

УДК 519.854.3

МЕТОДЫ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ЗАДАЧЕ НЕРЕГУЛЯРНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ПЛОСКИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В ФОРМЕ ПОЛИМИНО

В. М. КАРТАК¹, А. И. ФАБАРISOVA²

¹kvmail@mail.ru, ²aygul_fab@mail.ru

¹ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

²ФГБОУ ВО «Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы» (БГУ им. М. Акмуллы)

Поступила в редакцию 23.01.2018

Аннотация. Приведены результаты исследования проблемы оптимизации нерегулярного двумерного размещения объектов в форме полимино на прямоугольных структурах. Рассматривается два случая: размещение тримино L -формы и тетрамино L -формы. Предложен подход на основе целочисленного линейного программирования. Математическая модель может быть применена для задачи в области оптимизации нерегулярного размещения подрешеток на фазированных антенных решетках. Для задач большой размерности предложен подход на основе посегментной оптимизации. Представлены результаты численного эксперимента.

Ключевые слова: целочисленное линейное программирование; полимино; L -тримино; L -тетрамино; оптимальное размещение на плоскости; фазированные антенные решетки.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи раскроя-упаковки – это большой класс задач оптимизации, целью которых является определение соответствия между множеством крупных объектов и множеством малых элементов в n -мерном пространстве. Одним из таких классов является задача размещения. В типологии задач раскроя-упаковки Wäscher определяет задачи размещения как такие виды задач, в которых устанавливается соответствие между неоднородным по составу набором малых объектов и заданным ограниченным множеством больших объектов [1]. В этих задачах требуется максимизировать общий размер размещенных малых объектов или же, наоборот, снизить размер соответствующих остатков.

Исследуемая задача размещения объектов в форме полимино на прямоугольных структурах имеет ряд областей практиче-

ского применения, одна из которых – это использование нерегулярного размещения подрешеток в виде полимино при проектировании фазированных антенных решеток [2].

Термин «полимино», который ввел в употребление известный математик Соломон В. Голомб, описывает вид плоских геометрических фигур, образованных путем соединения нескольких одноклеточных квадратов так, что каждый квадрат примыкает хотя бы к одному соседнему, имеющему с ним общую сторону [3]. Самая известная фигура типа полимино – домино, которая состоит из двух одноклеточных квадратов.

Задача замощения конечной области неограниченным количеством копий полимино каждого вида является NP-полной [4].

В одном из первых исследований, посвященных рассматриваемой проблеме, пред-

ставлено решение в виде процедуры точного поиска по дереву для случая размещения одного полимино в прямоугольную область и описывает эвристический алгоритм поиска с запретами для размещения n различных полимино [5].

В целом все решения данной задачи можно разделить на два вида: использование эвристических алгоритмов и оптимизация с использованием методов математического программирования. Среди работ с использованием эвристического подхода (а именно генетического алгоритма) особо выделяются работы [6, 7]. В последней работе исследуется размещение полимино для задачи проектирования фазированных антенных решеток. Второй тип решений подразумевает использование методов математического программирования, как, например, в работах [8] и [9], где в виде целочисленной задачи линейного программирования представлены проблемы минимального покрытия кругами и упаковки равных эллипсов соответственно. В одном из исследований задача нерегулярного размещения полимино представлена в виде нелинейной модели точного покрытия множества, где нерегулярность размещения определена в целевой функции в виде информационной энтропии [10]. В работе тоже представлено практическое приложение результатов применительно к задаче проектирования фазированных антенных решеток.

В данной работе предлагается использование методов целочисленного программирования для оптимизации размещения полимино заданного типа на прямоугольной области. Предложен алгоритм посегментной оптимизации, а также подход для введения нерегулярности в размещение. Приведены результаты численного эксперимента, в том числе симуляция работы фазированных антенных решеток по полученным размещениям.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Дана конечная прямоугольная односвязная область G размерностью $N \times N$ на плоскости P . Введем прямоугольную систему координат: ось Ox совпадает с нижней стороной, а ось Oy – с боковой стороной обла-

сти G . На координатной плоскости построена сетка с единичным шагом, соответствующим размерности полимино (рис. 1).

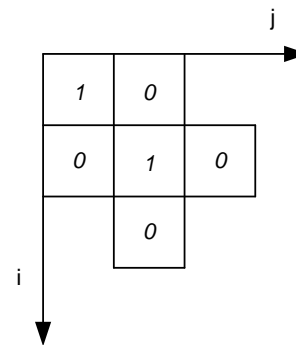


Рис. 1. Координатная плоскость

Условие размещения полимино. Будем считать, что полимино размещены на G , если каждый единичный квадрат полимино содержится в G и каждый единичный квадрат сетки на G содержит не более одного полимино.

Задача: требуется разместить Q видов полимино на области G без ограничений на количество используемых копий полимино каждого вида при том, что каждое полимино может быть повернуто в любом направлении или зеркально отражено. Мы рассматриваем случай, когда количество заданных видов полимино $Q = 1$.

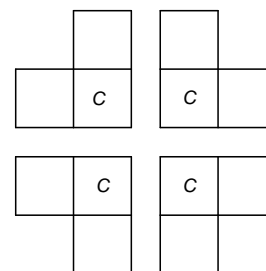


Рис. 2. Четыре поворота тримино L-формы с центром C

Каждая фигура имеет центр C , заранее установленный для данного вида полимино. Для данного вида полимино установлено количество ориентаций равное T . Например, для фигуры L -тримино существует четыре ориентации фигуры (рис. 2). Введем переменную z_{ij}^k , где $k \in \{1, \dots, T\}$ – номер ориентации полимино, $(i, j) \in \{1, \dots, n\}$ – координаты единичного квадрата сетки по x и y соответственно.

Условимся, что переменная z_{ij}^k принимает значение 1, если единичный квадрат с координатами (i, j) содержит центр полимино k -ой ориентации, иначе $z_{ij}^k = 0$.

$$z_{ij}^k = \begin{cases} 1, C \in G(i, j) \\ 0, C \notin G(i, j) \end{cases}$$

Таким образом, задача оптимального покрытия структуры фигурами в виде полимино может быть сформулирована в виде модели целочисленного линейного программирования.

Целевая функция модели ЦЛП сводится к максимизации суммы всех переменных z_{ij}^k каждой ориентации k по всем столбцам и строкам:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^k z_{ij}^t \rightarrow \max.$$

Ограничения модели ЦЛП позволяют добиться заполнения сетки фигурами полимино заданного типа. Приведем пример ограничений для задачи размещения L -тримино. Существует четыре ориентации L -тримино, т.е. $k = 4$ (рис.2). Тогда целевая функция будет выглядеть следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^4 z_{ij}^t \rightarrow \max.$$

Следующие ограничения задают форму четырех поворотов L -тримино:

$$z_{ij}^1 + z_{i+1,j}^1 + z_{i,j+1}^1 \leq 1, \quad i, j = 1, \dots, n-1,$$

$$z_{ij}^2 + z_{i+1,j}^2 + z_{i,j-1}^2 \leq 1,$$

$$i = 1, \dots, n-1, \quad j = 2, \dots, n,$$

$$z_{ij}^3 + z_{i-1,j}^3 + z_{i,j-1}^3 \leq 1, \quad i, j = 2, \dots, n,$$

$$z_{ij}^4 + z_{i-1,j}^4 + z_{i,j+1}^4 \leq 1,$$

$$i = 2, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Кроме того, модель требует ограничений, позволяющих избежать взаимного пересечения всех четырех поворотов L -тримино. Например, ограничение, запрещающее пересечение всех фигур в одной точке структуры:

$$z_{ij}^1 + z_{ij}^2 + z_{ij}^3 + z_{ij}^4 \leq 1, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Полная модель ЦЛП для L -тримино включает порядка $47 \times n^2$ ограничений.

Размещение L -тетрамино. Данный подход также применим для задачи покрытия фигурами в виде L -тетрамино, для раз-

мещения которых требуется рассмотреть восемь возможных ориентаций: 4 поворота и их зеркальные отражения (рис. 3).

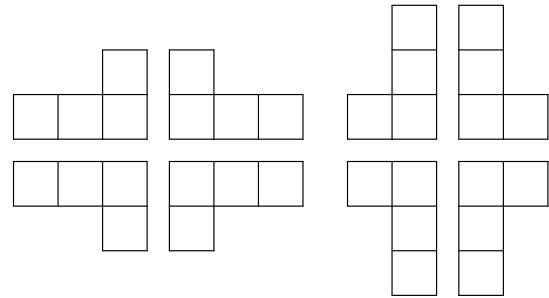


Рис. 3. Восемь ориентаций L -тетрамино

В этом случае целевая функция будет включать сумму восьми переменных z_{ij}^k по всем i и j :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^8 z_{ij}^t \rightarrow \max.$$

Представим часть ограничений для данной подзадачи, которые препятствуют пересечению двух ориентаций фигуры L -тетрамино между собой, которые проиллюстрированы на рис. 4.

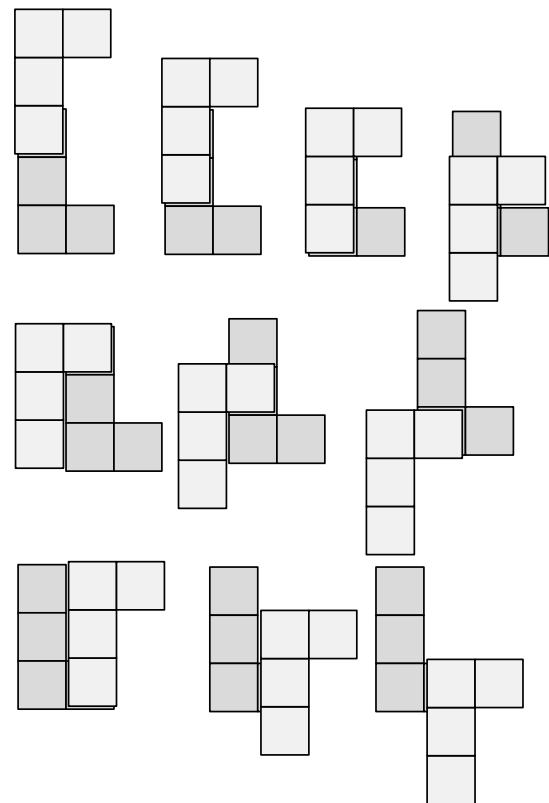


Рис. 4. Возможные пересечения двух ориентаций L -тетрамино

$$\begin{aligned}
z_{ij}^1 + z_{i+2,j}^2 &\leq 1, \quad i=1\dots n-2, j=1,\dots,n, \\
z_{ij}^1 + z_{i+3,j}^2 &\leq 1, \quad i=1\dots n-3, j=1,\dots,n, \\
z_{ij}^1 + z_{i+4,j}^2 &\leq 1, \quad i=1\dots n-4, j=1,\dots,n, \\
z_{ij}^1 + z_{i+1,j}^2 &\leq 1, \quad i=1\dots n-1, j=1,\dots,n, \\
z_{ij}^1 + z_{i+1,j+1}^2 &\leq 1, \quad i=1\dots n-1, j=1,\dots,n-1, \\
z_{ij}^1 + z_{i+2,j+1}^2 &\leq 1, \quad i=1\dots n-2, j=1,\dots,n-1, \\
z_{ij}^2 + z_{i-1,j+1}^1 &\leq 1, \quad i=2\dots n, j=1,\dots,n-1, \\
z_{ij}^2 + z_{i-2,j+1}^1 &\leq 1, \quad i=3\dots n, j=1,\dots,n-1, \\
z_{ij}^1 + z_{i,j+1}^2 &\leq 1, \quad i=1\dots n, j=1,\dots,n-1, \\
z_{ij}^2 + z_{i,j+1}^1 &\leq 1, \quad i=1\dots n, j=1,\dots,n-1.
\end{aligned}$$

Кроме того, модель включает 24 неравенства, ограничивающих размещение определенных ориентаций на границы структуры, что не дает выйти за рамки размещения.

Всего модель включает порядка $318 \times n^2$ вышеописанных ограничений для случая размещения L -тетрамино.

СЛОЖНОСТЬ МОДЕЛИ

Описанная модель целочисленного программирования подходит для оптимизации структур малой размерности. Однако при увеличении числа переменных и ограничений происходит экспоненциальный рост затрат машинного времени. Результаты численных экспериментов для различных размерностей структуры при заповнении фигурами L -тримино приведены в таб. 1. В связи со сложностью модели мы предлагаем разбивать структуры большой размерности на малые сегменты размерностью $m \leq 16$ и оптимизировать размещение полимино посегментно. Применяя данный подход, мы уходим от понятия оптимальности в пользу рациональности решения, которое строится на основе объединения локальных оптимумов.

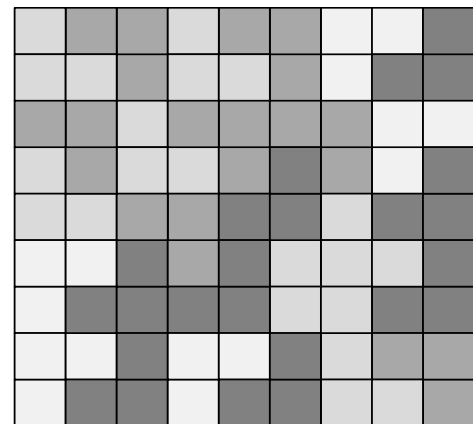
Реализация модели с помощью решателя целочисленного программирования генерирует структуры с периодичным расположением фигур. Для устранения периодичности было предложено заранее расставлять на сегменте определенное количество фигур полимино и добавлять координаты расставленных фигур в виде ограничений в модель целочисленного программирования, внося тем самым большее возмущение в структуру.

Таблица 1

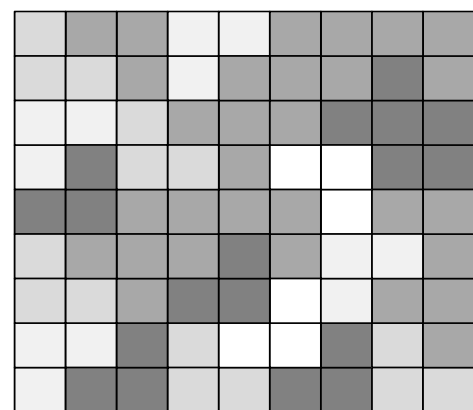
Результаты численного эксперимента

Размерность структуры N	Время работы, сек	Количество узлов дерева	
		Созданные	Обработанные
8×8	0,03	0	0
16×16	0,43	0	0
24×24	3,09	277	153
32×32	7,42	0	0
40×40	20,41	13	6
48×48	255,88	5609	3396
56×56	715,49	1510	1254

Например, случайные фигуры на рис. 5, б будут включены в модель со следующими условиями: $z_{47}^2 = 1, z_{57}^2 = 0, z_{46}^2 = 0, z_{86}^3 = 1, z_{76}^3 = 0, z_{85}^3 = 0$. На рис. 5, а видно, что в структуре много повторяющихся комбинаций фигур, расположенных рядом, в отличие от второй структуры на рис. 5, б.



а



б

Рис. 5. Внесение возмущения в структуру: а – без внесения случайных фигур, б – структура со случайными фигурами (выделены белым цветом)

АЛГОРИТМ РАЗМЕЩЕНИЯ

Итак, рассмотрим каждый шаг алгоритма:

Шаг 1. Установка начальной позиции сегмента $i = j = 1$. Заполнение структуры начинается с левого верхнего угла.

Шаг 2. Заполнение сегмента размерностью $m \times m$ фигурами полимино заданного вида со случайно выбранной ориентацией k и со случайными координатами (i, j) . Сгенерированные координаты записываются в модель целочисленного программирования в виде ограничений.

Шаг 3. Поиск оптимального размещения на сегменте размерностью $m \times m$;

Шаг 4. Смещение начальной позиции следующего сегмента на m по i и/или j в зависимости от текущей позиции сегмента;

Шаг 5. Повторение шагов 2–4 до полного заполнения структуры.

СИМУЛЯЦИЯ РАБОТЫ ФАЗИРОВАННОЙ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ

Предложенный метод можно применить к задаче проектирования фазированных антенных решеток. Фазированная антенная решетка (ФАР) – это антенная решетка, направление излучения и (или) форма соответствующей диаграммы, направленности которой регулируются изменением амплитудно-фазового распределения токов или полей возбуждения на излучающих элементах [11]. Наличие активных компонентов, таких как линии задержки и фазовращатели, делает их производство дорогостоящим, поэтому при производстве ФАР применяется технология группировки элементов в подрешетки. В результате периодического размещения прямоугольных подрешеток возникает нежелательное боковое излучение (так называемые боковые лепестки). Ряд исследований доказывает, что использование подрешеток в виде полимино приводит к снижению периодичности размещения и к значительному снижению уровня излучения боковых лепестков (УБЛ) по сравнению с использованием прямоугольных элементов [2].

Задача состоит в поиске оптимального нерегулярного размещения подрешеток в виде полимино на структуре антенны. При

этом должны быть учтены следующие требования:

- минимизация числа пустот, т.е. незаполненных участков в структуре антенной решетки;

- снижение периодичности для сокращения нежелательного излучения (уровня боковых лепестков).

В следующей главе приводятся результаты симуляции фазированных антенных решеток построенных на основе оптимизированных структур.

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Разработан комплекс программ на языке Python 2.7, реализующий представленные алгоритмы и модели, с использованием библиотеки решателя задач линейного и целочисленного программирования IBM® ILOG CPLEX Optimization Studio 12.6.0 [12]. В составе комплекса реализованы две программы: одна программа позволяет оптимизировать размещение только L -тримино без деления структуры на сегменты, вторая осуществляет оптимизацию размещения только L -тетрамино с делением структуры на одинаковые сегменты заданной размерности. В обоих случаях учитываются всевозможные повороты и зеркальные отражения заданных фигур. Расчеты проводились на компьютере с процессором Intel(R) Core(TM) i5-2450M CPU @2.50GHz.

Рассматривалась квадратная структура размерностью $n = 32$ элемента. Решетки имеют следующие характеристики: межэлементное расстояние $dx = dy = 0,5\lambda$ (длина волны λ относится к верхней частоте), направление сканирования $u_0 = v_0 = 0,5$, оптимизация для ширины полосы частот

$$r = \frac{f}{f_0} = 1,3.$$

Результаты численных экспериментов приведены в табл. 2 и 3. Были проведены серии тестов с разным количеством случайных фигур, из каждой серии выделена структура с максимальным подавлением уровня боковых лепестков (УБЛ). Напомним, что высокий УБЛ отрицательно влияет на электромагнитную совместимость системы и снижает мощность главного лепестка

антенны. Все структуры имеют заполненность, равную 99,9% в случае с L -тримино и 100% в случае с L -тетрамино.

Таблица 2
Данные вычислительного эксперимента для L -тримино ($n = 32$, без деления на сегменты)

Количество случайных фигур	Максимальное значение УБЛ, дБ	
	$r=1,3$	$r=1,82$
0	-27,00	-19,78
4	-28,47	-21,37
8	-28,27	-21,32
12	-28,76	-21,73
16	-28,49	-21,20
20	-28,69	-21,60
24	-29,15	-21,96
28	-28,52	-21,32
32	-28,30	-21,33

Таблица 3
Данные вычислительного эксперимента для L -тетрамино ($n = 32$, деление на 4 сегмента)

Количество случайных фигур в целом / на сегменте	Максимальное значение УБЛ, дБ	
	$r=1,3$	$r=1,82$
0	-25,19	-16,83
4 / 1	-26,32	-18,49
8 / 2	-25,41	-18,03
12 / 3	-25,48	-17,56
16 / 4	-25,73	-17,89

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье представлены результаты разработки подхода к решению задачи нерегулярного размещения фигур в виде полимино на прямоугольных структурах. Задача представлена в виде модели целочисленного линейного программирования. Рассмотрено две подзадачи: размещение четырех ориентаций фигур L -тримино и восьми ориентаций фигур L -тетрамино. Для каждой подзадачи разработана математическая модель размещения.

Для того чтобы сократить время оптимизации размещения на структурах большой размерности, была предложена стратегия разбиения структуры на сегменты и последовательной оптимизации сегментов.

Особенностью задачи является требование нерегулярности размещения, которая обеспечивается введением в математическую модель дополнительных ограничений, соответствующих координатам полимино, которые заранее случайным образом расставлены на сегменте.

Данный подход может быть применен в задаче проектирования фазированных антенных решеток, где требуется оптимизировать размещение подрешеток в форме полимино с учетом нерегулярности их расположения. Симуляция работы антенной решетки показала, что использование подхода позволяет достичь высокого уровня подавления нежелательного бокового излучения при максимальной заполненности структуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wäscher G., Haußner H., Schumann H. An improved typology of cutting and packing problems // *European Journal of Operational Research*. 2007. V. 183. P. 1109–1130. [G. Wäscher, H. Haußner, H. Schumann, "An improved typology of cutting and packing problems", in *European Journal of Operational Research*, vol. 183, pp. 1109-1130, 2007.]
2. Irregular polyomino-shaped subarrays for spacebased active arrays / R. Mailloux [et. al.] // *International Journal of Antennas and Propagation*. 2009. Vol. 2009, P. 9. [R. Mailloux et al., "Irregular polyomino-shaped subarrays for spacebased active arrays", in *International Journal of Antennas and Propagation*, vol. 2009, pp. 9, 2009.]
3. Golomb S. Polyominoes: Puzzles, Patterns, Problems and Packings. 2nd Ed. Princeton: Princeton University Press, 1994. [S. Golomb, *Polyominoes: Puzzles, Patterns, Problems and Packings*. 2nd Ed. Princeton: Princeton University Press, 1994.]
4. Moore C., Robson J. Hard tiling problems with simple tiles // *Discrete & Computational Geometry*. 2001. V. 26, P. 573–590. [C. Moore, J. Robson, "Hard tiling problems with simple tiles", in *Discrete & Computational Geometry*, vol. 26, pp. 573-590, 2001.]
5. Wolfram. J. Packing Polyominoes // *Operations Research*'91. 1992. P. 168–171. [J. Wolfram. "Packing Polyominoes", in *Operations Research*'91, pp. 168-171, 1992.]
6. Gwee B. H., Lim M. H. Polyominoes tiling by a genetic algorithm // *Computational Optimization and Applications Journal*. 1996. V. 6, № 3, P. 273–291. [B. H. Gwee, M. H. Lim "Polyominoes tiling by a genetic algorithm", in *Computational Optimization and Applications Journal*, vol. 6, №. 3, pp. 273-291, 1996.]
7. Algorithm for phased antenna array design for satellite communications / R. Chirikov [et al] // *Vestnik USATU*. 2013. V. 17, № 4(57), P. 159–166. [R. Chirikov, et al., "Algorithm for phased antenna array design for satellite communications", in *Vestnik USATU*, vol. 17, no. 4(57), pp. 159-166, 2013.]
8. Галиев Ш. И., Карпова М. А. Оптимизация многократного покрытия ограниченного множества кругами //

Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50, № 2, С. 757–769. [Sh. I. Galiev, M. A. Karpova, "Optimization of a multiple covering of a bounded set with circles", (in Russian), in *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 50, no. 4, pp. 757-769, 2010.]

9. **Галиев Ш. И., Лисафина М. С.** Численные методы оптимизации упаковок равных ортогонально ориентированных эллипсов в прямоугольную область // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53, № 11. С. 1923–1938. [Sh. I. Galiev, M. A. Lisafina, "Numerical optimization methods for packing equal orthogonally oriented ellipses in a rectangular domain" (in Russian), in *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 53, no. 11, pp. 1923-1938, 2010.]

10. **Karademir S., Prokopyev O. A., Mailloux R. J.** Irregular Polyomino Tiling via Integer Programming with Application in Phased Array Antenna Design // *Journal of Global Optimization*. 2016. V. 65, № 2. P. 137–173. [S. Karademir, O.A. Prokopyev, R.J. Mailloux, "Irregular Polyomino Tiling via Integer Programming with Application in Phased Array Antenna Design", in *Journal of Global Optimization*, vol. 65, no. 2, pp. 137-173, 2016.]

11. **ГОСТ 23282-91.** Решетки антенные. Термины и определения. М.: Стандартинформ, 2005. 7 с. [*Antenna arrays. Terms and definitions*, (in Russian), Federal standard 23282-91, Moscow, Standatrinform, 2005.]

12. **Introducing IBM ILOG CPLEX Optimization Studio V12.6.0** URL: https://www.ibm.com/support/knowledgecenter/SSSA5P_12.6.0/ilog.odms.studio.help/Optimization_Studio/topics/COS_relnotes_intro.html (дата обращения 12.10.2017). [Introducing IBM ILOG CPLEX Optimization Studio V12.6.0 (2017, Oct. 12) [Online]. Available: https://www.ibm.com/support/knowledgecenter/SSSA5P_12.6.0/ilog.odms.studio.help/Optimization_Studio/topics/COS_relnotes_intro.html]

ОБ АВТОРАХ

КАРТАК Вадим Михайлович, зав. кафедрой ВТиЗИ. Дипл. Инженер -программист (УГАТУ, 1995). Д-р физ.-мат. наук по 05.13.01 (УГАТУ, 2012). Иссл. в обл. дискретной оптимизации.

ФАБАРИСОВА Айгуль Ильдаровна, аспирант каф. Прикладной информатики (БГПУ им. М.Акмоллы). Дипл. инф.-экономист (УГАТУ, 2012). Магистр прикладн. матем. и информатики (УГАТУ, 2014). Иссл. в обл. оптимиз. размещения объектов методами целочисл. программирования.

METADATA

Title: Integer programming methods in the problem of irregular tiling of plane polyomino-shaped geometric objects

Authors: V. M. Kartak¹, A. I. Fabarisova²

Affiliation:

¹ Ufa State Aviation Technical University (UGATU), Russia.

² Bashkir State Pedagogical University named after M.Akmullah (BSPU), Russia.

Email: ¹kvmail@mail.ru, ²aygul_fab@mail.ru.

Language: Russian.

Source: Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 22, no. 2 (80), pp. 131-137, 2018. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

Abstract: The irregular placement of two-dimensional polyomino-shaped objects on plane structures optimization problem is discussed. Two cases are considered: placement of L-shaped tromino and L-shaped tetromino. The approach based on integer linear programming is proposed. The mathematical model can be applied to the optimization problem of irregular placement of subarrays on phased array antennas.

Key words: Integer programming; polyomino; L-tromino; L-tetromino; phased array antenna.

About authors:

KARTAK, Vadim Michailovich, Head of the Dept. of Computer Science and Information Security. Dipl. Software Engineer (UGATU, 1995). Dr. of Phys.-Math. Sci. (UGATU, 2012). Research interests – discrete optimization.

FABARISOVA, Aigul Ildarovna, Postgrad. (PhD) Student, Dept. of Applied Informatics (BSPU n.a. M. Akmullah). Dipl. Comp. Scientist and Economist (USATU, 2012). Master of Applied Math. and Computer Science (USATU, 2014).