Уфа: УГАТУ, 2003 Вестник УГАТУ Т. 4, № 2. С. 55–66

НАУЧНЫЕ СТАТЬИ И ДОКЛАДЫ • МАТЕМАТИКА

УДК 517.2

Ф. С. НАСЫРОВ

СИММЕТРИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ПОТРАЕКТОРНЫЕ АНАЛОГИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Определяются симметричные интегралы типа Стильтьеса по произвольной непрерывной функции, которые являются детерминированными версиями стохастических интегралов Стратоновича. Показано, что решение потраекторных аналогов стохастических дифференциальных уравнений с симметричным интегралом и стохастических дифференциальных уравнений Ито удается свести к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. *Симметричный интеграл; стохастический интеграл Стратоновича; стохастические дифференциальные уравнения*

ВВЕДЕНИЕ

Тематика статьи восходит к работе Янга [12], где впервые были построены интегралы типа Стильтьеса по функциям неограниченной вариации. В работах [2, 3, 7, 11, 12] исследованы различные варианты такого вида интегралов, в частности, интегралы Хеллингера. В то же время в стохастическом анализе хорошо известны стохастические интегралы Стратоновича, которые не имели своего «потраекторного» аналога. В работе автора [6] для определенного класса интеграндов построены симметричные интегралы по произвольной непрерывной функции, которые являются детерминированными вариантами стохастических интегралов Стратоновича; при этом никаких предположений о предсказуемости интеграндов при потраекторном подходе не требуется.

Настоящую статью можно считать продолжением работы [6]. В §2 приводятся условия, при которых симметричный интеграл по любой непрерывной функции существует и доказывается корректность определения симметричного интеграла. В §3 рассматриваются детерминированные аналоги стохастических дифференциальных уравнений с симметричными интегралами. С точки зрения теории случайных процессов, коэффициенты рассматриваемых уравнений могут быть как детерминированными, так и случайными и не обязаны быть предсказуемыми функциями.

Показано, что при определенных предположениях, накладываемых на коэффициенты, решение такого вида уравнений может быть сведено к решению системы из двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Кроме того, с помощью подхода А. В. *Скорохода* удалось построить детерминированные аналоги стохастических дифференциальных уравнений с отражающим экраном. Решение стохастических дифференциальных уравнений со стохастическим интегралом Ито в случае гладких коэффициентов также сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Приведем необходимые обозначения и сведения. Множества $R = (-\infty, +\infty)$, $[0,t]$, $t > 0$, предполагаются наделенными σ-алгебрами борелевских множеств, которые соответственно обозначаются B, B_t, $t > 0$; на этих подмножествах считается заданной мера Лебега $\lambda(.)$. Для непрерывной функции $X(s)$, $s \in [0, +\infty)$, положим

$$\begin{aligned} M(t) &= \max\{X(s) : s\in[0,t]\}, \\ m(t) &= \min\{X(s) : s\in[0,t]\}, \\ M^{-1}(u) &= \inf\{s : M(s) > u\}, \\ m^{-1}(u) &= \inf\{s : m(s) < u\}. \end{aligned}$$

Обозначим через $\operatorname{sgn}(x)$ знак вещественного числа x, а $\mathbf{1}(A)$ обозначает индикатор множества A, т. е. функцию, равную 1 на A и 0 вне A; далее всюду $a\wedge b = \min(a,b)$, $a\vee b = \max(a,b)$, $\kappa(v, A, B) = \operatorname{sgn}(B - A)\mathbf{1}(A\wedge B < v < A \vee B)$.

Пусть $X(s)$, $s \in [0,1]$, — борелевская вещественнозначная функция, $\tau(.)$ — мера на σ-алгебре B_1 борелевских множеств отрезка

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 01-01-00870.

$[0,1]$. Введем меры $\nu_t(\Gamma) = \int\limits_0^t \mathbf{1}(X(s)\in\Gamma)\tau(ds)$, $\Gamma \in B$, $t \in [0,1]$, тогда $\nu_t(\Gamma)$ есть количество времени, проводимое функцией $X(s)$, $s \in [0,t]$, в множестве Γ. Производная Радона–Никодима $\alpha_\tau(t,u) \equiv \alpha_t(u) = \frac{d\nu_t}{d\lambda}(u)$, $u \in R$, если она существует, называется *локальным временем* функции $X(s)$. Оказывается [10], можно всегда считать, что локальное время измеримо как функция двух переменных и является при каждом u неубывающей непрерывной справа функцией по t; меру на B_1, которую она порождает, мы будем обозначать $\alpha_\tau(ds,u)$.

Из определения локального времени следует [10], что для любой ограниченной (или знакопостоянной) борелевской функции $f(s,u)$ справедливо равенство

$$\int\limits_0^t f(s,X(s))\tau(ds) = \int\limits_R \int\limits_0^t f(s,u)\alpha(ds,u)\,du. \qquad \text{(B.1)}$$

Говорят, что случайный процесс обладает локальным временем, если почти все его траектории имеют локальное время. В случае, когда $\tau(ds) = ds$, положим $\alpha_\tau(t,u) \equiv \alpha(t,u)$. Пусть $X(s)$ — абсолютно непрерывная функция, $\tau(ds) = |X'(s)|\,ds$, тогда локальное время $N(t,u) \equiv \alpha_\tau(t,u)$ для функции $X(s)$ называется [4] *индикатрисой Банаха*; величина $N(t,u)$ равна числу пересечений функцией $X(s)$, $s \in [0,t]$, уровня u.

Ряд общих сведений о локальных временах детерминированных функций и случайных процессов приведен в работах [1, 5, 8–10].

1. СИММЕТРИЧНЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ВЫЧИСЛЕНИЕ

Определение. Будем говорить, что пара функций $X(s)$, $s \in [0,1]$, и $f(s,u)$, $s \in [0,1]$, $u \in R$, удовлетворяют *условию* (S) *на* $[0,t]$, если:

(a) функция $X(s)$, $s \in [0,t]$, непрерывна;

(b) при почти всех (п. в.) u функция $f(s,u)$, $s \in [0,t]$, имеет ограниченное изменение и непрерывна справа по $s \in [0,t]$;

(c) при п. в. u справедливо равенство $\int\limits_0^t \mathbf{1}(X(s) = u)|f|(ds,u) = 0$, где при каждом u функция $|f|(s,u)$ есть полное изменение функции $f(\tau,u)$ по переменной τ на отрезке $[0,s]$;

(d) полное изменение $|f|(t,u)$ функции $f(s,u)$ по переменной s на отрезке $[0,t]$ локально суммируемо по u.

Замечания:

1) Условие (c) будет выполнено, если непрерывная функция $X(s)$ обладает локальным временем $\alpha(t,u)$, а функция $f(s,u)$ при п. в. u абсолютно непрерывна по переменной s.

2) Если $X(s) = X(s,\omega)$ — случайный процесс, обладающий локальным временем $\alpha(t,u)$, а $f(s,u)$ — детерминированная функция, удовлетворяющая условию (b), то условие (c) будет выполнено для почти всех траекторий процесса. В частности, для случайного процесса броуновского движения $X(s,\omega)$ и детерминированной функции $f(s,u)$ с условием (b) предположение (c) всегда выполняется.

Пусть функции $X(s)$ и $f(s,u)$ удовлетворяют условию (S) на отрезке $[0,t]$. Рассмотрим разбиения T_n, $n \in N$, отрезка $[0,t]$: $T_n = \{t_k^{(n)}\}$, $0 = t_0^{(n)} \leqslant t_1^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant t_k^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant t_{m_n}^{(n)} = t$, $n \in N$, такие, что $T_n \subset T_{n+1}$, $n \in N$, и $\lambda_n = \max\limits_k \left|t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}\right| \to 0$ при $n \to \infty$. Через $X^{(n)}(s)$, $s \in [0,t]$, обозначим ломаную, построенную по функции $X(s)$ и отвечающую разбиению T_n, а через $N^{(n)}(t,u)$ — соответствующую ей индикатрису Банаха. Введем следующие обозначения: $\Delta t_k^{(n)} = t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}$, $\left[\Delta t_k^{(n)}\right] = \left[t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}\right]$, $\Delta X_k^{(n)} = X(t_k^{(n)}) - X(t_{k-1}^{(n)})$.

Определение. *Симметричным интегралом* называется [5]

$$\int\limits_0^t f(s,X(s)) * dX(s) = \lim_{n\to\infty} \sum_k \frac{1}{\Delta t_k^{(n)}} \int\limits_{[\Delta t_k^{(n)}]} f(s,X^{(n)}(s))\,ds\Delta X_k^{(n)},$$

если предел в правой части равенства существует и не зависит от выбора последовательности разбиений $T_n, n \in N$.

Замечание. Симметричный интеграл является [6] детерминированным аналогом стохастического интеграла Стратоновича.

Лемма 1. *Пусть* $X(s)$, $s \in [0,1]$, — *произвольная непрерывная функция,* $X^{(n)}(s)$,

$s \in [0,1]$, — *ломаная, построенная по разбиению* T_n. *Тогда для всех* v, *которые удовлетворяют условию* $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{1}(X^{(n)}(s) = v)\, ds = 0$, *интеграл* $\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{sgn}((X^{(n)})'(s)) N^{(n)}(ds, v)$ *равен* $\operatorname{sgn}(X^{(n)}(t_2) - X^{(n)}(t_1))$ *в случае, если* $v \in (X^{(n)}(t_1) \wedge X^{(n)}(t_2), X^{(n)}(t_1) \vee X^{(n)}(t_2))$, *и равен нулю в случае, когда* $v \in R \setminus [X^{(n)}(t_1) \wedge X^{(n)}(t_2), X^{(n)}(t_1) \vee X^{(n)}(t_2)]$.

Доказательство. Заметим, что $\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{sgn}((X^{(n)})'(s)) N^{(n)}(ds, v)$ — это сумма знаков производной ломаной, взятых в точках пересечения ломаной $X^{(n)}(s)$ уровня v. Но с ростом переменной s знаки производной ломаной чередуются, а число пересечений уровня v ломаной $X^{(n)}(s)$ нечетно, если $v \in (X^{(n)}(t_1) \wedge X^{(n)}(t_2), X^{(n)}(t_1) \vee X^{(n)}(t_2))$ и четно в случае, когда $v \in R \setminus [X^{(n)}(t_1) \wedge X^{(n)}(t_2), X^{(n)}(t_1) \vee X^{(n)}(t_2)]$, откуда вытекает утверждение леммы 1.

Теорема 1. *Пусть функции* $X(s)$ *и* $f(s,u)$ *удовлетворяют условию* (S) *на* $[0,t]$, *тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *Симметричный интеграл* $\int_0^t f(s, X(s)) * dX(s)$ *существует и вычисляется по формуле*

$$\int_0^t f(s, X(s)) * dX(s) =$$

$$= - \int_{X(t)}^{X(0)} f(m^{-1}(v), v) dv \mathbf{1}(X(t) < X(0)) -$$

$$- \int_{X(t)}^{X(0)} \int_{m^{-1}(v)}^{t} \mathbf{1}(X(\tau) > v) f(d\tau, v)\, dv \times$$
$$\times \mathbf{1}(X(t) < X(0)) +$$

$$+ \int_{m(t)}^{X(0)} \int_{m^{-1}(v)}^{t} \mathbf{1}(X(\tau) < v) f(d\tau, v)\, dv \times$$
$$\times \mathbf{1}(X(t) \geqslant X(0)) +$$

$$+ \int_{m(t)}^{X(t)} \int_{m^{-1}(v)}^{t} \mathbf{1}(X(\tau) < v) f(d\tau, v)\, dv \times$$
$$\times \mathbf{1}(X(t) < X(0)) +$$

$$+ \int_{X(0)}^{X(t)} f(M^{-1}(v), v)\, dv\, \mathbf{1}(X(t) > X(0)) +$$

$$+ \int_{X(0)}^{X(t)} \int_{M^{-1}(v)}^{t} \mathbf{1}(X(\tau) < v) f(d\tau, v)\, dv \times$$
$$\times \mathbf{1}(X(t) > X(0)) -$$

$$- \int_{X(0)}^{M(t)} \int_{M^{-1}(v)}^{t} \mathbf{1}(X(\tau) > v) f(d\tau, v)\, dv \times$$
$$\times \mathbf{1}(X(t) \leqslant X(0)) -$$

$$- \int_{X(t)}^{M(t)} \int_{M^{-1}(v)}^{t} \mathbf{1}(X(\tau) > v) f(d\tau, v)\, dv \times$$
$$\times \mathbf{1}(X(t) > X(0)). \quad (1.1)$$

2) *Если функции* $X(s)$, $f_1(s,u)$ *и* $X(s)$, $f_2(s,u)$ *удовлетворяют условию* (S) *на* $[0,t]$ *и* $f_1(s, X(s)) = f_2(s, X(s))$, $s \in [0,t]$, *то*

$$\int_0^t f_1(s, X(s)) * dX(s) = \int_0^t f_2(s, X(s)) * dX(s).$$

Доказательство.

1) Обозначим через $S_t^{(n)}(f, X)$ интегральную сумму, соответствующую симметричному интегралу $\int_0^t f(s, X(s)) * dX(s)$. Тогда, в силу существования локального времени [10] у ломаной $X^{(n)}(s)$, величина $S_t^{(n)}(f, X)$ равна

$$\int_0^t f(s, X^{(n)}(s))(X^{(n)})'(s)\, ds =$$

$$= \left(\int_{m(t)}^{X(0)} + \int_{X(0)}^{M(t)} \right) \int_0^t f(s, v) \operatorname{sgn}((X^{(n)})'(s)) \times$$
$$\times N^{(n)}(ds, v)\, dv = J_1^{(n)} + J_2^{(n)}, \quad (1.2)$$

где $N^{(n)}(s,v)$ — индикатриса Банаха функции $X^{(n)}(\tau)$ на отрезке $[0,s]$.

Ниже анализируется слагаемое $J_1^{(n)}$; выражение $J_2^{(n)}$ исследуется аналогично. Мы выделим случай, когда $X(t)\neq X(0)$; для случая $X(t)=X(0)$ рассуждения переносятся тривиальным образом.

Заметим, что так как

$$f(s,v)=f(m^{-1}(v),v)+\int\limits_{m^{-1}(v)}^{s} f(d\tau,v),$$

если $m^{-1}(v)\leqslant s\leqslant t$, и

$$f(s,v)=f(m^{-1}(v),v)-\int\limits_{s}^{m^{-1}(v)} f(d\tau,v),$$

если $0\leqslant s\leqslant m^{-1}(v)$, то

$$\begin{aligned}J_1^{(n)}&=\int\limits_{m(t)}^{X(0)} f(m^{-1}(v),v)\times\\&\times\int\limits_0^t \operatorname{sgn}((X^{(n)})'(s))N^{(n)}(ds,v)\,dv+\\&+\int\limits_{m(t)}^{X(0)}\int\limits_{m^{-1}(v)}^{t}\int\limits_{m^{-1}(v)}^{s} f(d\tau,v)\times\\&\times\operatorname{sgn}((X^{(n)})'(s))N^{(n)}(ds,v)\,dv-\\&-\int\limits_{m(t)}^{X(0)}\int\limits_{0}^{m^{-1}(v)}\int\limits_{s}^{m^{-1}(v)} f(d\tau,v)\times\\&\times\operatorname{sgn}((X^{(n)})'(s))N^{(n)}(ds,v)\,dv.\end{aligned}$$

Заметим, что множество

$$\left\{v:\int\limits_0^t \mathbf{1}\left(X^{(n)}(s)=v\right)\,ds>0\right\}$$

конечно или пусто, поэтому в дальнейшем мы будем им пренебрегать. Первое слагаемое в правой части в силу леммы 1 равно

$$\begin{aligned}&\int\limits_{m(t)}^{X(0)} f(m^{-1}(v),v)\kappa(v,X(0),X^{(n)}(t))\,dv=\\&=-\int\limits_{X^{(n)}(t)}^{X(0)} f(m^{-1}(v),v)\,dv\,\mathbf{1}(X^{(n)}(t)<X(0))=\\&=J_{11}^{(n)}.\end{aligned}$$

В оставшихся двух слагаемых поменяем местами внутренний и средний интегралы и с помощью леммы 1 вычислим внутренние интегралы, имеем

$$\begin{aligned}&\int\limits_{m(t)}^{X(0)}\int\limits_{m^{-1}(v)}^{t}\int\limits_{\tau}^{t}\operatorname{sgn}((X^{(n)})'(s))\times\\&\times N^{(n)}(ds,v)f(d\tau,v)\,dv-\\&-\int\limits_{m(t)}^{X(0)}\int\limits_{0}^{m^{-1}(v)}\int\limits_{0}^{\tau}\operatorname{sgn}((X^{(n)})'(s))\times\\&\times N^{(n)}(ds,v)f(d\tau,v)\,dv=\\&=\int\limits_{m(t)}^{X(0)}\int\limits_{m^{-1}(v)}^{t}\kappa(v,X^{(n)}(\tau),X^{(n)}(t))f(d\tau,v)\,dv-\\&-\int\limits_{m(t)}^{X(0)}\int\limits_{0}^{m^{-1}(v)}\kappa(v,X(0),X^{(n)}(\tau))f(d\tau,v)\,dv.\end{aligned}$$

Обозначим последние два слагаемых через $J_{12}^{(n)}$ и $J_{13}^{(n)}$ соответственно. Обратимся к выражению $J_{12}^{(n)}$. Заметим, что внутренний интеграл в этом выражении может быть отличен от нуля только в том случае, если $X^{(n)}(t)\wedge X^{(n)}(\tau)<X(0)$. При этом возможны следующие случаи:

1) Пусть $X^{(n)}(t)<X^{(n)}(\tau)$, тогда

$$\begin{aligned}J_{12}^{(n)}&=-\int\limits_{m(t)}^{X(0)}\int\limits_{m^{-1}(v)}^{t}\mathbf{1}(X^{(n)}(t)<v<X^{(n)}(\tau))\times\\&\times f(d\tau,v)\,dv=\\&=-\int\limits_{X^{(n)}(t)}^{X(0)}\int\limits_{m^{-1}(v)}^{t}\mathbf{1}(X^{(n)}(\tau)>v)\times\\&\times f(d\tau,v)\,dv\,\mathbf{1}(X^{(n)}(t)<X(0)).\end{aligned}$$

2) Пусть $X^{(n)}(t) > X^{(n)}(\tau)$, тогда имеем

$$J_{12}^{(n)} = \int\limits_{m(t)}^{X(0)} \int\limits_{m^{-1}(v)}^{t} \mathbf{1}(X^{(n)}(\tau) < v < X^{(n)}(t)) \times \\ \times f(d\tau, v)\, dv = \\ = \int\limits_{m(t)}^{X(0)} \int\limits_{m^{-1}(v)}^{t} \mathbf{1}(X^{(n)}(\tau) < v) \times \\ \times f(d\tau, v)\, dv\, \mathbf{1}(X^{(n)}(t) \geqslant X(0)) + \\ + \int\limits_{m(t)}^{X^{(n)}(t)} \int\limits_{m^{-1}(v)}^{t} \mathbf{1}(X^{(n)}(\tau) < v) \times \\ \times f(d\tau, v)\, dv\, \mathbf{1}(X^{(n)}(t) < X(0)).$$

Осталось рассмотреть выражение $J_{13}^{(n)}$; внутренний интеграл в этом выражении отличен от нуля, только если $X^{(n)}(\tau) < X(0)$. Следовательно,

$$J_{13}^{(n)} = \int\limits_{m(t)}^{X(0)} \int\limits_{0}^{m^{-1}(v)} \mathbf{1}(X^{(n)}(\tau) < v) f(d\tau, v)\, dv.$$

Но если $\tau < m^{-1}(v)$, то $X(\tau) \geqslant v$, значит

$$J_{13}^{(n)} = \int\limits_{m(t)}^{X(0)} \int\limits_{0}^{m^{-1}(v)} \mathbf{1}(X^{(n)}(\tau)<v<X(\tau)) f(d\tau, v)\, dv.$$

Остается перейти к пределу при $n \to \infty$ в полученных выше выражениях; для этого воспользуемся тем фактом, что в силу условия (S) при п.в. v для любых t_1, t_2, $t_1 < t_2$ справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathbf{1}(X^{(n)}(\tau) < v) f(d\tau, v) = \\ = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathbf{1}(X^{(n)}(\tau) < v, X(\tau) \neq v) f(d\tau, v) = \\ = \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathbf{1}(X(\tau) < v) f(d\tau, v).$$

В силу полученных выше формул после предельного перехода имеем

$$\lim_{n\to\infty} J_1^{(n)} = \\ = -\int\limits_{X(t)}^{X(0)} f(m^{-1}(v), v)\, dv\, \mathbf{1}(X(t) < X(0)) - \\ - \int\limits_{X(t)}^{X(0)} \int\limits_{m^{-1}(v)}^{t} \mathbf{1}(X(\tau) > v) \times \\ \times f(d\tau, v)\, dv\, \mathbf{1}(X(t) < X(0)) + \\ + \int\limits_{m(t)}^{X(0)} \int\limits_{m^{-1}(v)}^{t} \mathbf{1}(X(\tau) < v) \times \\ \times f(d\tau, v)\, dv\, \mathbf{1}(X(t) \geqslant X(0)) + \\ + \int\limits_{m(t)}^{X(t)} \int\limits_{m^{-1}(v)}^{t} \mathbf{1}(X(\tau) < v) \times \\ \times f(d\tau, v)\, dv\, \mathbf{1}(X(t) < X(0)).$$

Для выражения $J_2^{(n)}$ из формулы (1.2) справедливы с очевидными изменениями аналогичные рассуждения.

2) Заметим, что ввиду непрерывности функции $X(s)$ при каждом v множество $\{\tau : X(\tau) < v\}$ можно представить в виде не более чем счетного объединения непересекающихся интервалов $(s_v^{(k)}, t_v^{(k)})$, причем точки $s_v^{(k)}$ и $t_v^{(k)}$ лежат в множестве уровня $M_v = \{s : X(s) = v\}$. Аналогичное замечание справедливо и для множества $\{\tau : X(\tau) > v\}$.

С другой стороны, из равенства $f_1(s, X(s)) = f_2(s, X(s))$, $s \in [0, 1]$, вытекает, что при каждом v справедливо равенство $f_1(s, v) = f_2(s, v)$, $s \in M_v$, поэтому $f_1(m^{-1}(v), v) = f_2(m^{-1}(v), v)$ для всех $v \in [m(1), X(0)]$ и $f_1(M^{-1}(v), v) = f_2(M^{-1}(v), v)$ для всех $v \in [X(0), M(1)]$.

Далее, ввиду приведенных выше соображений при условии, что $X(t) > v > m(t)$, имеем

$$\int\limits_{m^{-1}(v)}^{t} \mathbf{1}(X(\tau) < v) f_1(d\tau, v) = \\ = \sum_k [f_1(t_v^{(k)}, v) - f_1(s_v^{(k)}, v)] = \\ = \sum_k [f_2(t_v^{(k)}, v) - f_2(s_v^{(k)}, v)] =$$

$$= \int_{m^{-1}(v)}^{t} \mathbf{1}(X(\tau) < v) f_2(d\tau, v).$$

Аналогичные соображения справедливы и для интегралов

$$\int_{M^{-1}(v)}^{t} \mathbf{1}(X(\tau) > v)\, f_1(d\tau, v)$$

при условии, что $X(t) < v < M(t)$. Поскольку все внутренние интегралы в формуле (1) имеют подобную структуру, то справедливо второе утверждение теоремы 1.

2. СИММЕТРИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ПОТРАЕКТОРНЫЕ АНАЛОГИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В дальнейшем всюду в этом параграфе, если не оговорено противное, фиксируется непрерывная функция $X(s)$, $s \in [0, +\infty)$. Приведем другие способы вычисления симметричного интеграла.

Теорема 2. *Пусть функции $X(s)$, $s \in [0, t]$, и $f(s, u)$, $s \in [0, t]$, $u \in R$, удовлетворяют условию (S) на $[0, t]$. Справедливы следующие утверждения:*

1) *Симметричный интеграл*

$$\int_0^t f(s, X(s)) * dX(s)$$

может быть вычислен по одной из формул:

$$\int_0^t f(s, X(s)) * dX(s) = \int_{X(0)}^{X(t)} f(0, v)\, dv + \\ + \int_{m(t)}^{M(t)} \int_0^t \kappa(v, X(\tau), X(t)) f(d\tau, v)\, dv; \quad (2.1)$$

$$\int_0^t f(s, X(s)) * dX(s) = \int_{X(0)}^{X(t)} f(t, v)\, dv - \\ - \int_{m(t)}^{M(t)} \int_0^t \kappa(v, X(0), X(\tau)) f(d\tau, v)\, dv. \quad (2.2)$$

2) *Пусть функция $X(s)$ обладает локальным временем $\alpha(t, u)$. Тогда симметричный интеграл $\int_0^t f(s, X(s)) * dX(s)$ можно вычислить по формуле*

$$\int_0^t f(s, X(s)) * dX(s) = \int_{X(0)}^{X(t)} f(\gamma(\alpha(t, v), v), v)\, dv - \\ - \int_{m(t)}^{M(t)} \int_0^{\gamma(\alpha(t,v),v)} \kappa(v, X(0), X(t \wedge \tau)) f(d\tau, v)\, dv,$$

где $\gamma(x, u) = \inf\{s : \alpha(s, u) > x\}$. (2.3)

Доказательство. 1. Пусть для простоты $t = 1$. Обозначим через $S^{(n)}(f, X)$ интегральную сумму, соответствующую симметричному интегралу $\int_0^1 f(s, X(s)) * dX(s)$. Тогда, в силу формулы (В.1), примененной к ломаной $X^{(n)}(s)$ и ее локальному времени, получим

$$S^{(n)}(f, X) = \int_{m(1)}^{M(1)} \int_0^1 f(s, v) \times \\ \times \operatorname{sgn}((X^{(n)})'(s)) N^{(n)}(ds, v)\, dv, \quad (2.4)$$

где $N^{(n)}(s, v)$ – индикатриса Банаха ломаной $X^{(n)}(\tau)$ на отрезке $[0, s]$. Так как $f(s, v) = f(0, v) + \int_0^1 \mathbf{1}(\tau \le s) f(d\tau, v)$, то внутренний интеграл в правой части равенства (2.4) можно записать в виде

$$\int_0^1 \int_\tau^1 \operatorname{sgn}((X^{(n)})'(s)) N^{(n)}(ds, v) f(d\tau, v) + \\ + f(0, v) \int_0^1 \operatorname{sgn}((X^{(n)})'(s)) N^{(n)}(ds, v).$$

В силу леммы 1 имеем

$$\int_\tau^1 \operatorname{sgn}((X^{(n)})'(s)) N^{(n)}(ds, v) = \\ = \kappa(v, X^{(n)}(\tau), X(1)), \quad \tau \geqslant 0,$$

следовательно, интегральная сумма $S^{(n)}(f,X)$ равна

$$\int\limits_{m^{(n)}(1)}^{M^{(n)}(1)}\int\limits_0^1 \kappa(v,X^{(n)}(\tau),X(1))f(d\tau,v)\,dv+$$
$$+\int\limits_{m^{(n)}(1)}^{M^{(n)}(1)} \kappa(v,X(0),X(1))f(0,v)\,dv, \quad (2.5)$$

где $m^{(n)}(1)=\min\{X^{(n)}(\tau):\tau\in[0,1]\}$, $M^{(n)}(1)=\max\{X^{(n)}(\tau):\tau\in[0,1]\}$. Второе слагаемое в правой части соотношения (2.5) равно $\int\limits_{X(0)}^{X(1)} f(0,v)\,dv$. Обратимся к первому слагаемому. Заметим, что внутренний интеграл в этом слагаемом в силу второго условия из условия (S) равен сумме интегралов:

$$\mathbf{1}(X(1)\geqslant v)\int\limits_0^1 \mathbf{1}(X^{(n)}(\tau)<v)f(d\tau,v)+$$
$$+\mathbf{1}(X(1)<v)\int\limits_0^1 \mathbf{1}(X^{(n)}(\tau)>v)f(d\tau,v).$$

Так как последовательность ломаных $X^{(n)}(\tau)$ сходится к непрерывной функции $X(\tau)$, то в силу условия (S) последнее выражение при п. в. v стремится при $n\to\infty$ к выражению

$$\mathbf{1}(X(1)\geqslant v)\int\limits_0^1 \mathbf{1}(X(\tau)<v)f(d\tau,v)+$$
$$+\mathbf{1}(X(1)<v)\int\limits_0^1 \mathbf{1}(X(\tau)>v)f(d\tau,v),$$

следовательно, ввиду теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, формула (2.1) доказана.

Доказательство формулы (2.2) аналогично с той лишь разницей, что оно опирается на соотношение $f(s,v)=f(t,v)-\int\limits_s^t f(d\tau,v)$, остальные рассуждения аналогичны приведенным выше.

2) Заметим, что $\gamma(\alpha(t,v),v)\geqslant t$, поэтому

$$f(s,v)=f(\gamma(\alpha(t,v),v),v)-\int\limits_s^{\gamma(\alpha(t,v),v)} f(d\tau,v).$$

Обозначим, как и выше, через $S_t^{(n)}(f,X)$ интегральную сумму, соответствующую симметричному интегралу $\int\limits_0^t f(s,X(s))*dX(s)$. Проведя такие же, как и выше, рассуждения, приходим к равенству

$$S_t^{(n)}(f,X)=\int\limits_{X^{(n)}(0)}^{X^{(n)}(t)} f(\gamma(\alpha(t,v),v),v)\,dv-$$
$$-\int\limits_{m(t)}^{M(t)}\int\limits_0^t\int\limits_s^{\gamma(\alpha(t,v),v)} f(d\tau,v)\times$$
$$\times\operatorname{sgn}((X^{(n)})'(s))N^{(n)}(ds,v)\,dv.$$

Второе слагаемое ввиду теоремы Фубини преобразуется следующим образом:

$$\int\limits_{m(t)}^{M(t)}\int\limits_0^{\gamma(\alpha(t,v),v)}\int\limits_0^t \mathbf{1}(s<\tau)\operatorname{sgn}((X^{(n)})'(s))\times$$
$$\times N^{(n)}(ds,v)f(d\tau,v)\,dv=$$
$$=\int\limits_{m(t)}^{M(t)}\int\limits_0^{\gamma(\alpha(t,v),v)} \kappa(v,X(0),X^{(n)}(t\wedge\tau))f(d\tau,v)\,dv.$$

Дальнейшие рассуждения повторяют рассуждения, приведенные выше.

Замечание. Пусть функция $f(s,u)$, $s\in[0,1]$, $u\in R$, имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial^2}{\partial s\partial u}f(s,u)$. Предположим, что функции $X(s)$ и $\frac{\partial}{\partial u}f(s,u)$ удовлетворяют условию (S) на $[0,1]$. Тогда справедливо равенство

$$f(t,X(t))-f(0,X(0))=$$
$$=\int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial u}f(s,X(s))*dX(s)+$$
$$+\int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial s}f(s,X(s))ds, \quad t\in[0,1]. \quad (2.6)$$

Действительно, в силу формулы (2.2) имеем

$$f(t,X(t))-f(0,X(0))=$$
$$=\int\limits_{X(0)}^{X(t)} \frac{\partial}{\partial u}f(t,u)\,du+\int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial s}f(s,X(0))\,ds=$$

$$= \int\limits_{X(0)}^{X(t)} \frac{\partial}{\partial u} f(s,u)\, du -$$

$$- \int\limits_0^t \int\limits_{X(0)}^{X(s)} \frac{\partial^2}{\partial s \partial u} f(s,u)\, du\, ds +$$

$$+ \int\limits_0^t \left[\frac{\partial}{\partial s} f(s, X(0)) + \int\limits_{X(0)}^{X(s)} \frac{\partial^2}{\partial s \partial u} f(s,u)\, du \right] ds =$$

$$= \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial u} f(s, X(s)) \, * \, dX(s) +$$

$$+ \int\limits_0^t \left[\frac{\partial}{\partial s} f(s, X(0)) + \frac{\partial}{\partial s} f(s, X(s)) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial s} f(s, X(0)) \right] ds.$$

Из соотношения (2.6), в частности, следует, что в случае, когда $X(s) = X(s, \omega)$ – стандартный винеровский процесс, а детерминированная функция $h(s,u)$ имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial}{\partial u} h(s,u)$, то *формулу Ито* можно записать в виде

$$\int\limits_0^t h(s, X(s)) * dX(s) = \int\limits_0^t h(s, X(s))\, dX(s) +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial u} h(s, X(s))\, ds, \quad (2.7)$$

где первое слагаемое в правой части равенства есть стохастический интеграл Ито.

Рассмотрим уравнение

$$\eta(t) - \eta(0) = \int\limits_0^t a(s, \eta(s)) \, * \, dX(s) +$$

$$+ \int\limits_0^t b(s, \eta(s))\, ds, \quad (2.8)$$

где первый интеграл в правой части есть симметричный интеграл по непрерывной функции $X(s)$ неограниченной вариации.

Уравнения такого вида являются детерминированными аналогами стохастических дифференциальных уравнений. С точки зрения теории случайных процессов, техника потраекторных симметричных интегралов позволяет отказаться от стандартных предположений о предсказуемости интеграндов в такого вида уравнениях и рассматривать их для произвольных непрерывных с вероятностью 1 случайных функций $X(s) = X(s, \omega)$ и случайных коэффициентов $a(s, \eta)$ и $b(s, \eta)$.

Решением уравнения (2.8) будем называть любую функцию вида $\eta(s) = \phi(s, X(s))$, для которой имеют смысл интегралы в правой части уравнения (2.8) и которое обращает это уравнение в тождество.

В дальнейшем предполагается, если не оговорено противное, что *все рассматриваемые ниже функции имеют столько, сколько необходимо, непрерывных частных производных.*

Покажем, что метод вычисления симметричного интеграла, приведенный в теореме 2, и формула (2.6) позволяют при определенных условиях гладкости коэффициентов уравнения свести решение уравнения (2.8) к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Действительно, предположим, что решение $\eta(s) = \phi(s, X(s))$ уравнения (2.8) с достаточно гладкой функцией $\phi(s,u)$ существует, и при этом предположении вычислим согласно формуле (2.6) симметричный интеграл в правой части уравнения (2.8):

$$\int\limits_0^t a(s, \phi(s, X(s))) \, * \, dX(s) =$$

$$= \int\limits_{X(0)}^{X(t)} a(t, \phi(t,u))\, du -$$

$$- \int\limits_0^t \int\limits_{X(0)}^{X(s)} [a(s, \phi(s,u))]'_s\, du\, ds =$$

$$= \int\limits_{X(0)}^{X(t)} a(t, \phi(t,u))\, du -$$

$$- \int\limits_0^t \int\limits_{X(0)}^{X(s)} [a'_s(s, \phi(s,u)) +$$

$$+ a'_\phi(s, \phi(s,u)) \phi'_s(s,u)]\, du\, ds. \quad (2.9)$$

Левую часть уравнения (2.8) мы можем записать в виде

$$\eta(t) - \eta(0) = [\phi(t, X(t)) - \phi(t, X(0)] +$$

$$+ [\phi(t, X(0)) - \phi(0, X(0)] =$$

$$= \int\limits_{X(0)}^{X(t)} \phi'_u(t,u)\,du + \int\limits_0^t \phi'_s(s, X(0))\,ds. \quad (2.10)$$

Подставив соотношения (2.9) и (2.10) в уравнение (2.8), получим

$$\int\limits_{X(0)}^{X(t)} \phi'_u(t,u)\,du + \int\limits_0^t \phi'_s(s, X(0))\,ds =$$

$$= \int\limits_{X(0)}^{X(t)} a(t, \phi(t,u))\,du -$$

$$- \int\limits_0^t \int\limits_{X(0)}^{X(s)} [a(s, \phi(s,u))]'_s\,du\,ds +$$

$$+ \int\limits_0^t b(s, \eta(s))\,ds,$$

или

$$\int\limits_{X(0)}^{X(t)} [\phi'_u(t,u) - a(t, \phi(t,u))]\,du =$$

$$= \int\limits_0^t \{b(s, \phi(s, X(s))) -$$

$$- \int\limits_{X(0)}^{X(s)} [a(s, \phi(s,u))]'_s\,du - \phi'_s(s, X(0))\}\,ds.$$

$$(2.11)$$

Заметим, что правая часть равенства (2.11) является функцией ограниченной вариации, в то время как левая — нет. Следовательно, мы можем приравнять интегранды в обеих частях равенства (2.11) к нулю, получим систему

$$\begin{cases} \phi'_u(s,u) = a(s, \phi(s,u)), \\ \phi'_s(s, X(0)) = b(s, \phi(s, X(s))) - \\ \qquad - \int\limits_{X(0)}^{X(s)} [a(s, \phi(s,u))]'_s\,du. \end{cases}$$

Нам также необходимо начальное условие $\phi(0, X(0)) = \eta(0)$.

Заметим, что, воспользовавшись первым уравнением системы, второе слагаемое из правой части второго уравнения можно преобразовать следующим образом:

$$\int\limits_{X(0)}^{X(s)} [a(s, \phi(s,u))]'_s\,du = \int\limits_{X(0)}^{X(s)} \phi''_{su}(s,u)\,du =$$

$$= \phi'_s(s, X(s)) - \phi'_s(s, X(0)).$$

Следовательно, система уравнений примет вид

$$\begin{cases} \phi'_u(s,u) = a(s, \phi(s,u)), \\ \phi'_s(s, X(s)) = b(s, \phi(s, X(s))), \\ \quad \phi(0, X(0)) = \eta(0). \end{cases} \quad (2.12)$$

Таким образом, мы доказали следующий результат.

Теорема 3. *Предположим, что непрерывная функция $X(s)$ на любом отрезке $[0,t]$ имеет неограниченную вариацию, а функция $a(s,\phi)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка. Пусть функция $\phi = \phi(s,u)$ есть решение системы уравнений (2.12), тогда функция $\eta(s) = \phi(s, X(s))$ является решением уравнения (2.8). Обратно, если существует гладкое решение уравнения (2.8) вида $\eta(s) = \phi(s, X(s))$, то функция $\phi = \phi(s,u)$ удовлетворяет системе уравнений (2.12).*

Замечание. В случае негладких решений $\eta(s) = \phi(s, X(s))$ уравнения (2.8) с помощью формулы (2.2) и соотношений (2.9) и (2.10) можно вывести интегральный вариант системы уравнений (2.12).

Далее, решая первое уравнение системы в предположении, что оно существует, получим

$$\int \frac{d\phi}{a(s,\phi)} = u + C(s), \quad (2.13)$$

где $C(s)$ — произвольная постоянная, зависящая от переменной s. Заметим, что решение (2.13) первого уравнения системы определяет неявную функцию $\phi = \phi(s,u)$, которую можно также записать в виде $\phi = \phi^*(s, C(s), u)$.

Чтобы найти неизвестную функцию $C(s)$, воспользуемся вторым уравнением системы (2.12). Для этого при каждом фиксированном $u \in R$ положим

$$\Phi(s,\phi) = \Phi(s,\phi,u) = \int \frac{d\phi}{a(s,\phi)} - u - C(s) = 0.$$

По теореме о производной неявной функции имеем

$$\phi'_s(s,u) = -\frac{\Phi'_s(s,u)}{\Phi'_\phi(s,u)},$$

$$\Phi'_s(s,u) = \left(\int \frac{d\phi}{a(s,\phi)}\right)'_s - C'_s(s),$$

$$\Phi'_\phi(s,\phi) = \frac{1}{a(s,\phi)},$$

следовательно,

$$\phi'_s(s,u) = a(s,\phi)\left[C'_s(s) - \left(\int \frac{d\phi}{a(s,\phi)}\right)'_s\right].$$

Подставляя найденную производную во второе уравнение системы, получим

$$C'(s) = \frac{b(s,\phi^*(s,C(s),X(s)))}{a(s,\phi^*(s,C(s),X(s)))} - \\ - \left(\int \frac{d\phi}{a(s,\phi)}\right)'_s\Bigg|_{\phi=\phi^*(s,C(s),X(s))}, \quad (2.14)$$

$$\phi^*(0,C(0),X(0)) = \eta(0).$$

Предложенный выше метод может быть применим и к другим классам уравнений.

1. Рассмотрим уравнение

$$\eta(t) - \eta(0) = \int_0^t a(s,X(s),\eta(s)) * dX(s) + \\ + \int_0^t b(s,X(s),\eta(s))\,ds,$$

которое может быть решено аналогичным образом, при этом мы получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \phi'_u(s,u) = a(s,u,\phi(s,u)), \\ \phi'_s(s,X(s)) = b(s,X(s),\phi(s,X(s))). \end{cases} \quad (2.15)$$

Первое уравнение системы уже не является уравнением с разделяющимися переменными, но его решение $\phi = \phi^*(s,C(s),u)$, если оно существует, содержит неизвестную функцию $C(s)$, которую можно найти с помощью второго уравнения системы (2.15) и начального условия $\phi^*(0,C(0),X(0)) = \eta(0)$.

2. Рассмотрим уравнение вида

$$\eta(t) - \eta(0) = \\ = \int_0^t a(s,X(s),\eta(s)-A(s)) * dX(s) + \\ + \int_0^t b(s,X(s),\eta(s)-A(s))\,ds + \\ + A(t) - A(0), \quad (2.16)$$

где $A(s)$ — известная функция. Заметим, что уравнение (2.16) эквивалентно уравнению, рассмотренному в предыдущем пункте, в случае, когда $A(s)$ — непрерывная справа функция ограниченной вариации, в противном случае это, вообще говоря, не так. Будем искать решение уравнения (2.16) в виде $\eta(s) = \phi(s,X(s)) + A(s)$, где $\phi(s,u)$ — достаточно гладкая функция. Тогда аналогичные рассуждения приводят к системе уравнений (2.15).

3. Напомним, следуя А. В. *Скороходу*, что если задана непрерывная функция $\eta(s)$, $s \in [0,T]$, $\eta(0) \geqslant 0$, то [8. С. 116–118] пара функций $(Z(s),Y(s))$, $s \in [0,T]$, где $Y(s) = -\min\{\eta(\tau) \wedge 0 : \tau \in [0,s]\}$, а $Z(s) = \eta(s) + Y(s)$, называется решением задачи отражения для функции $\eta(s)$, а функция $Z(s)$ — отраженной функцией. Пусть $\eta(s) = \phi(s,X(s))$ есть решение уравнения

$$\eta(t) - \eta(0) = \int_0^t a(s,X(s),\eta(s)) * dX(s) + \\ + \int_0^t b(s,X(s),\eta(s))\,ds. \quad (2.17)$$

Положим $A(s) = -\min\{\eta(\tau) \wedge 0 : \tau \in [0,s]\}$, тогда решение уравнения

$$\eta^*(t) - \eta(0) = \\ = \int_0^t a(s,X(s),\eta^*(s)-A(s)) * dX(s) + \\ + \int_0^t b(s,X(s),\eta^*(s)-A(s))\,ds + A(t) - A(0),$$

где коэффициенты $a(s,y)$ и $b(s,y)$ такие же, как в уравнении (2.17), доставляет нам «отраженную в нуле» функцию $Z(s)$.

4. Пусть $X(s) = X(s,\omega)$, $s \in [0,+\infty)$, — стандартный винеровский процесс.

рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$\eta(t)-\eta(0)=\int\limits_0^t a(s,X(s),\eta(s))\,dX(s)+ \\ +\int\limits_0^t b^*(s,X(s),\eta(s))\,ds, \quad (2.18)$$

где первый интеграл в правой части есть стохастический интеграл Ито. Предполагается, что коэффициенты $a(s,u,\phi)$ и $b^*(s,u,\phi)$ предсказуемы и удовлетворяют стандартным условиям существования соответствующих интегралов в правой части уравнения. Будем, следуя принятой идеологии, искать решение в виде $\eta(s)=\phi(s,X(s))$. Согласно формуле (2.7) имеем

$$\int\limits_0^t a(s,X(s),\phi(s,X(s)))\,dX(s)= \\ =\int\limits_0^t a(s,X(s),\phi(s,X(s)))\,*\,dX(s)- \\ -\int\limits_0^t a^*(s,X(s),\phi(s,X(s)))\,ds,$$

где

$$a^*(s,u,\phi)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u}a(s,u,\phi)+ \\ +\frac{\partial}{\partial\phi}a(s,u,\phi)\frac{\partial}{\partial u}\phi(s,u)\right]. \quad (2.19)$$

Тогда уравнение (2.18) эквивалентно уравнению

$$\eta(t)-\eta(0)=\int\limits_0^t a(s,X(s),\eta(s))\,*\,dX(s)+ \\ +\int\limits_0^t b(s,X(s),\eta(s))\,ds,$$

где

$$b(s,X(s),\phi(s,X(s)))= \\ =b^*(s,X(s),\phi(s,X(s)))- \\ -a^*(s,X(s),\phi(s,X(s))). \quad (2.20)$$

Решение последнего уравнения сводится к решению системы уравнений (2.15). Заметим, что если воспользоваться первым уравнением этой системы, то

$$b(s,u,\phi)=b^*(s,u,\phi)- \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}a(s,u,\phi)-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\phi}a^2(s,\phi). \quad (2.21)$$

Наконец, в силу соотношений (2.15) и (2.19) из формулы (2.20) следует, что решение $\phi=\phi(s,u)$ стохастического дифференциального уравнения (2.18) удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial}{\partial s}\phi(s,X(s))= \\ =b^*(s,X(s),\phi(s,X(s)))-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\phi(s,X(s)).$$

Для иллюстрации рассмотренных выше методов приведем следующий пример.

Пример. *Бесселевские диффузии* [1. С. 226–228]. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$d\eta(s)=2(\eta(s)\vee 0)^{\frac{1}{2}}\,dX(s)+\alpha\,ds, \\ \eta(0)=x^2, \quad (2.22)$$

где первый интеграл в правой части уравнения есть стохастический интеграл Ито по винеровскому процессу $X(s)$, $X(0)=0$. Решение данного уравнения доставляет квадрат бесселевского процесса. Поскольку в силу преобразования (2.21) получим $b(s,X(s),\eta(s))=\alpha-\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta(s)\vee 0)$, то система (2.15), отвечающая уравнению (2.22), имеет вид

$$\begin{cases} \phi'_u(s,u)=2(\phi(s,u)\vee 0)^{\frac{1}{2}}, \\ \phi'_s(s,X(s))=\alpha-(\phi(s,u)\vee 0)'_\phi, \\ \phi(0,X(0))=x^2. \end{cases}$$

Будем искать неотрицательные решения уравнения (2.22), в этом случае из первого уравнения системы выводим: $\int\phi^{-\frac{1}{2}}d\phi=2u+2C(s)$ или $\phi=(u+C(s))^2$. Следовательно, бесселевский процесс $B(s)$ имеет следующую структуру: $B(s)=|X(s)+C(s)|$, где неизвестная гладкая функция $C(s)$ определяется из второго уравнения системы

$$C'(s)=\frac{\alpha-1}{2(X(s)+C(s))}, \quad C^2(0)=x^2.$$

В случае $\alpha=1$, $x=0$ имеем $\phi(s,X(s))=X^2(s)$.

Таким образом, основным результатом данной статьи можно считать тот факт, что методами теории функций оказалось возможным построить некоторый детерминированный аналог стохастического исчисления Стратоновича; естественно, это «параллельное» исчисление не может охватить всю красоту стохастического исчисления, однако оно показывает, что часть результатов, ранее справедливых в рамках теории мартингалов, имеет более общую природу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ватанабе С., Икеда Н.** Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.:, Наука, 1986. 448 с.
2. **Дьячков А. М.** О существовании интеграла Стилтьеса // ДАН. 1996. Т. 350, № 2. С. 156–161.
3. **Мацаев В. И., Соломяк М. З.** Об условиях существовании интеграла Стильтьеса // Матем. сб. 1972. Т. 88, № 4. С. 522–535.
4. **Натансон И. П.** Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 440 с.
5. **Насыров Ф. С.** О локальных временах для функций и случайных процессов 1 // Теория вероятн. и ее примен. 1995. Т. 40, № 4. С. 798–812.
6. **Насыров Ф. С.** Симметричные интегралы и их применение в финансовой математике // Тр. МИАН. 2002. Т. 237. С. 265–278.
7. **Терехин А. П.** Приближение функций ограниченной p-вариации // Изв. вузов. 1965. Т. 2 (45). С. 171–187.
8. **Чжун К., Уильямс Р.** Введение в стохастическое интегрирование. М.: Мир, 1987. 152 с.
9. **Berman S. M.** Nonincrease almost everywhere of certain measurable function with applications to stochastic processes // Proc. Amer. Math. Soc. 1983. V. 88, No 1. P. 141–144.
10. **Geman D., Horowitz J.** Occupation densities // Ann. Prob. 1980. V. 8. P. 1–67.
11. **Kondurar V.** Sur l'integrale de Stieltjes // Recueil Math. 1937. V. 2. P. 381–366.
12. **Young L. C.** An inequality of the Holder type, connected with Stjieltjes integration // Acta. Mathem. 1936. V. 67. P. 251–282.

ОБ АВТОРЕ

Насыров Фарит Сагитович, профессор кафедры математики УГАТУ. Дипл. математик (ЛГУ, 1976). Д-р физ.-мат. наук по теории вероятностей и математической статистике и по математическому анализу (защ. в ИМ им. Соболева, Новосибирск, 2002). Исследования в области теории случайных процессов, теории функций, финансовой математики.