

УДК 532.538

Н. М. ШЕРЫХАЛИНА, А. А. ОШМАРИН, Е. М. ОШМАРИНА

## ПРИМЕНИМОСТЬ «ПРИНЦИПА МАКСИМАЛЬНОГО РАСХОДА» ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ТЕЧЕНИЙ В ЦЕНТРОБЕЖНОЙ ФОРСУНКЕ

Анализируются возможные течения в центробежной форсунке путем решения модельных задач гидродинамики (расчета полей скоростей) и проверки выполнения принципа максимального расхода (ПМР). С помощью аналитических и численно-аналитических методов теории функций комплексного переменного решаются задачи о течении невязкой весомой жидкости, имеющие важные практические приложения в тех случаях, когда вязкостью жидкости можно пренебречь, например, в кавитационных течениях, течениях жидкости в гидротехнических сооружениях, а также в центробежных форсунках. Плоская модель; весомая жидкость; неустойчивость вихря

Во многих технических устройствах применяются центробежные форсунки. Например, они широко применяются в камерах сгорания газотурбинных двигателей (ГТД) и жидкостных ракетных двигателях (ЖРД) для распыливания топлива с последующим образованием топливо-воздушной смеси в камере сгорания ГТД и распыливания горючего и окислителя в камере сгорания ЖРД. Теория центробежной форсунки была разработана Г. Н. Абрамовичем [1], которая позволяет определить коэффициент расхода топлива в зависимости от размеров и формы форсунки и располагаемого напора. В приближенной теории центробежной форсунки не рассматривается влияние трения жидкости о стенки форсунки.

Приближенные решения не дают единственно возможного решения задачи, поэтому для разрешения неопределенности используются эмпирические или полуэмпирические закономерности. Для центробежной форсунки Г. Н. Абрамович, Л. А. Клячко, И. И. Новиков и В. И. Скобелькин применили «принцип максимального расхода» (ПМР), входящий в открытие «Закономерность расхода жидкости в закрученном потоке» [1]. Результаты стендовых и летных испытаний свидетельствуют о том, что теория центробежной форсунки Абрамовича удовлетворительно подтверждаются экспериментом как с качественной, так и с количественной стороны.

С другой стороны, незавершенность построения строгой теории центробежной фор-

сунки, в некоторой степени связанной с отсутствием конкретных адекватных гидродинамических и, соответственно, математических моделей, и до настоящего времени вызывает вопросы исследователей [2, 3].

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается осесимметричное движение жидкости, закрученной вдоль оси симметрии  $x$ . При этом  $V_{full}^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_\varphi^2$ ,  $V_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi r}$ .

При отсутствии влияния тяжести и постоянном давлении на свободной поверхности  $P = P_0$  уравнение (интеграл Бернулли)

$$\frac{\rho V^2}{2} + P = \text{const} \quad (1)$$

приводит к соотношениям

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2, \quad \frac{V^2}{2B} + \frac{Q^2 A^2}{2\pi^2 B R^4} \left(\frac{R}{r}\right)^2 = 1, \quad (2)$$

где  $A = R\Gamma/(2Q) = \text{const}$  – безразмерная величина, характеризующая закрутку.

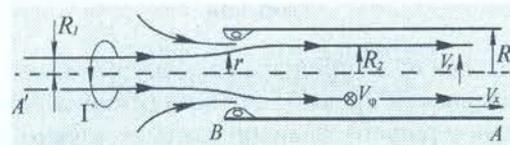


Рис. 1. Схема течения жидкости через центробежную форсунку с цилиндрическим насадком

$2B = V_{full}^2 = \text{const}_1$ . Это равенство представляет собой условие постоянства давления для осесимметричной задачи.

Предположим, что изменение  $y$  мало по сравнению с радиусом трубы  $R$ . Тогда условие (2) можно линеаризовать, положив  $r = R - y$

$$\frac{V^2}{V_0^2} + 2 \frac{\gamma^2}{(2\pi)^2} \left(\frac{h}{R}\right)^3 \frac{y}{h} = \text{const}_2. \quad (3)$$

Это уравнение сходно с полным уравнением Бернулли для плоского течения несжимаемой жидкости.

Таким образом, решение плоской задачи о течении несжимаемой жидкости приближенно может быть использовано для описания процессов в центробежной форсунке. Опыт сравнения плоских и осесимметричных течений показывает отсутствие качественных и существенных количественных различий. Для течения в трубе при небольших толщинах струи по сравнению с радиусом трубы различие исчезает.

Такие задачи решаются при исследовании течений в различных гидрооружиях, цунами и т. д.).

## 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассмотрим задачу об обтекании препятствия в виде прямолинейной полубесконечной пластины  $ABD$  потоком идеальной невязкой несжимаемой жидкости с образованием вихря с интенсивностью  $\Gamma < 0$ , расположенного в точке  $C$  (рис. 2). В точке  $E$ , расположенной ниже  $B$  по потоку, находящейся на границе замкнутой зоны течения вокруг вихря, скорость равна нулю. Таким течением может моделироваться поток жидкости в центробежной форсунке.

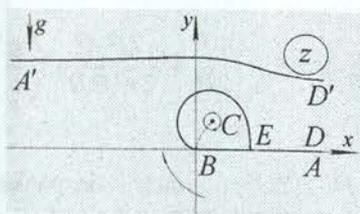


Рис. 2. Форма области течения на физической плоскости

В связи с принятыми допущениями об идеальности среды (течение потенциально и соленоидально) решение задачи можно получить в виде аналитической функции комплексного переменного  $w(z)$ , где  $z = x + iy$ ,

$w = \varphi + i\psi$  — комплексный потенциал,  $\varphi$  — потенциал течения,  $\psi$  — функция тока. Тогда  $\vec{V} = dw/dz$ , где вектор  $V$  представляет собой скорость частиц жидкости в стационарном или нестационарном плоском потоке.

Границы потока — непроницаемы. Область потока на плоскости комплексного потенциала является полоса с присоединенной полуполосой (рис. 3). Эта полуполоса есть образ ограниченной области потока вокруг вихря.

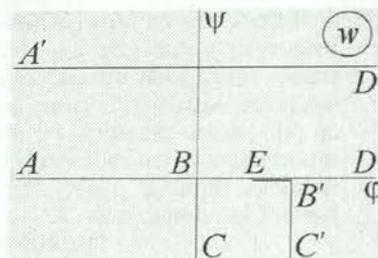


Рис. 3. Форма области течения на плоскости комплексного потенциала

## 3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Пусть скорость на бесконечности справа —  $V_0$ , асимптотическая толщина струи справа —  $h$ , сила тяжести действует вертикально вниз. На свободной поверхности  $AD$  значение модуля вектора скорости жидкости  $V$  связано с высотой точки  $y$  уравнением Бернулли

$$\frac{\rho V^2}{2} + \rho g y + P = \text{const},$$

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 + \frac{2y}{Fr^2 h} = \text{const}, \quad Fr = \frac{V_0}{\sqrt{gh}}. \quad (4)$$

На других участках границы имеют место следующие краевые условия:  $\theta = \pi$  на  $AB$ ,  $\theta = \pi$  на  $BE$ ,  $\theta = 0$  на  $ED$ , где  $\theta$  — угол наклона вектора скорости к оси  $x$ ,  $C$  — точка расположения вихря  $V_{rx1}$ ,  $E$  — критическая точка.

## 4. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Задача о течении несжимаемой жидкости решается методом коллокаций. Уравнение Бернулли выполняется в дискретных точках. При решении с помощью видоизмененного метода Леви-Чивиты функцию  $z(\zeta)$  будем искать в виде суммы степенного ряда и некоторых функций, учитывающих заданные особенности в точках

$$z(\zeta) = h(z_0(\zeta) + z_1(\zeta) + z_2(\zeta)),$$

где  $z_0(\zeta)$  — функция, отображающая полукруг на фигуру приближенно представляющую область течения с боковым разрезом

(решение аналогичной задачи для невесомой жидкости). Функция  $z_1(\zeta) = z(\zeta)/h - z_0(\zeta) - z_2(\zeta)$  имеет чисто действительные значения на действительном диаметре, аналитична внутри полукруга и непрерывна на границе. В связи с этим ее можно аналитически продолжить на весь круг и искать в виде сходящегося степенного ряда с действительными коэффициентами

$$z_1(\zeta) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \zeta^m. \quad (5)$$

Эта функция необходима для выполнения условия Бернулли. Функция  $z_2(\zeta)$  введена для учета особенности решения  $z(\zeta)$  при  $\zeta = 1$ .

Численно задача решается методом коллокаций. Для этого применяются алгоритмы, аналогичные описанным в [4]. В бесконечной сумме (5) сохраняется конечное число  $N$  слагаемых, а уравнение Бернулли выполняется в дискретных точках  $\sigma_m = \pi m / 2N, m = \overline{0, N}$ .

Тем самым получается система  $N$  нелинейных уравнений, которая решается численно методом Ньютона с регулированием шага относительно параметров  $C_m, m = \overline{0, N-4}, A_4, p, Fr$ . Оценка погрешности производится путем сравнения значений параметров (например, числа  $Fr$ , координаты точки  $B$  и др.), полученных при последовательном возрастании  $N$ , а также по максимальной невязке уравнения Бернулли, рассчитанной в промежуточных точках между узлами коллокаций. При этом  $y =$

$$\mathit{Im} z, V = \left| \frac{dw}{dz} \right| = \left| \frac{dw}{d\zeta} \right| \cdot \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|^{-1}.$$

Возможность изменения числа точек коллокаций  $N$  в совокупности с применением современных методов анализа результатов численного эксперимента [5] позволяет считать полученные оценки достаточно надежными.

## 5. ЧИСЛОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

### 5.1. Равновесный вихрь

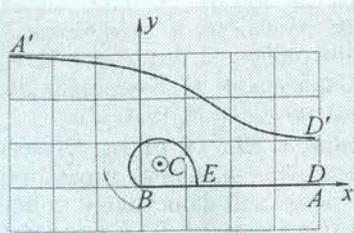


Рис. 4. Форма свободной поверхности и линии тока, разграничивающей основной поток и замкнутую вихревую зону

Форма свободной поверхности и линии тока, разграничивающей основной поток и замкнутую вихревую зону показаны на рис. 4. Численные данные, полученные при расчетах даны в табл. 1.

Таблица 1

Результаты расчетов для различных  $N$

$N$	$Fr$	$\gamma$	$y_A$	$Re p$	$Im p$
5	1,95420	-3,77607	2,90946	0,34751	0,20759
10	1,99908	-3,83170	2,99817	0,35074	0,20857
20	1,99966	-3,83243	2,99932	0,35078	0,20858
30	1,99987	-3,83271	2,99975	0,35080	0,20859
40	1,99994	-3,83279	2,99988	0,35080	0,20859
50	1,99996	-3,83282	2,99993	0,35081	0,20859
60	1,99998	-3,83284	2,99996	0,35081	0,20859
70	1,99998	-3,83284	2,99997	0,35081	0,20859

Некоторые результаты расчетов подтверждаются аналитически ( $Fr = 2, y_A = 3$ ).

Проведем исследование устойчивости свободного вихря. Для этого найдем зависимость  $\lambda = Re(F/(z(p) - z(p_0))) (\theta)$  при  $p = p_0 + \tau e^{i\theta}$ , где  $p_0$  — значение  $p$ , соответствующее свободному вихрю,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Результаты вычислений приведены на рис. 5. Кривая 1 на рис. 5 соответствует случаю фиксации точки схода границы вихревой зоны с пластины при изменении  $p$ . Кривая 2 на рис. 5 соответствует случаю фиксированной величины циркуляции вихря  $\gamma$  при изменении  $p$ . При этом условие  $2 + \frac{\gamma}{4i} \left( -2it + \frac{2it}{s^2 + t^2} \right) = 0$  не выполняется.

Поскольку при устойчивом равновесии  $\lambda = Re(F/(z(p) - z(p_0))) (\theta) < 0$ , то из результатов расчетов следует, что свободный вихрь и для данной задачи неустойчив.

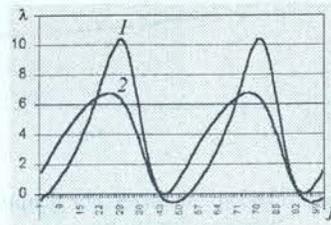


Рис. 5. К исследованию устойчивости равновесного вихря

### 5.2. Применение принципа максимального расхода

Выясним, существуют ли решения, соответствующие ПМР в задаче о течении весомой жидкости с наличием вихря.

Для исследования возможности реализации течения с максимальным расходом в задаче с вихрем были проведены расчеты, в которых положение образа вихря изменялось во всей области определения (в верхнем полукруге  $\zeta$ ). В табл. 2 приведены численные значения отношения расхода  $\bar{Q}$  к максимальному. Значения в строках соответствуют значениям  $|p| = j/10$ , в столбцах  $\arg(p) = \pi k/10$ .

Таблица 2  
Результаты расчетов  $\bar{Q}/\bar{Q}_{\max}$   
с разным положением вихря

$j \setminus k$	1	3	5	7	9
1	0,97700	0,97732	0,97764	0,97778	0,97783
2	0,95904	0,96809	0,97596	0,97816	0,97839
3	0,86675	0,90590	0,95750	0,97851	0,97946
4	0,70411	0,76927	0,87532	0,97351	0,98121
5	0,52110	0,59999	0,71914	0,91455	0,98393
6	0,35159	0,43658	0,53410	0,71908	0,98819
7	—	0,29800	0,36287	0,45328	0,99042

Таблица 3  
Результаты расчетов при отсутствии вихря

$N$	$Fr$	$\bar{Q}$	$y_A/h$
5	1,1946696162	0,5325702370	1,7136177460
10	1,1961658224	0,5324034659	1,7154063373
20	1,1976465316	0,5322374835	1,7171786073
30	1,1979075192	0,5322081312	1,7174912123
40	1,1979915464	0,5321986749	1,7175918726
50	1,1980267048	0,5321947173	1,7176339927
60	1,1980437980	0,5321927930	1,7176544709
70	1,1980529497	0,5321917627	1,7176654351
80	1,1980581822	0,5321911736	1,7176717040

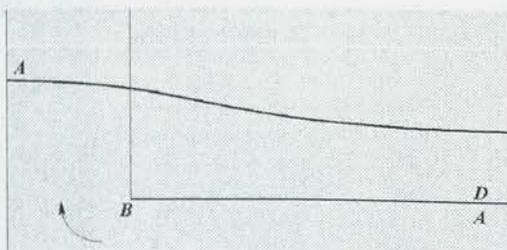


Рис. 6. Форма свободной поверхности при безотрывном обтекании

Видно, что для  $Re p \geq 0$  (столбцы, соответствующие  $k \leq 5$ ) значения расхода не доходят до максимального. Увеличение  $\bar{Q}$  наблюдается при  $|p| \rightarrow 1$  и  $\arg(p)$  близких к  $\pi$ . Однако при  $Re p < 0$  вихрь перемещается на нижнюю поверхность пластины, а при  $|p| \rightarrow 1$  интенсивность вихря и размеры замкнутой вихревой области стремятся к бесконечности.

В пределе при  $|p| \rightarrow 1$ ,  $Fr \rightarrow 1$  верхняя граница «размывается» в пространстве, волновой склон уходит налево в бесконечность. Образуется равномерное течение, как и в задаче об обтекании вихря над прямолинейной стенкой, рассмотренной в [5]. Однако такое течение не может быть использовано для моделирования течения в центробежной форсунке.

### 5.3. Решения, близкие к безотрывному течению

Рассмотрим первую строку табл. 2, соответствующую малым значениям  $|p|$ , т. е. режимам, близким к безотрывному обтеканию. Величина расхода для них весьма близка к максимальному, хотя и не равна ему. При безотрывном обтекании значения  $y_A/h$   $h \approx 1,717$ ,  $\Gamma = 0$ . Результаты расчетов этого случая приведены в табл. 3. Форма свободной поверхности при отсутствии вихря приведена на рис. 6.

### ВЫВОДЫ

Численные результаты показали, что в задаче о течении несжимаемой жидкости с наличием вихря строгое применение принципа максимального расхода приводит, с физической точки зрения, к парадоксальным результатам. Так, максимальное значение расхода жидкости получается, когда течение представляет собой плоскопараллельный поток, не имеющий отношения к моделированию течения в центробежной форсунке.

С другой стороны, равновесный вихрь является неустойчивым.

В связи с этим наиболее близкими к реальности следует считать течения с малой зоной вихревого движения. При этом значения расхода близки к максимальному (отношение около 0,98), хотя другие параметры отличаются на более значительные величины (например, число Фруда 1,198 против 1, высота точки A 1,718 против 1,5 и т. д.).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Диплом № 389 от 18.10.90. Закономерность расхода жидкости в закрученном потоке / Г. Н. Абрамович, Л. А. Клячко, И. И. Новиков, В. И. Скобелькин // Бюллетень изобретений и открытий. 1991. № 19. С. 2.
2. Степанов, Г. Ю. О статье Луговцова Б. А. «Определение основных параметров течения в центробежной форсунке с помощью законов сохранения» / Г. Ю. Степанов // ПМТФ. 1991. № 4.
3. Луговцов, Б. А. О принципе максимального расхода / Б. А. Луговцов // ПМТФ. 1991. № 4.

4. **Житников, В. П.** Исследование закритических режимов в нелинейной задаче о движении вихря под свободной поверхностью весомой жидкости / В. П. Житников, Н. М. Шерыхалина, О. И. Шерыхалин // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 1. С. 70–76.
5. **Житников, В. П.** Численно-аналитические методы решения задач об обтекании препятствий под поверхностью весомой жидкости с образованием солитона / В. П. Житников, Н. М. Шерыхалина // Вычислительные технологии. 2000. Т. 5, № 2. С. 35–45.

#### ОБ АВТОРАХ



**Шерыхалина Наталия Михайловна**, доц. каф. компьютер. мат. Дипл. инж. (УГАТУ, 1993). Канд. физ.-мат. наук (БГУ, 1996). Иссл. в обл. волновых течений жидкости, уединенных волн, методов оценки погрешности численных результатов.



**Ошмарин Алексей Александрович**, ст. преп. той же каф. Дипл. инж. по прогр. обеспеч. (УГАТУ, 2003). Канд. физ.-мат. наук по механике жидкости, газа и плазмы (Баш. гос. ун-т, 2006). Иссл. в обл. течений жидкости в техн. устройствах.



**Ошмарина Елена Михайловна**, аспирантка, ст. преп. той же каф. Дипл. преп. мат. и информат. (УГПУ, 2002). Готовит дис. в обл. течений жидкости, числ.-аналит. методов.