УДК 521.13

Ф. С. РАХИМОВ, И. А. АКИМОВ, А. И. АКИМОВ

УТОЧНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ МНОГООБРАЗИЙ В ОБЩЕЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

Статья посвящена продолжению исследований одной из фундаментальных задач механики и математики – задачи трех тел. Данная работа фактически завершает целую серию исследований вопроса о граничных многообразиях в задаче трех тел, проведенных различными учеными. В работе авторами получено точное уравнение граничных многообразий и продемонстрированы его применения к различным задачам небесной механики. *Задача трех тел; неравенство Сундмана; уравнение Голубева*

Как известно, общей задачей трех тел в небесной механике называется задача, в которой рассматривается движение системы трех свободных материальных точек P_1, P_2, P_3 с конечными массами, m_1, m_2, m_3, которое происходит под действием только их взаимного ньютоновского притяжения с силой, по модулю равной $fm_i m_j / r_{ij}^2$. Здесь f – постоянная притяжения, r_{ij} – расстояние между P_i и P_j, $i = 1, 2, 3$.

Задачу рассмотрим в относительных координатах, которые носят название Якобиевых и инерциальными не являются [7].

В пространственной общей задаче трех тел P_1, P_2, P_3 движение точки P_2 относится к системе координат $P_1 x_2 y_2 z_2$, с началом в точке P_1, а движение точки P_3 – к системе $O_{1,2} x_3 y_3 z_3$ с началом $O_{1,2}$ в центре масс пары тел P_1 и P_2. Обозначим через $\overline{\rho}$ вектор $\overline{O_{1,2} P_3}$. Оси обеих систем соответственно параллельны и сохраняют неизменные направления, основные их плоскости $P_1 x_2 y_2$ и $O_{1,2} x_3 y_3$ параллельны плоскости Лапласа, т.е. неизменной плоскости, перпендикулярной вектору $\overline{c}$, момента количества движения системы тел. Пусть $\overline{r'}_{12}$ – проекция вектора $\overline{r}_{12}$ на плоскость $P_1 x_2 y_2$, а φ – угол вектора r'_{12} с осью x_2; $\overline{\rho}'$ – проекция вектора $\overline{\rho}$ на плоскость $O_{1,2} x_3 y_3$, а Θ – угол вектора $\overline{\rho}'$ с осью $O_{1,2} x_3$. Таким образом, (r'_{12}, φ, z_2) и (ρ', θ, z_3) являются цилиндрическими координатами соответственно точек P_2 и P_3.

В этом случае рассматриваемая нами математическая модель общей задачи трех тел описывается следующими дифференциальными уравнениями [1]:

$$m\ddot{x}_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2}, \mu\ddot{x}_3 = \frac{\partial U}{\partial x_3} = \frac{\partial U_1}{\partial x_3},$$
$$m\ddot{y}_2 = \frac{\partial U}{\partial y_2}, \mu\ddot{y}_3 = \frac{\partial U}{\partial y_3} = \frac{\partial U_1}{\partial y_3}, \qquad (1)$$
$$m\ddot{z}_2 = \frac{\partial U}{\partial z_2}, \mu\ddot{z}_3 = \frac{\partial U}{\partial z_3} = \frac{\partial U_1}{\partial z_3}.$$

где

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \mu = \frac{m_3(m_1 + m_2)}{M},$$

$$U_1 = \frac{fm_1 m_3}{r_{13}} + \frac{fm_2 m_3}{r_{23}}, U = \frac{fm_1 m_2}{r_{12}} + U_1.$$

Функция U называется силовой функцией задачи.

Расстояния определяются формулами:

$$r_{12}^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2, \qquad (2)$$

$$r_{13}^2 = (x_3 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} x_2)^2 + (y_3 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} y_2)^2 + (z_3 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} z_2)^2,$$

$$r_{23}^2 = (x_3 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} x_2)^2 + (y_3 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} y_2)^2 + (z_3 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} z_2)^2.$$

Первые интегралы дифференциальных уравнений (1) движения, в выбранной системе координат, имеют вид [1]:

$$m(x_2 \dot{y}_2 - y_2 \dot{x}_2) + \mu(x_3 \dot{y}_3 - y_3 \dot{x}_3) = c, \qquad (3)$$
$$m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) + \mu(\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{z}_3^2) = 2U + 2h, \qquad (4)$$

где c – постоянная площадей, h – постоянная энергии, они определяются из начальных данных задачи.

Величина $J = mr_{12}^2 + \mu\rho^2$, где $\rho^2 = x_3^2 + y_3^2 + z_3^2$, называется моментом инерции системы трех тел относительно барицентра (с учетом (2)).

В общей задаче трех тел известно неравенство Сундмана [2], которое можно привести к виду [3]:

$$\frac{c^2}{J} + \frac{\dot{J}^2}{4J} \le 2U + 2h, \qquad h < 0. \qquad (5)$$

В работах [4–5] В. Г. Голубев рассмотрел упрощенное неравенство, получаемое из (5) отбрасыванием неотрицательного второго слагаемого в левой части:

$$\frac{c^2}{J} \le 2U + 2h, \qquad (6)$$

указал на условия обращения (6) в равенство:

$$\frac{c^2}{J} = 2U + 2h, \quad h < 0. \qquad (7)$$

В этих же работах В. Г. Голубев, исходя из равенства (7) доказал, что в общей задаче трех тел тоже существуют поверхности, аналогичные поверхностям нулевой скорости Хилла в ограниченной задаче трех тел [1]. Эти поверхности отделяют те части пространства, в которых движение одного из тел, например P_3, возможно от частей, где движение P_3 заведомо невозможно. В дальнейшем будем называть эти поверхности граничными многообразиями. В указанных работах В. Г. Голубев получил, исходя из (7), уравнение граничных многообразий в общей задаче трех тел в виде:

$$S(\rho_1, \rho_2) = \frac{2hc^2}{f^2 M^5}, \tag{8}$$

где обозначено:

$$S(\rho_1, \rho_2) = (\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3\rho_1^2 + \mu_2\mu_3\rho_2^2)(\mu_1\mu_2 + \frac{\mu_1\mu_3}{\rho_1} + \frac{\mu_2\mu_3}{\rho_2})^2,$$

$$\rho_1 = \frac{r_{13}}{r_{12}}, \quad \rho_2 = \frac{r_{23}}{r_{12}}, \quad \mu_i = \frac{m_i}{M}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Числовое значение правой части (8) называется показателем устойчивости по Хиллу.

Надо отметить, что ни в работах Сундмана, ни в работах других авторов не было указано, может ли полное неравенство (5) обращаться в равенство и, если да, то при каких условиях.

Лишь в работе [6] было показано, что во всех типах лагранжевых движений (подробнее о частных решениях общей задачи трех тел, называемых лагранжевыми, см. в [1]) неравенство (5) обращается в равенство:

$$\frac{c^2}{J} + \frac{\dot{J}^2}{4J} = 2U + 2h, \quad h < 0, \tag{9}$$

т.е. условия лагранжевых движений являются необходимыми условиями обращения неравенства (5) в равенство (9). Возникает вопрос: являются ли условия лагранжевых движений достаточными условиями для этого? Изучая этот вопрос, мы составили следующее равенство, связывающее интегралы (3) и (4) (его справедливость можно проверить непосредственно заменив c, h, J, $\dot{J}$ на их выражения, получим интеграл (4)):

$$\begin{aligned} &c^2 + m\mu r'^2_{12}\,\rho'^2\,\dot\psi^2 + \frac{\dot{J}^2}{4} + m^2(\dot r'_{12}\, z_2 - \dot z_2 r'_{12})^2 + \\ &+ m\mu(\dot z_2\rho' - z_2\dot\rho')^2 + \\ &+ m\mu(r'_{12}\,\dot z_3 - z_3\dot r'_{12})^2 + \mu^2(\rho'\,\dot z_3 - z_3\dot\rho')^2 + \\ &+ m\mu(z_2\dot z_3 - z_3\dot z_2)^2 + \\ &+ m\mu(r'_{12}\,\dot\rho' - \rho'\,\dot r'_{12})^2 + m(mz_2^2 + \mu z_3^2)\cdot r'^2_{12}\,\dot\varphi^2 + \\ &+ \mu(mz_2^2 + \mu z_3^2)\rho'^2\,\dot\theta^2 = 2J(U+h). \end{aligned} \tag{10}$$

Отсюда легко получить условия обращения неравенства Сундмана (5) в равенство (9):

$$z_2 = z_3 = \dot z_2 = \dot z_3 = 0, \dot\psi = 0, r'_{12}\,\dot\rho' = \rho'\,\dot r'_{12}. \tag{11}$$

Таким образом, равенство в (5) может достигаться только в плоскости Лапласа и только при одновременном выполнении условий (11), которые и являются условиями лагранжевых движений. Этим доказано, что условия (11) являются и необходимыми и достаточными условиями обращения неравенства Сундмана (5) в равенство (9).

Теперь получим уравнение граничных многообразий в общей задаче трех тел, используя равенство (9).

Исходим из того, что равенство

$$1)\quad 0 < c^2 + \frac{\dot{J}^2}{4} = 2J(U+h), \tag{9'}$$

при любом $\dot{J}$ как-то ограничивает движение системы трех тел в фазовом пространстве и, в частности, по $r_{ij}, i, j = 1,2,3$.

2) В (9') $U + h > 0$, и $(U+h)\cdot J$ тем сильнее ограничено снизу, чем больше $\dot{J}^2$, и точная нижняя граница $(U+h)\cdot J$ соответствует $\dot{J}^2 = (\dot{J}^2)_{\max}$. Это согласуется с тем, что при $\dot{J}^2 = \dot{J}^2{}_{\max}$ будут наибольшими скорости $\dot r_{ij}$ разбегания масс m_1, m_2, m_3.

Если в некоторый изолированный момент t^* стало $\dot{J}^2 = (\dot{J}^2)_{\max}$, то $\ddot{J}(t^*) = 0$, и в силу известного тождества Лагранжа-Якоби [1]:

$$\ddot{J} = 2U + 4h, \tag{12}$$

имеем в этой области (т.е. нетождественно)

$$U = -2h. \tag{13}$$

При этом, из (12) следует, что если не рассматривать случай $\dot{J}^2 \equiv const > 0$ неограниченного роста $\dot{J}$, то останется только возможность: а) $\dot{J}^2 \equiv 0$, т.е. J= const, что соответствует круговым движениям и менее интересно, чем основной случай; б) $\dot{J}^2 = (\dot{J}^2)_{\max}$ нетождественно.

Из (9') в обеих случаях а) и б)

$$0 < c^2 \le (2U + 2h)\cdot J,$$

откуда в силу (11) имеем (т.к. $2h$= $-U$)

$$c^2 \le J \cdot U, \; JU^2 \ge -2hc^2.$$

В случае а) $\dot{J} \equiv 0$, тогда из (11) получим: $c^2 \equiv JU \equiv -2Jh$, откуда имеем

$$JU^2 \equiv -2hc^2.$$

В случае б) имеем $(\dot{J}^2)_{\max} > 0$ (т.к. $\dot{J}^2 \ge 0$, то при $(\dot{J}^2)_{\max} = 0$ имели бы $(\dot{J}^2) \equiv 0$, т. е. случай а)), поэтому из (9') в силу (11)(здесь мы имеем в виду выполнение (11) в изолированный момент времени t^*, а не как тождество), получим

$$0 < c^2 + \frac{(\dot{J}^2)_{\max}}{4} = JU.$$

Умножив это равенство на U, будем иметь

$$-2h(c^2 + \frac{(\dot{J}^2)_{\max}}{4}) = JU^2, \quad \text{или}$$

$$JU^2 = -2hc^2 - \frac{h(\dot{J}^2)_{\max}}{2}, h < 0. \tag{14}$$

Из (14) с учетом (13) получим точное уравнение граничных многообразий в общей задаче трех тел:

$$S(\rho_1, \rho_2) = -\frac{2hc^2}{f^2 M^5} - \frac{(\dot{J}^2)_{\max} h}{2 f^2 M^2}, \; h < 0. \tag{15}$$

Уравнение (15) можно преобразовать к виду:

$$S(\rho_1, \rho_2) = -\frac{2hc^2}{f^2 M^5 (1 - e^2)}, h < 0. \tag{16}$$

Здесь e общий эксцентриситет ($0 \le e < 1$) всех трех мгновенных орбит, эллиптически лагранжевых движений, возникших в момент попадания одного из тел, например P_3, в точку граничных многообразий.

$$JU^2 = -2hc^2 - \frac{h(\dot{J}^2)_{\max}}{2}, h < 0. \qquad (14)$$

Из (14) с учетом (13) получим точное уравнение граничных многообразий в общей задаче трех тел:

$$S(\rho_1, \rho_2) = -\frac{2hc^2}{f^2 M^5} - \frac{(\dot{J}^2)_{\max} h}{2 f^2 M^2}, \; h < 0. \qquad (15)$$

Уравнение (15) можно преобразовать к виду:

$$S(\rho_1, \rho_2) = -\frac{2hc^2}{f^2 M^5 (1 - e^2)}, h < 0. \qquad (16)$$

Здесь e общий эксцентриситет ($0 \le e < 1$) всех трех мгновенных орбит, эллиптически лагранжевых движений, возникших в момент попадания одного из тел, например P_3, в точку граничных многообразий.

В следующее мгновенье точка P_3 возвращается в область возможности движения и условия (11) лагранжевого движения пропадают.

Сравнивая правые части (8) и (15) (и (16)) видим, что правая часть т.е. показатель устойчивости по Хиллу уравнения (15) (или (16)) имеет большее значение, чем в уравнении В. Г. Голубева (8).

За счет этого топологические свойства граничных многообразий, выражаемые этими уравнениями, будут различаться.

Уравнение (15) (или (16)) выражает точную, более усиленную картину устойчивости по Хиллу (подробнее об устойчивости по Хиллу см. в работе [3]).

При $e = 0$ (или $(\dot{J}^2)_{\max} = 0$) уравнение (15) (значит и (16)) обращается в уравнение В. Г. Голубева (8).

ВЫВОДЫ

Таким образом, можно считать, что доказан критерий обращения в равенство неравенства Сундмана: для того, чтобы неравенство Сундмана обратилось в равенство, необходимо и достаточно, чтобы движение трех тел было лагранжевым. Это следует из (10). Получено точное уравнение граничных многообразий в общей задаче трех тел, которая не подлежит дальнейшему уточнению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дубошин, Г. Н.** Небесная механика. Основные задачи и методы / Г. Н. Дубошин. М. : Гос. изд-во физ.- мат. лит., 1963.
2. **Биркгоф, Дж. Д.** Динамические системы / Дж. Д. Биркгоф; пер. с англ. ; под ред. А. А. Маркова, В. В. Немыцкого и В. В. Степанова. М. : Гостехиздат, 1941.
3. **Голубев, В. Г.** Проблема трех тел в небесной механике / В. Г. Голубев, Е. А. Гребенников. М. : Изд-во МГУ, 1985, 240 с.
4. **Голубев, В. Г.** Об областях невозможности движений в задаче трёх тел / В. Г. Голубев // Док. АН СССР. 1967. Т. 174, № 4.
5. **Голубев, В. Г.** Об устойчивости по Хиллу в неограниченной задаче трех тел / В. Г. Голубев // Док. АН СССР. 1968. Т. 180, № 2.
6. **Голубев, В.Г.** Об устойчивости по Хиллу в неограниченной задаче трех тел : дис. ... канд. физ.-мат. наук / В. Г. Голубев. МЭИ, 1972.
7. **Рахимов, Ф. С.** Вывод неравенства Сундмана и интеграла Якоби из интегралов движения общей задачи трех тел / Ф. С. Рахимов // Письма в АЖ. 1977. Т. 3, № 1. С. 43–46.