

После того как решением системы (8) найдены значения поправочных коэффициентов α_i и контурного давления p_k , из формулы (4) по известным замерам забойных давлений могут быть явным образом найдены значения скин-факторов:

$$S_i = \ln \frac{r_c}{R_k} + \frac{p_k - p_i^3 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \alpha_j \frac{\mu_j}{2\pi k_j h_j} Q_j \ln \frac{r_{ij}}{R_k}}{\alpha_i \frac{\mu_i}{2\pi k_i h_i} Q_i}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемый алгоритм для определения гидрораспределения нефтяного пласта из условия получения распределения давления в пласте, соответствующего с заданной степенью точности фактическим данным о значениях давления в некоторых точках пласта в определенные моменты времени, позволяет проводить корректировку текущих фильтрационно-емкостных свойств пласта. Это резко увеличивает достоверность расчетов при нахождении полей давлений в пласте. Расчеты, проведенные для некоторых месторождений Западной Сибири, показали эффективность предлагаемого алгоритма. Кроме того, его использование значительно упрощает адаптацию модели к истории разработки месторождения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Краснов В. А., Хабибуллин Р. А.** Решение обратной задачи о восстановлении фильтрационно-ем-

костных свойств нефтяного пласта по истории замеров давления и истории эксплуатации скважин // *Обзорные прикладной и промышленной математики*. 2002. № 1 (9). С. 214–215.

2. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.

ОБ АВТОРАХ



Краснов Виталий Александрович, мл. науч. сотр. каф. математики УГАТУ. Дипл. инж.-математик по прикладной математике (УГАТУ, 2000). Исследования в области группового анализа дифференциальных уравнений, гидродинамического моделирования нефтяных резервуаров.



Хабибуллин Ринат Альфредович, аспирант той же кафедры. Дипл. инж.-математик по прикладной математике (УГАТУ, 2000). Работает над диссертацией в области математического моделирования процессов нефтедобычи.

УДК 519.8

А. В. ЧИГЛИНЦЕВ

АЛГОРИТМЫ УПАКОВКИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПРЕДМЕТОВ НА ЛИСТЫ

Рассматривается задача упаковки прямоугольных предметов на прямоугольные листы заданной длины и ширины (2D Bin Packing Problem, 2D BPP). Предложен способ формирования блочной структуры упаковки. Она использовалась нами ранее при разработке генетического алгоритма решения задачи упаковки в полубесконечную полосу, 1.5D BPP [1]. Приведены другие эвристические алгоритмы. *Исследование операций; NP-трудные задачи; генетический алгоритм; прямоугольная упаковка*

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача ортогональной упаковки прямоугольных предметов на прямоугольные листы заданных размеров. Задачи прямоугольной упаковки являются NP-трудными. Поэтому для их решения применяются эвристические алгоритмы полиномиальной сложности, что позволяет получать рациональные упаковки за приемлемое время. Задача имеет многочисленные приложения: негильотинный прямоугольный раскрой в машиностроении; размещение элементов электронных схем; загрузки транспорта; распре-

деление двухмерного производственного ресурса; ряд задач планирования занятости и другие.

Постановка задачи. Имеется неограниченное количество прямоугольных листов заданной ширины W и длины L , а также набор из m прямоугольных предметов (элементов) заданных размеров (w_i, l_i) ($i = 1..m$). Повороты прямоугольников запрещены. Требуется упаковать (разместить) предметы на листы при следующих условиях:

- ребра упакованных предметов параллельны ребрам листов;
- упакованные предметы не пересекаются друг с другом;

• упакованные предметы не пересекаются со сторонами прямоугольников.

Соответствующая этим условиям карта размещения прямоугольных предметов на листах называется прямоугольной упаковкой (Rectangular Packing, RP). Качество упаковки характеризуется также коэффициентом (Coefficient Packing, CP), отношением площади упакованных предметов к суммарной площади занятых листов. Требуется найти упаковку RP с минимальным расходом листов.

В течение последних сорока лет проблема «раскроя–упаковки» привлекает внимание ученых и производителей. Начало этому положили работы Л. В. Канторовича и В. А. Залгаллера [2], Р. Gilmore и R. Gomory [3]. Ими было предложено использовать для решения задач раскроя линейное программирование с неявно заданной информацией, т. е. линейную релаксацию по сути целочисленной задачи. Этим был частично закрыт вопрос рационального раскроя в массовом производстве. Однако задачи раскроя и упаковки являются NP-трудными проблемами комбинаторной оптимизации. Для построения точного решения используются три различных направления: методы отсечения Гомори с использованием простых эвристик [4]; метод ветвей и границ и его различные модификации [5]; асимптотически точные алгоритмы Э. Х. Гимади и В. В. Залюбовского [6]. Ввиду NP-трудности задач вызывают значительный интерес методы локального поиска оптимума. К таковым относятся простые однопроходные эвристики [7], многопроходные эвристики и вероятностные алгоритмы, в том числе метаэвристики. Развитию эвристических методов и посвящена настоящая статья.

1. БЛОЧНАЯ СТРУКТУРА УПАКОВКИ

Рассмотрим сначала задачу упаковки прямоугольных предметов в полубесконечную полосу заданной ширины W и неограниченной длины. Исходная информация задается в следующем виде: $W; m; w = (w_1, \dots, w_m); l = (l_1, \dots, l_m)$. Пусть имеется произвольная прямоугольная упаковка. Разобьем ее на прямоугольные блоки одной и той же ширины W и различной длины. При этом начало первого блока совпадает с началом полосы, а конец - с концом самого короткого прямоугольника, входящего в блок. Каждый последующий блок $v = 2, \dots$ начинается, как только заканчивается предыдущий. Каждый блок мысленно разрезаем на одинаковые полосы длиной, равной единице измерения, и шириной W . Тогда блоку можно сопоставить линейный раскрой $r(v)$ полос длины W с интенсивностью применения $x(v)$, равной длине блока. План линейного раскроя в свою очередь может быть представлен в виде совокупности кортежей $(1(v), 2(v), \dots, x(v))$, $v = 1, 2, \dots$. Иллюстрация подобного разбиения упаковки на блоки приведена на рис. 1.

План p линейного раскроя, отвечающий RP, называется прямоугольно-ориентированным ли-

нейным раскром (Rectangular Oriented Linear Cutting, ROLC).

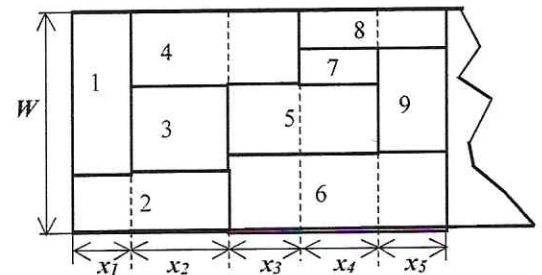


Рис. 1. Разбиение упаковки на блоки

нейный раскрой, отвечающий исходным данным в задаче 2D BPP и удовлетворяющий условиям «разнородности» элементов в пределах одного кортежа и «продолженности» в последующих кортежах, называется ослабленным прямоугольно-ориентированным линейным раскром (Delicate ROLC, d.ROLC).

Существенную роль в повышении эффективности алгоритмов выполняют декодеры — преобразователи кодов (приоритетных списков и блок-структур) в схемы упаковок. Разработан блочный декодер BD [7], он ориентирован на формирование блочной структуры RP. В качестве начального блока принимается полоса бесконечной длины. По мере упаковки прямоугольников согласно приоритетному списку формируют и модифицируют блоки.

В блок-структуре хранятся фрагменты прямоугольников. Для добавления в блок-структуру очередного прямоугольника необходимо также знать размеры пустых участков, остающихся в блоках. Для этого предложено хранить ширину такого участка в самой блок-структуре, но со знаком «-», чтобы отличать от номеров прямоугольников, а его длина равна длине блока, в котором он находится.

Под модификацией блок-структуры понимается корректное (в соответствии с размерами размещаемых прямоугольников) изменение длины блоков, ширины пустых участков, а также добавление новых блоков.

Пример 1. Задана задача с информацией $W = 10; m = 7; w = (4; 2; 7; 2; 2; 3; 1); l = (7; 9; 5; 11; 7; 2; 6)$. Требуется последовательно разместить прямоугольники согласно списку (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).

Вначале размещаются в полосе прямоугольники № 1 и № 2. Они образуют два первых блока. Прямоугольник № 3 не может быть размещен в этих блоках. Он размещается в следующем за 2-м блоке № 3, см. рис. 2, а. Далее прямоугольник № 4 притягивается к нижнему краю полосы, что позволило разместить прямоугольник № 5 в первом блоке. Шестой прямоугольник занял пустое место во втором блоке. Последним был уложен 7-й прямоугольник. Блок, сформированный прямоугольником № 3, разбивается на три различных блока.

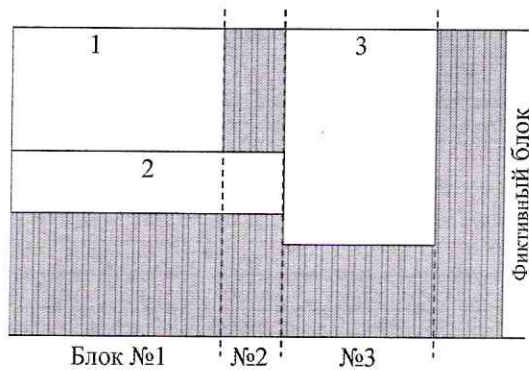
С целью улучшения упаковок применяются многопроходные алгоритмы, в том числе мета-

эвристики. Блочный генетический алгоритм рассмотрен в [1].

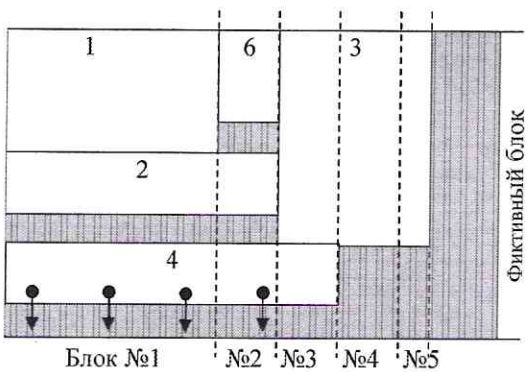
Таблица 1

Размеры прямоугольных предметов

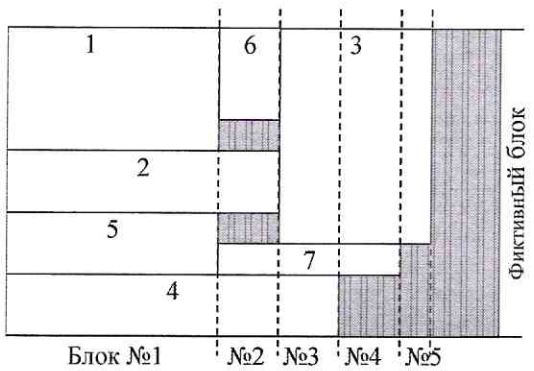
№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
W	6	7	6	5	8	6	8	11	7	4
L	14	10	17	10	4	11	7	3	5	9



a



b



c

Рис. 2. Размещение прямоугольников с помощью декодера ВД

2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ БЛОЧНЫХ СТРУКТУР ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ УПАКОВОК НА ЛИСТЫ

Упаковка прямоугольных предметов на листы – более сложный процесс. Остановимся подробно на процедуре формирования блочных структур для упаковок на листы.

Пример 2. Необходимо получить 10 прямоугольных предметов размерами (табл. 1): $w = (6, 7, 5, 8, 6, 8, 11, 7, 4)$, $l = (14, 10, 17, 10, 4, 11, 7, 3, 5, 9)$, затратив наименьшее количество листов с размером $(W, L) = (20, 20)$.

Сначала формируется приоритетный список (Priority List, PL) – последовательность номеров прямоугольных предметов, в соответствии с которой будет осуществляться их последовательное размещение на листах.

Существует несколько принципов формирования приоритетных списков: упорядочивание по убыванию длин, ширин, площадей прямоугольников; случайная перестановка и некоторые другие. Он может быть также получен как результат текущего или окончательного решения задачи с помощью того или иного алгоритма. Например, при использовании генетического алгоритма новый PL получают в результате реализации процедур «скрещивание» или «мутация».

В нашем примере получим PL путем упорядочивания по убыванию площадей прямоугольников:

$$PL = (3, 1, 2, 6, 7, 4, 10, 9, 8, 5).$$

Алгоритм заключается в последовательном размещении прямоугольников из приоритетного списка на листы, но при этом упаковка сразу не формируется как в некоторых однопроходных эвристиках. Вместо упаковки мы получаем блок-структуру упаковки, или d.ROLC (ослабленный прямоугольно ориентированный линейный раскрой), в общем случае не отвечающий прямоугольной допустимой упаковке. Список номеров заготовок, входящих в блок, называют кортежем.

Расшифруем некоторые понятия, используемые в алгоритме.

Остаток по ширине – ширина свободного пространства, остающегося в блоке после завершения размещения в нем прямоугольников (в нем уже не может быть размещен ни один прямоугольник). Вычисляется как разность между шириной листа и суммой ширин прямоугольников, относящихся к заданному кортежу (рис. 3).



Рис. 3

Пример работы алгоритма

Шаг	Блоки	Длина кортежа	Резерв по ширине	№№ заканчивающихся предметов	№№ размещаемых предметов	Ширина размещения	Резерв по длине
1-й лист							
0	—	0	20	—	3, 1, 2	20	20
1	(3, 1, 2)	10	1	2	7	8	10
2	(3, 1, 7)	4	0	1	—	6	6
3	(3, 7)	3	6	3, 7	8	20	3
4	(8)	3	9	8	—	20	0
2-й лист							
0	—	—	20	—	6, 4, 10	20	20
1	(6, 4, 10)	9	5	10	9	9	11
2	(6, 4, 9)	1	2	4	—	7	10
3	(6, 9)	1	7	6	5	13	9
4	(5, 9)	3	5	9	—	12	7
5	(5)	1	12	5	—	20	6

Ширина размещения — ширина свободного пространства в кортеже, куда могут быть размещены прямоугольники. Равняется разности между шириной полосы и суммой ширин размещенных прямоугольников.

Ширину размещения можно также вычислять как сумму ширин прямоугольников, закончившихся в предыдущем кортеже плюс запас по ширине того же кортежа.

Резерв по длине — длина свободного пространства на листе, куда могут быть размещены прямоугольники. Вычисляется как разность между длиной листа и суммой длин кортежей, формирование которых уже завершено (рис. 4).

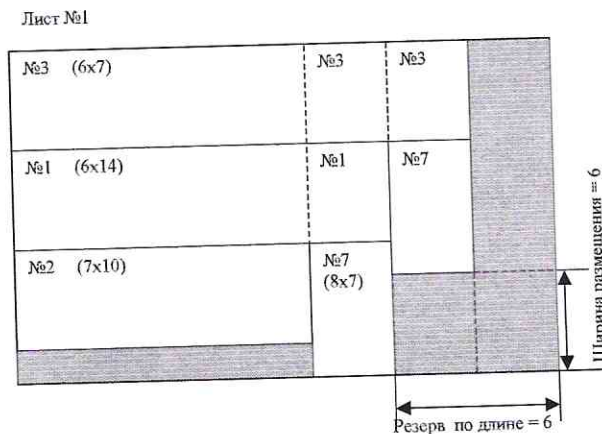


Рис. 4

Процесс создания блочной структуры в данном примере будет следующим: формируются первый кортеж (3, 1, 2), его длина равна $\min(l_3, l_1, l_2) = l_2 = 10$; резерв по ширине равен $W - (w_3 + w_1) = 20 - 12 = 8$; резерв по длине равен $L - l_2 = 20 - 10 = 10$.

Во второй кортеж должен быть размещен первый подходящий прямоугольный предмет из PL, удовлетворяющий следующим требованиям: $l_{\text{предм}} \leq$ резерва по длине или $l_{\text{предм}} \leq 10$, и $w_{\text{предм}} \leq$ ширины размещения или $w_{\text{предм}} \leq 8$. Следующим после уже размещенных предметов по приоритетному списку идет прямоугольный предмет №6, но $l_6 = 11$, что превышает резерв по длине, поэтому берем предмет №7 ($l_7 = 7, w_7 = 8$). Получается кортеж (3, 1, 7). На место заканчивающихся прямоугольных предметов ставятся новые (начинающиеся). Удобно подобные рассуждения оформлять в виде таблицы (табл. 2).

Подобным образом формируются кортежи (3,7) и (8), на этом шаге весь первый лист использован, резерв по длине = 0.

Начинается упаковка в следующий лист. Процесс продолжается, пока не окажутся размещенными все прямоугольные предметы. С помощью этой простой процедуры уже удастся получить упаковки с $CP > 90\%$.

Данной процедуре присвоено наименование Make Block Structure to Sheets, MBSS.

Далее на этой основе рассматриваются четыре типа эвристических алгоритмов для решения 2D BPP.

3. АЛГОРИТМЫ УПАКОВКИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПРЕДМЕТОВ

3.1. Алгоритмы на базе процедуры MBSS

На основе описанной выше процедуры основаны следующие два алгоритма:

3.1.1. Простой однопроводный алгоритм (вариант а). Приоритетный список формируется де-терминированным образом, например, по убыванию площадей прямоугольников. Схема алгоритма выглядит следующим образом:

Шаг 1. Формирование приоритетного списка.

Шаг 2. Процедура формирования блок-структуры на листы.

Шаг 3. Восстановление допустимой упаковки.

Шаг 4. Неразмещенные предметы помещаются на отдельный дополнительный лист с помощью блочного декодера BD.

3.1.2. Алгоритм с направленным случайным перебором (вариант б). Недостатком алгоритма в варианте а является то, что приоритетный список определяется только один раз. Хотя применяемая стратегия формирования приоритетного списка PL является разумной, результат далеко не всегда оказывается удовлетворительным. Очевидно, что во многих случаях можно найти другие PL, используя которые, можно достичь лучшего результата. Встает вопрос о том, каким образом находить другие приоритетные списки. Возможно использовать абсолютно случайный перебор PL, но более разумным будет подход, применяемый в генетических алгоритмах, т.е. направленный случайный перебор. Алгоритм с применением генетики представлен следующей схемой:

Шаг 1. Формирование начальной популяции особей (в качестве особи выступает PL, генами являются номера заготовок).

Шаг 2. Выбор из популяции пары родительских особей и формирование потомков.

Шаг 3. Мутация полученных дочерних особей.

Шаг 4. Оценка функции выживания (для каждого нового PL выполняются шаги со 2-го по 4-й из алгоритма варианта а), т.е. формируется допустимая упаковка.

Шаг 5. Селекция, т.е. принятие решения о занесении новых особей в популяцию или отсеивание как неперспективных для дальнейшего рассмотрения.

Шаг 6. Проверка критерия останова. Если критерий не выполнен, то переход к шагу 2, иначе алгоритм завершается, в качестве решения принимается лучшая из полученных в процессе перебора упаковка.

3.2. «Однопроходная макроэвристика»

Рассматриваемый ниже алгоритм классифицируется нами как «однопроходная макроэвристика». Здесь приставка «макро» указывает на то, что хотя алгоритм по своей сути является однопроходной эвристикой (в процессе выполнения формируется только одна допустимая упаковка), в его составе при размещении на очередном листе выполняется процедура поиска псевдоупаковки, которая относится к классу многопроходных эвристик.

Для поиска псевдоупаковки применяется ограниченный метод последовательного уточнения оценок (Bounded Sequential Value Correction, bSVC) [8]. SVC изменяет приоритетный список в зависимости от полученного на предыдущем шаге решения. В задаче 1.5D BPP применяется SVC для поиска ослабленного линейного раскроя d.ROLC, минимальной длины. При этом в полосе размещаются все прямоугольники.

Целью bSVC не является обязательное размещение всех прямоугольников, так как упаковка производится на лист, который имеет ограниченную длину. Задача bSVC: из имеющихся в наличии прямоугольников получить d.ROLC с длиной, не превышающей длину листа, и обеспечивающий наименьшие потери площади.

Получаемая для каждого листа, псевдоупаковка подвергается однопроходной процедуре «перестройка» [7]. Прогнозируется высокая эффективность применения «перестройки» в связи с ограничением псевдоупаковки по длине листа. Далее, если перестройка не прошла, для восстановления допустимой упаковки используется блочный декодер BD.

Таким образом, применяя последовательно bSVC, «перестройку», блочный декодер BD для каждого нового листа, возможно получить размещение всех прямоугольников на листы.

Введем условные обозначения: $M_{нач}$ — множество номеров прямоугольных предметов, полностью включающее в себя весь набор из m предметов; i — номер листа; M_i — множество прямоугольных предметов, оставшихся не размещенными на текущем шаге; R_i — множество прямоугольных предметов, размещенных на текущем шаге; E_i — множество прямоугольных предметов.

Ниже приведено пошаговое описание алгоритма:

Шаг 0. Инициализация параметров: $i = 0$; $M_0 = M_{нач}$; $R_0 = \{\}$; $E_0 = \{\}$.

Шаг 1. Определение множества неразмещенных предметов: $i = i + 1$; $M_i = M_{i-1} - R_{i-1} + E_{i-1}$.

Шаг 2. Если $M_i = \{\}$, то конец (все предметы размещены).

Шаг 3. Формирование псевдоупаковки (d.ROLC) для i -го листа с помощью bSVC на множестве предметов M_i .

Шаг 4. Перестройка для псевдоупаковки i -го листа.

Шаг 5. Восстановление упаковки для i -го листа с помощью блочного декодера. Прямоугольные предметы из псевдоупаковки, которые не удалось разместить на лист, помещаются в множество E_i . Переход на Шаг 1.

3.3. Генетический алгоритм на базе «списка прямоугольной упаковки»

Имеется допустимая упаковка m прямоугольников на листы. Израсходовано K листов. Можно составить список из m элементов (q_1, \dots, q_m) , где q_i — номер листа, на котором размещен i -й предмет ($q_i \in [1, 2, \dots, K]$). Обозначим такой список RPL (Rectangular Pack's List — Список прямоугольной упаковки). Пару (m, K) назовем размерностью RPL. Очевидными являются следующие утверждения.

Утверждение 1. Любой допустимой прямоугольной упаковке на листы соответствует один и только один список RPL.

Утверждение 2. Возможны ситуации, когда списку RPL соответствует одна или множество

различных упаковок. Причем это множество может быть и пусто. Тогда однозначный переход от RPL к RP невозможен. Для получения допустимой упаковки по RPL необходимо разработать специальный декодер. Но в любом случае он не обеспечит транзитивности при переходе $RP \rightarrow RPL \rightarrow RP$.

Выскажем

Предположение. Пусть организован полный перебор всех возможных RPL размерности (m, K) с восстановлением упаковки для каждого списка. Среди всех полученных допустимых упаковок отобрать одну, которая обеспечит наименьший расход листов (максимальный коэффициент раскроя). Такая упаковка обеспечит достаточно хороший результат, но необязательно оптимальный.

Естественно, что полный перебор на практике осуществить не удастся. Поэтому полезно использовать направленный поиск лучшего RPL, с помощью классического генетического алгоритма. Здесь хромосомой является RPL, а возможными значениями генов — номера листов.

Предлагается следующая последовательность действий. K — количество израсходованных листов.

Шаг 1. Поиск верхней границы UB для величины K . Верхняя граница количества расходуемых листов определяется путем решения задачи упаковки на листы с помощью алгоритма первый подходящий с упорядочением (FFD). Используется приоритетный список прямоугольников, упорядоченный по убыванию площади.

Шаг 2. На основе решения, полученного на шаге 1, составляется RPL, принимаемый за начальное решение.

Шаг 3. Направленный поиск RPL, обеспечивающий минимальный расход листов. Для восстановления упаковки по RPL используется последовательность процедур bSVC, «перестройка», блочный декодер.

3.4. Генетический алгоритм на базе последовательности простых эвристик

В работе [9] И. П. Норенковым был предложен генетический алгоритм, основанный на следующем подходе. Исходная задача разбивается на однотипные подзадачи, последовательное решение которых с помощью простых эвристик приводит к допустимому решению исходной задачи. Трансформированная таким образом задача переходит в задачу поиска и использования оптимальной последовательности эвристик, применяемых в подзадачах.

Направленный перебор решений осуществляется с помощью генетических операторов выбора родителей, кроссовера, мутации, селекции, перепорядочивания. Главная особенность заключается в том, что решение задачи осуществляется через поиск оптимальной последовательности эвристик, последовательное применение которых приводит к решению исходной задачи.

И. П. Норенков рассмотрел только упаковку в полубесконечную полосу. Здесь предлагается адаптация этого метода к решению задачи упаковки на листы. В исходный алгоритм добавляется дополнительное ограничение на размещение предметов, а именно проверка, уместится ли в текущий лист размещаемый предмет по длине или нет. В отрицательном случае необходимо переносить такие предметы на следующий лист.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренная в статье блочная структура упаковки представляется весьма эффективным способом кодирования упаковок как на полосу, так и на листы. На ее основе был предложен и детально рассмотрен для листов ряд эвристических алгоритмов. Эффективность описанных алгоритмов зависит от класса решаемых задач, проведение вычислительного эксперимента для различных классов задач является предметом дальнейших исследований. Выявление соответствия между алгоритмом и классами характерных для него задач уже само по себе является отдельным исследовательским процессом.

Таким образом, предполагается вести дальнейший поиск и разработку алгоритмов упаковки на листы совместно с изучением распределения их эффективности на множестве различных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мухачева Э. А., Мухачева А. С., Чиглинец А. В. Генетический алгоритм блочной структуры в задачах двухмерной упаковки // Информационные технологии. 1999. № 11. С. 13–18.
2. Канторович Л. В., Залгаллер В. А. Рациональный раскрой промышленных материалов // Новосибирск: Наука, 1971. 320 с.
3. Gilmory P. C., Gomory R. E. Multistage cutting stock problem of two and more dimension // Operation Research. 1965. V. 13, No 1.
4. Belov G., Scheithauer G. A cutting plane algorithm for the one-dimensional cutting stock problem with multiple stock length // European Journal of Operation Research. 2002. V. 141, No 2. P. 274–294.
5. Мухачева Э. А., Картак В. М. Модифицированный метод ветвей и границ: алгоритм и численный эксперимент для задач одномерного раскроя // Информационные технологии. 2000. № 9. С. 15–20.
6. Гимади Э. Х., Залобовский В. В. Задача упаковки в контейнеры: асимптотически точный подход // Известия вузов. Математика. 1997. № 12 (427). С. 25–33.
7. Мухачева Э. А., Мухачева А. С., Чиглинец А. В., Смагин М. А. Задачи двухмерной упаковки: развитие генетических алгоритмов на базе смешанных процедур локального поиска оптимального решения // Приложение к журналу «Информационные технологии». М.: Машиностроение, 2001. № 8. С. 1–24.
8. Мухачева Э. А., Мухачева А. С., Белов Г. Н. Метод последовательного уточнения оценок: алгоритм и численный эксперимент для задач одномерного раскроя // Информационные технологии. 2000. № 2. С. 11–17.

9. **Норенков И. П.** Эвристики и их комбинации в генетических методах дискретной оптимизации // Информационные технологии. 1999. № 1. С. 2–7.

ОБ АВТОРЕ



Чиглинцев Артём Владимирович, аспирант каф. вычислительной математики и кибернетики УГАТУ. Дипл. экономист-математик (УГАТУ, 2001). Готовит диссертацию в обл. алгоритмов оптимизации в задачах раскрытия и упаковки прямоугольных предметов под рук. проф. Э. А. Мухачевой.

УДК 519.21

А. В. ЗАХАРОВ

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ КВАНТИЗАЦИИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В АППРОКСИМАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ

Предлагается обобщенная модель квантизации множеств, раскрываются наиболее важные ее применения для задач аппроксимации. Решение же самой обобщенной задачи квантизации в различных условиях сводится к простейшим задачам вычислительной геометрии. *Дискретизация; квантизация; оценивание по значениям в точках; оптимальное расположение точек*

1. ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ КВАНТИЗАЦИИ

Задача квантизации первоначально являлась задачей теории кодирования информации. Суть ее заключается в следующем ([1, 3, 6]). Пусть T — некоторое односвязное подмножество R^n . Пусть $\{t_k\}_{k=1}^N$ — набор N точек из T . Каждая точка множества T кодируется какой-нибудь одной точкой из этого набора. Ошибка кодирования точки $t \in T$ точкой t_k измеряется некоторой неотрицательной функцией $\rho(t, t_k)$, действующей из $T \times T$ в R^1 . В качестве функции ρ может выступать метрика в R^n , функция от метрики, возможны также более сложные варианты.

Пусть Δ_k — множество точек из T , которые кодируются точкой $t_k, k = 1, \dots, N$. Так как кодируются все точки T , набор множеств $\{\Delta_k\}_{k=1}^N$ образует разбиение T . Ошибка кодирования точкой t_k измеряется интегралом $\int_{\Delta_k} \rho(t, t_k) dt, k = 1, \dots, N$.

Общая ошибка кодирования множества T точками $\{t_k\}_{k=1}^N$ измеряется суммой

$$\epsilon_N[T] = \sum_{k=1}^N \int_{\Delta_k} \rho(t, t_k) dt.$$

Задача квантизации состоит в том, чтобы найти набор точек $\{t_k\}_{k=1}^N$ и соответствующее им разбиение $\{\Delta_k\}_{k=1}^N$ такие, чтобы ошибка ϵ была наименьшей.

Определение. Последовательность наборов $\{t_k^*, \Delta_k^*\}_{k=1}^N$ с ошибкой $\epsilon_N^*[T], N = 1, 2, \dots$, называется асимптотически оптимальной, если для

любой другой последовательности $\{t_k^N, \Delta_k^N\}_{k=1}^N$ с ошибкой $\epsilon_N[T], N = 1, 2, \dots$, выполняется неравенство

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_N^*[T]}{\epsilon_N[T]} \leq 1.$$

Пусть C — односвязное выпуклое множество в R^n , симметричное относительно какой-нибудь своей внутренней точки O . Пусть s, t — произвольные точки R^n . При помощи параллельного переноса переместим множество C так, чтобы его точка симметрии O совпала с точкой s . Пусть луч, выходящий из точки s и проходящий через точку t , пересекает границу этого выпуклого множества в точке v . Определим выпуклую метрику [4] между s и t следующим образом:

$$\rho^0(t, s) = \frac{\|t - s\|_2}{\|v - s\|_2},$$

где $\|\cdot\|_2$ — евклидова метрика (L_2), т. е. в качестве $\rho_0(t, s)$ мы возьмем коэффициент, с которым мы должны увеличить множество C гомотетично относительно точки s , чтобы его граница прошла через точку t .

А. $\rho(t, s) = \rho_0^\alpha(t, s) + o_s(\rho_0^\alpha(t, s))$ при $t \rightarrow s$, где $\rho_0(t, s)$ — некоторая выпуклая метрика, порожденная множеством, в общем случае зависящим от s .

В. Для любого $\delta > 0$ существует $\epsilon > 0$ такое, что $\rho(t, s) > \epsilon$ при $\|t - s\|_2 > \delta$.

Определение. При фиксированной точке s поверхность (линия) $\rho^0(t, s) = c_{\varphi, s} \|t - s\|_2 = 1, t \in$