1) $u(x) \sim \frac{\beta}{2x}$, $x \to +\infty$,

$$1 + s_2 s_3 = e^{2i\pi\beta},$$
$$s_2 + s_4 e^{2i\pi\beta} = \frac{\sqrt{2\pi}\, 2^\beta\, \tau^{\beta/2}}{\sqrt{\beta}\,\Gamma(\beta)},$$
$$s_3 + s_1 e^{2i\pi\beta} = -\frac{i\sqrt{2\pi}\,\tau^{-\beta/2}\, e^{i\pi\beta}}{2^\beta \sqrt{\beta}\,\Gamma(-\beta)},$$

2) $u(x) \sim -\frac{\beta}{2x}$, $x \to +\infty$,

$$s_1 s_2 = s_2 s_3 = 0, \quad s_1 + s_3 = 0, \quad \beta \in \mathbb{Z},$$

3) $u(x) \sim -2x$, $x \to +\infty$,

$$s_1 s_2 = s_2 s_3 = 0, \quad s_1 + s_3 = 0, \quad \beta \in \mathbb{Z}.$$

Аналогичные вычисления в случае $x \to -\infty$ дают следующие выражения для данных монодромии:

1) $u(x) \sim \frac{\beta}{2x}$, $x \to +\infty$,

$$1 + s_1 s_4 = e^{-2i\pi\beta},$$
$$s_2 - s_4 = -\frac{\sqrt{2\pi}\, 2^\beta\, \tau^{\beta/2}}{\sqrt{\beta}\,\Gamma(\beta)},$$
$$s_1 - s_3 = \frac{i\sqrt{2\pi}\,\tau^{-\beta/2}\, e^{-i\pi\beta}}{2^\beta \sqrt{\beta}\,\Gamma(-\beta)},$$

2) $u(x) \sim -\frac{\beta}{2x}$, $x \to -\infty$,

$$s_1 s_4 = s_3 s_4 = 0, \quad s_3 - s_1 e^{2i\pi\beta} = 0, \quad \beta \in \mathbb{Z},$$

3) $u(x) \sim -2x$, $x \to -\infty$,

$$s_1 s_4 = s_3 s_4 = 0, \quad s_3 - s_1 e^{2i\pi\beta} = 0, \quad \beta \in \mathbb{Z}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вазов В.** Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968.
2. **Федорюк М. В.** Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
3. **Jimbo M., Miwa T., Ueno K.** Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients // Physica D (1981). V. 2. P. 306–352, 407–448; V. 4. P. 26–46.
4. **Its A. R., Novokshenov V. Yu.** The isomonodromic deformation method in the theory of Painlevé equations // Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1986. V. 1191.
5. **Белогрудов А. Н.** Формулы связи для асимптотик решений четвертого уравнения Пенлеве. Вырожденные случаи. I // Проблемы математики и теории управления / Ред. Б. Г. Ильясов и И. И. Голичев. Уфа: УГАТУ, 1998. С. 17–32.

ОБ АВТОРЕ

Белогрудов Александр Николаевич, ст. преподаватель кафедры специальных глав математики УГАТУ. Дипл. математик (БГУ, 1999). Исследования в области нелинейных дифференциальных уравнений.

УДК 517.5

Г. З. МУХАМЕТОВА

ЛОКАЛЬНЫЕ ВРЕМЕНА И ЗАДАЧА ВОЗМУЩЕНИЯ

Показано, что если имеется вещественнозначная борелевская функция, обладающая локальным временем, совместно непрерывным по двум переменным, то возмущенная функция, состоящая из суммы исходной функции и гладкой строго монотонной функции, тоже обладает локальным временем. *Недифференцируемая функция; локальное время; задача возмущения*

Пусть $X(s)$, $s \in [0, 1]$, — вещественнозначная борелевская функция. Ниже удобно интерпретировать переменную s как время. Для любого множества A через $\mathbf{1}(A)$ будем обозначать индикатор множества A, т. е. функцию, равную 1 на A и 0 вне A; далее всюду $a \wedge b = \min(a, b)$. Введем величины

$$\nu_t(\Gamma) = \int_0^t \mathbf{1}(X(s) \in \Gamma)ds, \;\; t \in [0, 1], \;\; \Gamma \in B(R),$$

которые можно рассматривать как количество времени, проводимое функцией $X(s)$, $s \in [0, 1]$, в множестве Γ. При каждом фиксированном t функция множества $\nu_t(\Gamma)$, $\Gamma \in B(R)$, является мерой, значит, функция $\nu_t(u) = \nu_t((-\infty, u])$, $u \in R$, будет неубывающей функцией. Подчеркнем тот факт, что несмотря на то, что исходная функция $X(s)$ может не иметь производной, время пребывания $\nu_t(u)$ при почти всех (п. в.) u ее имеет.

Определение. Если при каждом t мера $\nu_t(.)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $\lambda(.)$, то производная Радона–Никодима $\alpha_t(u) = \alpha(t, u) = \frac{d\nu_t}{d\lambda}(u)$ называется *локальным временем* функции $X(s)$.

Положим $\alpha(t, u) = \alpha([0, t], u)$.

Таким образом, локальное время $\alpha(t, u)$, если оно существует, при каждом фиксированном t есть плотность времени пребывания. Это означает, что при каждом $\Gamma \in B(R)$ справедливо равенство

$$\nu_t(\Gamma) = \int_\Gamma \alpha(t,u)\,du.$$

Так как функция $\alpha(t,u)$ при каждом t определяется с точностью до множества нулевой лебеговой меры, то естественным является вопрос о выборе «хорошего» варианта (версии) локального времени. Оказывается, можно всегда считать, что локальное время измеримо как функция двух переменных и является при каждом u неубывающей непрерывной справа функцией по t; меру на σ-алгебре борелевских множеств отрезка [0,1], которую она порождает, мы будем обозначать $\alpha(ds,u)$.

Из определения локального времени следует [1], что для любой ограниченной (или знакопостоянной) борелевской функции $f(s,u)$ справедливо равенство

$$\int_0^t f(s,X(s))\,ds = \int_R\int_0^t f(s,u)\alpha(ds,u)\,du. \quad (1)$$

Задача возмущения была впервые поставлена в работе [1]. Она состоит в следующем. Пусть $X(t)$, $t\in[0,1]$, — вещественнозначная, борелевская функция, которая обладает «хорошим» ядром пребывания $\alpha(dt,x)$. Возьмем достаточно гладкую функцию $Z(t)$. Надо определить, будет ли сумма $X(t)+Z(t)$ обладать локальным временем. Решить эту задачу Геману и Горовицу [2] удалось только в случае, когда $Z(t)$ непрерывно дифференцируема и $X(t)$ обладает совместно непрерывным локальным временем $\alpha_t(x)$, таким, что отображение $x\to\alpha_t(x)$ является абсолютно непрерывным для каждого t, и $\alpha'_t(x)=\frac{\partial\alpha_t(x)}{\partial x}$ интегрируема на $[0,1]\times R$.

Решение задачи возмущения для случайного процесса броуновского движения $X_t = X(t,\omega)$ приведено в работе Мейера [3]: пусть Z_t — случайный процесс, согласованный с σ-алгебрами броуновского движения X_t, у которого почти все траектории являются функциями ограниченной вариации, тогда процесс X_t+Z_t обладает локальным временем; однако в данной работе используется сложная техника стохастического интегрирования. В настоящей работе решена задача возмущения в более общей постановке.

Теорема. *Пусть $X(t)$, $t\in[0,1]$, — вещественнозначная измеримая функция, обладающая локальным временем $\alpha(t,u)$, совместно непрерывным по двум переменным, $Z(t)$ – гладкая, строго монотонно возрастающая функция, тогда $X(t)+Z(t)$, $t\in[0,1]$, обладает локальным временем.*

Доказательство. В силу формулы (1) для любого a имеем

$$I\equiv\int_0^t \mathbf{1}(X(s)+Z(s)\le a)\,ds = \\ = \int_R\int_0^t \mathbf{1}(u+Z(s)\le a, s\le t)\alpha(ds,u)\,du.$$

Сделаем во внутреннем интеграле замену переменных: $\alpha(s,u)=q$, $dq=\alpha(ds,u)$, $s=\alpha_u^{-1}(q)= = \inf\{s:\alpha(s,u)>q\}$ – момент первого выхода локального времени $\alpha(s,u)$ за уровень q, тогда правая часть последнего равенство равна

$$\int_R\int_0^{\alpha(t,u)} \mathbf{1}(u+Z(\alpha_u^{-1}(q))\le a, \alpha_u^{-1}(q)\le t)\,dq\,du = \\ = \int_R\int_0^\infty \mathbf{1}(Z(\alpha_u^{-1}(q))\le a-u, \alpha_u^{-1}(q)\le t)\,dq\,du = \\ = \int_R\int_0^\infty \mathbf{1}(\alpha_u^{-1}(q)\le Z^{-1}(a-u)\wedge t)\,dq\,du,$$

где $Z^{-1}(u)=\inf\{t: Z(t)>u\}$.

Докажем соотношение

$$\int_0^\infty \mathbf{1}\left(\alpha_u^{-1}(q)\le Z^{-1}(a-u)\wedge t\right)dq = \\ = \lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^\infty\int_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon}\mathbf{1}\left(\alpha_u^{-1}(q)\le Z^{-1}(a-v)\wedge t\right)dv\,dq,$$

при п. в. u. (2)

Действительно, в силу теоремы Фубини, правую часть этого равенства можно представить в виде

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon}\int_0^\infty \mathbf{1}(\alpha_u^{-1}(q)\le Z^{-1}(a-v)\wedge t)\,dq\,dv.$$

Внутренний интеграл в последнем выражении равен

$$\int_0^\infty \mathbf{1}(\alpha(Z^{-1}(a-v)\wedge t,u)>q)dq = \alpha(Z^{-1}(a-v)\wedge t,u).$$

Поскольку локальное время $\alpha(t,u)$ непрерывно по t при всех u и функция $Z^{-1}(a-v)$ непрерывна по v, то функция $\alpha(Z^{-1}(a-v)\wedge t,u)$ непрерывна по v при всех u. Тогда справедливость равенства (2) вытекает из теоремы Лебега о дифференцировании интегралов в случае, когда интегранд представляет собой непрерывную функцию.

Итак, исходный интеграл можно представить в виде

$$I=\int_R\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\varepsilon}\times \\ \times\int_0^\infty\int_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon}\mathbf{1}(\alpha_u^{-1}(q)\le Z^{-1}(a-v)\wedge t)\,dv\,dq\,du.$$

Так как

$$\left|\int_0^\infty \mathbf{1}(\alpha_u^{-1}(q)\le Z^{-1}(a-v)\wedge t)dq\right|\le\alpha(t,u),$$

то

$$\left|\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_R\int\limits_0^\infty\int\limits_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon}\mathbf{1}(\alpha_u^{-1}(q)\le Z^{-1}(a-v)\wedge t)dv\,dq\,du\right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_R \int\limits_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} \int\limits_0^{\infty} \mathbf{1}(\alpha_u^{-1}(q) \le Z^{-1}(a-v) \wedge t)\, dq\, dv\, du \right| \le$$

$$\le \left| \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_R \int\limits_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} \alpha(t,u) dv\, du \right| \le \left| \int\limits_R \alpha(t,u) du \right| = t < \infty.$$

Поэтому в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла и теоремы Фубини наш интеграл можно записать в виде

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_R \int\limits_0^{\infty} \int\limits_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} \mathbf{1}(\alpha_u^{-1}(q) \le Z^{-1}(a-v) \wedge t)\, dv\, dq\, du =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_0^{\infty} \int\limits_R \int\limits_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} \mathbf{1}(\alpha_u^{-1}(q) \le Z^{-1}(a-v) \wedge t) dv\, du\, dq.$$

Заметим, что неравенство $u-\varepsilon < v < u+\varepsilon$ равносильно неравенству $|u-v| < \varepsilon$, откуда $v-\varepsilon < u < v+\varepsilon$; тогда ввиду теоремы Фубини наш интеграл примет вид

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_0^{\infty} \int\limits_R \int\limits_{v-\varepsilon}^{v+\varepsilon} \mathbf{1}(\alpha_u^{-1}(q) \le Z^{-1}(a-v) \wedge t) du\, dv\, dq.$$

Если $\alpha_u^{-1}(q) \le Z^{-1}(a-v) \wedge t$, то $\alpha(Z^{-1}(a-v) \wedge t, u) \ge q$, поэтому

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_0^{\infty} \int\limits_R \int\limits_{v-\varepsilon}^{v+\varepsilon} \mathbf{1}(\alpha(Z^{-1}(a-v) \wedge t, u) > q) du\, dv\, dq.$$

Следовательно, в силу формулы (1)

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_R \int\limits_0^{\infty} \int\limits_{v-\varepsilon}^{v+\varepsilon} \mathbf{1}(\alpha(Z^{-1}(a-v) \wedge t, u) > q) du\, dq\, dv =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_R \int\limits_0^{Z^{-1}(a-v)\wedge t} \mathbf{1}(X(s) \in (v-\varepsilon, v+\varepsilon)) ds\, dv.$$

Таким образом,

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_R \int\limits_0^{Z^{-1}(a-v)} \mathbf{1}(X(s) \in (v-\varepsilon, v+\varepsilon)) \mathbf{1}(s < t) ds\, dv.$$

Сделаем замену переменных во внутреннем интеграле: $s = Z^{-1}(\tau)$, $ds = (Z^{-1}(\tau))' d\tau$, тогда он примет следующий вид:

$$\int\limits_0^{a-v} \mathbf{1}(X(Z^{-1}(\tau)) \in (v-\varepsilon, v+\varepsilon)) \mathbf{1}(Z^{-1}(\tau) < t) (Z^{-1}(\tau))' d\tau.$$

Теперь сделаем еще одну замену переменных в последнем выражении: $p = \tau + v$, $dp = d\tau$, тогда

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_R \int\limits_{-\infty}^{a} \mathbf{1}(X(Z^{-1}(p-v)) \in (v-\varepsilon, v+\varepsilon)) \times$$
$$\times \mathbf{1}(0 < Z^{-1}(p-v) < t) (Z^{-1}(p-v))'_p\, dp\, dv =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{-\infty}^{a} \int\limits_R \mathbf{1}(X(Z^{-1}(p-v)) \in (v-\varepsilon, v+\varepsilon)) \times$$
$$\times \mathbf{1}(0 < Z^{-1}(p-v) < t) (Z^{-1}(p-v))'_p\, dv\, dp.$$

Следовательно,

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \times$$
$$\times \int\limits_{-\infty}^{a} \int\limits_{p-Z(t)}^{p-Z(0)} \mathbf{1}(X(Z^{-1}(p-v)) \in (v-\varepsilon, v+\varepsilon)) \times$$
$$\times (Z^{-1}(p-v))'_p\, dv\, dp.$$

Поскольку

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \mathbf{1}(X(Z^{-1}(a-s)) \le x) (Z^{-1}(a-s))'_a\, ds =$$

$$= \int\limits_{Z^{-1}(a-t_2)}^{Z^{-1}(a-t_1)} \mathbf{1}(X(\tau) \le x)\, d\tau =$$

$$= \int\limits_R \int\limits_{Z^{-1}(a-t_2)}^{Z^{-1}(a-t_1)} \mathbf{1}(u \le x) \alpha(d\tau, u)\, du =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{x} \alpha([Z^{-1}(a-t_2), Z^{-1}(a-t_1)], u)\, du,$$

то, если существует локальное время для функции $X(s)$, равное $\alpha(t,u)$, это означает, что всегда существует локальное время сдвинутой сложной функции $X(Z^{-1}(a-s))$, которое мы обозначим через $\alpha_{a,Z}(t,u)$. Кроме того, выполняется следующее соотношение:

$$\alpha_{a,Z}([t_1,t_2],x) = \alpha([Z^{-1}(a-t_2), Z^{-1}(a-t_1)], x). \tag{3}$$

Таким образом, имеем

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{-\infty}^{a} \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{v-\varepsilon}^{v+\varepsilon} \alpha_{p,Z}([p-Z(t), p-Z(0)], u)\, du\, dp.$$

Если $\alpha(t,u)$ совместно непрерывно по двум переменным, то локальное время $\alpha_{a,Z}(t,u)$ для сдвинутой сложной функции тоже совместно непрерывно по двум переменным при всех a, в силу соотношения (3). Следовательно, предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{v-\varepsilon}^{v+\varepsilon} \alpha_{p,Z}([p-Z(t), p-Z(0)], u) du$$

всегда существует, ввиду непрерывности по u подынтегральной функции. Поскольку $\alpha(t,u) \le \alpha(1,u)$, то

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{v-\varepsilon}^{v+\varepsilon} \alpha_{p,Z}([p-Z(t),p-Z(0)],u)\,du =$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{v-\varepsilon}^{v+\varepsilon} \alpha([0,t],u)\,du \le \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{v-\varepsilon}^{v+\varepsilon} \alpha(1,u)\,du \equiv \alpha_\varepsilon(1,v).$$

Так как

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_R \alpha_\varepsilon(1,v)\,dv = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_R\int\limits_{v-\varepsilon}^{v+\varepsilon} \alpha(1,u)\,du\,dv =$$

$$= \int\limits_R \alpha(1,v)\,dv = 1 = \int\limits_R \lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_\varepsilon(1,u)\,du,$$

то ввиду положительности $\alpha_\varepsilon(1,u)$, это означает, что семейство $\alpha_\varepsilon(1,u)$ равномерно интегрируемо. Поэтому семейство

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_{v-\varepsilon}^{v+\varepsilon} \alpha_{p,Z}([p-Z(t),p-Z(0)],u)du,\ \ \varepsilon > 0,$$

тоже равномерно интегрируемо. Следовательно, мы можем внести предел под знак интеграла. Тогда

$$I = \int\limits_{-\infty}^{a} \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{p-Z(t)}^{p-Z(0)} \mathbf{1}(X(Z^{-1}(p-v)) \in (v-\varepsilon, v+\varepsilon))\times$$

$$\times\,(Z^{-1}(p-v))'_p\,dv\,dp.$$

Это означает, что функция $X(s)+Z(s)$ обладает локальным временем. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Geman D., Horowitz J.** Occupation densities // Ann. Probab. 1980. V. 8, No 1. P. 1–67.
2. **Geman D., Horowitz J.** Smooth perturbations of a function with a smooth local time // Trans. Amer. Math. Soc. V. 267, No 2. 1981. P. 517–530.
3. **Meyer P. A.** Un cours sur les intégrales stochastiques. // Sem. de Probabilitiés X, Lecture Notes in Math. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1976. V. 511.

ОБ АВТОРЕ

Мухаметова Гульнара Зуфаровна, аспирант каф. математики УГАТУ. Дипл. инж.-математик по прикладной математике (УГАТУ, 2000). Готовит диссертацию о локальных временах функций под рук. проф. Ф. С. Насырова.

УДК 517.9

И. Г. ПАРАМОШИНА

КВАЗИМЕРА В ПРОСТРАНСТВЕ C[0,1], ПОРОЖДЕННАЯ «ТЕПЛОВЫМ» УРАВНЕНИЕМ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Получено обобщение теоремы Колмогорова о непрерывности реализаций случайного процесса на случай квазимеры и показано, что квазимеру, порожденную фундаментальным решением уравнения типа теплопроводности четвертого порядка, можно построить в пространстве непрерывных функций. *Квазимера, «случайный процесс», порожденный квазимерой; непрерывность реализаций «случайного процесса», уравнения типа теплопроводности высших порядков*

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена некоторым вопросам анализа в бесконечномерных пространствах, а именно, построению квазимер в пространстве непрерывных функций $C[0,1]$. В работе получено обобщение теоремы Колмогорова о непрерывности реализаций случайного процесса на случай пространства с квазимерой и показано, что квазимеру, соответствующую «тепловому» уравнению четвертого порядка, можно построить в пространстве $C[0,1]$.

Ранее было показано [1], что квазимера, порожденная фундаментальным решением дифференциального уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^{(k+1)}\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}$, имеет ограниченную вариацию только при $k = 1$, поэтому теорему Колмогорова [2] можно применить только для квазимеры, которая фактически является вероятностной мерой, соответствующей уравнению теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. В рабо-