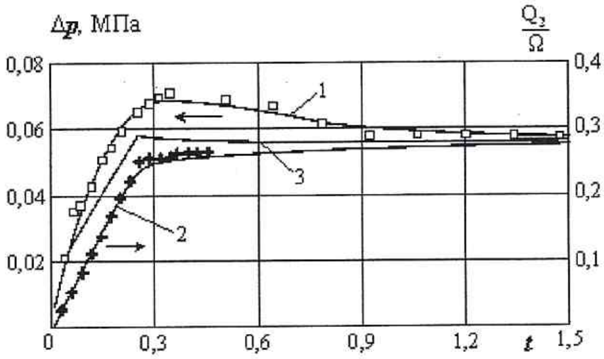
Далее, если $F'(s_k) = 0$, то при $\xi \to 0$ $\tilde{s}(\xi,\theta) \to s_k$ и $s(\xi,\theta) \to (s_0 - s_k)\, e^{-\frac{\theta}{\tau}} + s_k$, согласно (2.2) и (5.1). Следовательно,

$$\tilde{s}(\xi,\theta) - s(\xi,\theta) \to (s_k - s_0)\, e^{-\frac{\theta}{\tau}} \neq 0$$

и тогда из второго уравнения (2.1) следует $\lim\limits_{\xi\to 0} \frac{\partial \tilde{s}(\xi,\theta)}{\partial \xi} = \infty$, что не имеет физического смысла.

6. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Решая численно задачу (1.5)–(1.9), определяем функции $\Delta p(t)$ и $Q_2(t)$, которые используются для минимизации невязки J.



Зависимость перепада давления (1), (3) и безразмерного объема вытесненной нефти (2) от безразмерного времени

Для примера на рисунке представлены расчетные и экспериментальные зависимости безразмерного объема вытесненной нефти Q_2/Ω (кривая 2, Ω — объем пор) и перепада давления Δp (кривые 1, 3) от безразмерного времени, полученные в опытах по вытеснению нефти из модели пласта одного из месторождений ОАО «Юганскнефтегаз» ($s_0 = 0{,}397$, $s_k = 0{,}669$, $l = 0{,}3$ м, $m = 0{,}19$, $k = 0{,}065$ мкм^2, $\mu_1 = 0{,}379$ МПа·с, $\mu_2 = 3{,}0$ МПа·с). Экспериментальные данные показаны на этом рисунке крестиками и квадратами. Анализ полученных результатов свидетельствует о том, что имеющейся экспериментальной информации лучше всего соответствует двухпараметрическая модель [3], в которой функции ОФП восстановлены в виде

$$f_1(s) = 0{,}0138\left(\frac{s - s_0}{s_k - s_0}\right)^{2{,}75},$$

$$f_2(s) = 0{,}503\left(\frac{s_k - s}{s_k - s_0}\right)^{1{,}82}.$$

Проведенные расчеты показали, что в рамках равновесной модели (кривая 3) ни при каких значениях параметров не удается удовлетворительно описать экспериментальную кривую $\Delta \mathrm{p}(t)$. Результаты расчетов по неравновесной модели, представленные кривой 1, вполне удовлетворительно описывают экспериментальную зависимость $\Delta p(t)$.

Замечание 4. Отметим, что приведенное здесь решение обратной задачи позволяет оценить характерное время релаксации τ. При этом в ходе решения обратной задачи установлено, что время τ соизмеримо с временем прорыва вытесняющей жидкости из образца пористой среды.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе развита и исследована модель фильтрации с неравновесными фазовыми проницаемостями. Учет неравновесности приводит к задаче типа Гурса с начальными данными на характеристиках. При этом возникает проблема корректности постановки краевой задачи.

В работе предложены граничные условия, учитывающие особенности процессов неравновесной двухфазной фильтрации. Доказаны существование в целом гладкого решения поставленной краевой задачи и его единственность. В частном случае для линейной функции Баклея–Леверетта приводится формула точного решения, которая используется для апробации численного алгоритма вычисления неравновесной насыщенности.

Корректная постановка задачи неравновесной двухфазной фильтрации позволила сформулировать и решить обратную задачу определения неравновесных фазовых проницаемостей [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ентов В. М., Чен-Син Э. В.** Микромеханика двухфазного течения в пористых средах // Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск: ИТПМ, 1987. С. 120–129.

2. **Мартос В. Н., Рыжик В. М.** Определение динамических кривых капиллярного давления методом стабилизированной зоны // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 2. С. 57–60.
3. **Карачурин Н. Т., Кондаратцев С. А., Хасанов М. М.** К обратной задаче теории двухфазной фильтрации // ПММ. 1996. Т. 60, № 3. С. 489–493.
4. **Николаевский В. Н., Бондарев Э. А., Миркин М. И. и др.** Движение углеводородных смесей в пористой среде. М.: Недра, 1968. 190 с.
5. **Баренблатт Г. И., Винниченко А. П.** // Успехи механики. 1980. Т. 3, № 3. С. 35–50.
6. **Ентов В. М.** К теории неравновесных эффектов при фильтрации неоднородных жидкостей // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 3. С. 52–58.
7. **Бочаров О. Б., Витовский О. В., Кузнецов В. В.** Структура скачков насыщенности при неравновесном вытеснении в пористых средах // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 6. С. 97–104.
8. **Костерин А. В.** Об уравнениях неравновесной фильтрации // ИФЖ. 1980. Т. 39, № 1. С. 77–80.
9. **Мирзаджанзаде А. Х., Хасанов М. М., Бахтизин Р. Н.** Этюды о моделировании сложных систем нефтедобычи: Нелинейность, неравновесность, неоднородность. Уфа: Гилем, 1999. 464 с.
10. **Осипов П. П., Балаян Н. М.** Классификация линейных релаксационных моделей двухфазной фильтрации // ИФЖ. 1987. Т. 53, № 2. С. 253–258.

ОБ АВТОРЕ

Булгакова Гузель Талгатовна, проф. каф. математики УГАТУ. Дипл. физик-теоретик (БГУ, 1974). Д-р физ.-мат. наук по механике жидкости, газа и плазмы (БГУ, 2000). Исследования в области гидромеханики нефтяного пласта, фильтрации газожидкостных потоков, численно-аналитических методов.