

УДК 539.4

В. С. ЖЕРНАКОВ, В. П. ПАВЛОВ

ПРОЧНОСТЬ ОБОЛОЧЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ СТЕКЛОПЛАСТИКОВ ПРИ ПОВЫШЕННЫХ И ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Приведена методика расчета стеклопластиковых оболочечных элементов конструкций на прочность при высоких температурах. Она разработана на основе новых технических решений таких проблем как: экспериментальное изучение физико-механических свойств стеклопластиков при высоких нестационарных температурах, построение математических моделей, описывающих эти свойства, построение разностного аналога применяемой модели ползучести, построение уравнений равновесия для деталей произвольной формы и численного решения полученных уравнений. Рассматривается стеклопластик, применяющийся для изготовления элементов конструкций авиационной и космической техники, работающих при повышенных и высоких температурах. Оболочки; стеклопластики; тепловые деформации; ползучесть; прочность

Стеклопластики широко применяются для изготовления оболочечных элементов конструкций авиационной и космической техники, работающих при высоких температурах. В связи с этим возникает задача расчета конструкций из стеклопластиков на прочность при высоких температурах. Для решения этой задачи необходимо решить ряд сложных проблем, к основными из которых относятся: экспериментальное изучение физико-механических свойств стеклопластиков при высоких нестационарных температурах, построение математических моделей, описывающих эти свойства, построение разностного аналога применяемой модели ползучести, построение уравнений равновесия для оболочек произвольной формы и численное решение построенных уравнений. В данной работе построена методика расчета стеклопластиковых оболочек на прочность при высоких температурах.

1. ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТЕКЛОПЛАСТИКА

Рассматриваются оболочки из стеклопластика КТ-11-К-Ф, для которого экспериментально изучены [2] тепловая деформация, прочность и ползучесть при высоких постоянных и переменных во времени температурах.

Математическая модель теплового деформирования данного стеклопластика имеет

следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_T}{dT} &= 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ при } T \leq 156^\circ\text{C}, \\ \frac{d\varepsilon_T}{dT} &= 2,5 \cdot 10^{-5} - 1,04 \cdot 10^{-6}(T - 156) \\ &\text{при } 156 < T \leq 180^\circ\text{C}, \\ \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_T(t) &= \lambda(t') - \lambda(0) + \varepsilon_{T180}, \\ &\text{при } T > T_s = 180^\circ\text{C}, \\ t' &= \int_0^t a[T(\rho)] d\rho, \quad a(T) = 10^{0,009(T-180)}, \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (1)$$

где ε_{T180} — тепловая деформация при температуре, соответствующей началу термической деструкции $T = T_s = 180^\circ\text{C}$, $\lambda(t')$ — обобщенная функция теплового деформирования, конкретный вид которой представлен в работе [2].

Для описания ползучести стеклопластика КТ-11-К-Ф при высоких переменных во времени температурах разработана [2] математическая модель, которая имеет вид дифференциального уравнения первого порядка с коэффициентами a , b , c , зависящими от температуры T

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + a(T)\varepsilon = b(T)\frac{d\sigma}{dt} + c(T)\sigma + \frac{db}{dT}\frac{dT}{dt}\sigma. \quad (2)$$

Температурные зависимости коэффициентов $a(T)$, $b(T)$, $c(T)$ для стеклопластика

КТ-11-К-Ф определены экспериментально и представлены в форме аналитических выражений в работе [2], там же дана экспериментальная зависимость предела прочности композита $\sigma_{пч}$ от температуры T .

2. ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ УРАВНЕНИЙ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЛЯ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

При расчете оболочек из стеклопластика с учетом ползучести при высоких температурах применен пошаговый метод, когда напряженно-деформированное состояние рассматривается в последовательные моменты времени t_n , $n = 1, \dots, N$, из которых формируется сетка времен $\Omega = (t_n, n = 1, \dots, N)$, на которой построен дискретный аналог уравнений ползучести стеклопластиков.

При дискретизации уравнений ползучести стеклопластик КТ-11-К-Ф рассматривается как ортотропное тело, в каждой точке которого температура является функцией пространственных обобщенных координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и времени t

$$T = T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t). \quad (3)$$

Для температурного поля (3) по модели теплового деформирования (1) определяются тепловые деформации $\varepsilon_{xT}, \varepsilon_{yT}, \varepsilon_{zT}$ вдоль осей ортотропии материала X, Y, Z как функции обобщенных координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и времени t

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xT} &= \varepsilon_{xT}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t), \\ \varepsilon_{yT} &= \varepsilon_{yT}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t), \\ \varepsilon_{zT} &= \varepsilon_{zT}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t). \end{aligned} \quad (4)$$

Припимается, что в оболочке имеет место плоское напряженное состояние, для которого рассматриваются деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ и напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ в плоскости осей ортотропии упругих свойств X, Y .

Полные деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ определяются как суммы деформаций от напряжений $\varepsilon_x^{(\sigma_x)}, \varepsilon_x^{(\sigma_y)}, \varepsilon_y^{(\sigma_x)}, \varepsilon_y^{(\sigma_y)}, \gamma_{xy}^{(\tau_{xy})}$ и тепловых деформаций $\varepsilon_{xT}, \varepsilon_{yT}$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^{(\sigma_x)} + \varepsilon_x^{(\sigma_y)} + \varepsilon_{xT}, \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^{(\sigma_x)} + \varepsilon_y^{(\sigma_y)} + \varepsilon_{yT}, \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^{(\tau_{xy})}. \end{aligned} \quad (5)$$

Связь между напряжениями $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ и деформациями $\varepsilon_x^{(\sigma_x)}, \varepsilon_x^{(\sigma_y)}, \varepsilon_y^{(\sigma_x)}, \varepsilon_y^{(\sigma_y)}, \gamma_{xy}^{(\tau_{xy})}$

описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_x^{(\sigma_x)}}{\partial t} + a_{\varepsilon_x}^{(\sigma_x)} \varepsilon_x^{(\sigma_x)} &= \\ &= b_{\varepsilon_x}^{(\sigma_x)} \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} + c_{\varepsilon_x}^{(\sigma_x)} \sigma_x + \frac{db_{\varepsilon_x}^{(\sigma_x)}}{dT} \frac{\partial T}{\partial t} \sigma_x, \\ \frac{\partial \varepsilon_x^{(\sigma_y)}}{\partial t} + a_{\varepsilon_x}^{(\sigma_y)} \varepsilon_x^{(\sigma_y)} &= \\ &= b_{\varepsilon_x}^{(\sigma_y)} \frac{\partial \sigma_y}{\partial t} + c_{\varepsilon_x}^{(\sigma_y)} \sigma_y + \frac{db_{\varepsilon_x}^{(\sigma_y)}}{dT} \frac{\partial T}{\partial t} \sigma_y, \\ \frac{\partial \varepsilon_y^{(\sigma_x)}}{\partial t} + a_{\varepsilon_y}^{(\sigma_x)} \varepsilon_y^{(\sigma_x)} &= \\ &= b_{\varepsilon_y}^{(\sigma_x)} \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} + c_{\varepsilon_y}^{(\sigma_x)} \sigma_x + \frac{db_{\varepsilon_y}^{(\sigma_x)}}{dT} \frac{\partial T}{\partial t} \sigma_x, \\ \frac{\partial \varepsilon_y^{(\sigma_y)}}{\partial t} + a_{\varepsilon_y}^{(\sigma_y)} \varepsilon_y^{(\sigma_y)} &= \\ &= b_{\varepsilon_y}^{(\sigma_y)} \frac{\partial \sigma_y}{\partial t} + c_{\varepsilon_y}^{(\sigma_y)} \sigma_y + \frac{db_{\varepsilon_y}^{(\sigma_y)}}{dT} \frac{\partial T}{\partial t} \sigma_y, \\ \frac{\partial \gamma_{xy}^{(\tau_{xy})}}{\partial t} + a_{\gamma_{xy}}^{(\tau_{xy})} \gamma_{xy}^{(\tau_{xy})} &= \\ &= b_{\gamma_{xy}}^{(\tau_{xy})} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} + c_{\gamma_{xy}}^{(\tau_{xy})} \tau_{xy} + \frac{db_{\gamma_{xy}}^{(\tau_{xy})}}{dT} \frac{\partial T}{\partial t} \tau_{xy}, \end{aligned} \quad (6)$$

коэффициенты которых являются функциями от температуры T

$$\begin{aligned} a_{\varepsilon_x}^{(\sigma_x)} &= a_{\varepsilon_x}^{(\sigma_x)}(T), \\ b_{\varepsilon_x}^{(\sigma_x)} &= b_{\varepsilon_x}^{(\sigma_x)}(T), \\ c_{\varepsilon_x}^{(\sigma_x)} &= c_{\varepsilon_x}^{(\sigma_x)}(T), \\ &\dots \\ a_{\gamma_{xy}}^{(\tau_{xy})} &= a_{\gamma_{xy}}^{(\tau_{xy})}(T), \\ b_{\gamma_{xy}}^{(\tau_{xy})} &= b_{\gamma_{xy}}^{(\tau_{xy})}(T), \\ c_{\gamma_{xy}}^{(\tau_{xy})} &= c_{\gamma_{xy}}^{(\tau_{xy})}(T). \end{aligned} \quad (7)$$

Подстановка (3) в (6) приводит к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_x^{(\sigma_x)}}{\partial t} + A_{\varepsilon_x}^{(\sigma_x)} \varepsilon_x^{(\sigma_x)} &= B_{\varepsilon_x}^{(\sigma_x)} \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} + F_{\varepsilon_x}^{(\sigma_x)} \sigma_x, \\ \frac{\partial \varepsilon_x^{(\sigma_y)}}{\partial t} + A_{\varepsilon_x}^{(\sigma_y)} \varepsilon_x^{(\sigma_y)} &= B_{\varepsilon_x}^{(\sigma_y)} \frac{\partial \sigma_y}{\partial t} + F_{\varepsilon_x}^{(\sigma_y)} \sigma_y, \\ \frac{\partial \varepsilon_y^{(\sigma_x)}}{\partial t} + A_{\varepsilon_y}^{(\sigma_x)} \varepsilon_y^{(\sigma_x)} &= B_{\varepsilon_y}^{(\sigma_x)} \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} + F_{\varepsilon_y}^{(\sigma_x)} \sigma_x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_y^{(\sigma y)}}{\partial t} + A_{\varepsilon_y}^{(\sigma y)} \varepsilon_y^{(\sigma y)} &= B_{\varepsilon_y}^{(\sigma y)} \frac{\partial \sigma_y}{\partial t} + F_{\varepsilon_y}^{(\sigma y)} \sigma_y, \\ \frac{\partial \gamma_{xy}^{(\tau xy)}}{\partial t} + A_{\gamma_{xy}}^{(\tau xy)} \gamma_{xy}^{(\tau xy)} &= B_{\gamma_{xy}}^{(\tau xy)} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} + F_{\gamma_{xy}}^{(\tau xy)} \tau_{xy}, \end{aligned} \quad (8)$$

коэффициенты которых являются функциями от времени t и координат рассматриваемой точки $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\begin{aligned} A_{\varepsilon_x}^{(\sigma x)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t) &= a_{\varepsilon_x}^{(\sigma x)}[T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t)], \\ B_{\varepsilon_x}^{(\sigma x)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t) &= b_{\varepsilon_x}^{(\sigma x)}[T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t)], \\ F_{\varepsilon_x}^{(\sigma x)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t) &= c_{\varepsilon_x}^{(\sigma x)}[T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t)] + \\ &+ \frac{db_{\varepsilon_x}^{(\sigma x)}}{dT} \frac{\partial T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t)}{\partial t}, \\ &\dots \\ F_{\gamma_{xy}}^{(\tau xy)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t) &= c_{\gamma_{xy}}^{(\tau xy)}[T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t)] + \\ &+ \frac{db_{\gamma_{xy}}^{(\tau xy)}}{dT} \frac{\partial T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (9)$$

Для напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ и вызываемых ими деформаций $\varepsilon_x^{(\sigma x)}, \varepsilon_x^{(\sigma y)}, \varepsilon_y^{(\sigma y)}, \varepsilon_y^{(\sigma x)}, \gamma_{xy}^{(\tau xy)}$ в моменты времени $t_n, n = 1, \dots, N$ введены обозначения

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(n)} &= \sigma_x(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t_n), \\ \sigma_y^{(n)} &= \sigma_y(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t_n), \\ \tau_{xy}^{(n)} &= \tau_{xy}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t_n), \\ \varepsilon_x^{(\sigma x), (n)} &= \varepsilon_x^{(\sigma x)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t_n), \\ \varepsilon_x^{(\sigma y), (n)} &= \varepsilon_x^{(\sigma y)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t_n), \\ \varepsilon_y^{(\sigma x), (n)} &= \varepsilon_y^{(\sigma x)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t_n), \\ \varepsilon_y^{(\sigma y), (n)} &= \varepsilon_y^{(\sigma y)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t_n), \\ \gamma_{xy}^{(\tau xy), (n)} &= \gamma_{xy}^{(\tau xy)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t_n), \\ n &= 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (10)$$

В применяемом пошаговом методе последовательно рассматриваются отрезки времени $[t_n, t_{n+1}], n = 1, \dots, N - 1$, в пределах каждого из которых напряжения и деформации от напряжений аппроксимированы линейными функциями

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(\sigma x)}(\xi) &= k_{x,0}^{(\sigma x)} + k_{x,1}^{(\sigma x)} \xi, \\ \varepsilon_x^{(\sigma y)}(\xi) &= k_{x,0}^{(\sigma y)} + k_{x,1}^{(\sigma y)} \xi, \\ \varepsilon_y^{(\sigma x)}(\xi) &= k_{y,0}^{(\sigma x)} + k_{y,1}^{(\sigma x)} \xi, \\ \varepsilon_y^{(\sigma y)}(\xi) &= k_{y,0}^{(\sigma y)} + k_{y,1}^{(\sigma y)} \xi, \\ \gamma_{xy}^{(\tau xy)}(\xi) &= k_{xy,0}^{(\tau xy)} + k_{xy,1}^{(\tau xy)} \xi, \\ \sigma_y(\xi) &= S_{y,0} + S_{y,1} \xi, \\ \sigma_x(\xi) &= S_{x,0} + S_{x,1} \xi, \\ \tau_{xy}(\xi) &= S_{xy,0} + S_{xy,1} \xi, \\ \xi &= t - t_n, \quad t \in [t_n, t_{n+1}], \\ n &= 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (11)$$

Выражения (11) подставлены в дифференциальные уравнения (8) и после ряда преобразований приведены к виду

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(\sigma x), (n+1)} &= R_x^{(\sigma x), (n+1)} \sigma_x^{(n+1)} + S_x^{(\sigma x), (n+1)}, \\ \varepsilon_x^{(\sigma y), (n+1)} &= R_x^{(\sigma y), (n+1)} \sigma_y^{(n+1)} + S_x^{(\sigma y), (n+1)}, \\ \varepsilon_y^{(\sigma x), (n+1)} &= R_y^{(\sigma x), (n+1)} \sigma_x^{(n+1)} + S_y^{(\sigma x), (n+1)}, \\ \varepsilon_y^{(\sigma y), (n+1)} &= R_y^{(\sigma y), (n+1)} \sigma_y^{(n+1)} + S_y^{(\sigma y), (n+1)}, \\ \gamma_{xy}^{(\tau xy), (n+1)} &= R_{xy}^{(\tau xy), (n+1)} \tau_{xy}^{(n+1)} + S_{xy}^{(\tau xy), (n+1)}, \\ n &= 1, \dots, N - 1, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} R_x^{(\sigma x), (n+1)} &= (B_{\varepsilon_x}^{(\sigma x), (n+1)} + \\ &+ \Delta t_n F_{\varepsilon_x}^{(\sigma x), (n+1)}) / (1 + \Delta t_n A_{\varepsilon_x}^{(\sigma x), (n+1)}), \\ S_x^{(\sigma x), (n+1)} &= (\varepsilon_x^{(\sigma x), (n)} - \\ &- B_{\varepsilon_x}^{(\sigma x), (n+1)} \sigma_x^{(n)}) / (1 + \Delta t_n A_{\varepsilon_x}^{(\sigma x), (n+1)}), \\ R_x^{(\sigma y), (n+1)} &= (B_{\varepsilon_x}^{(\sigma y), (n+1)} + \\ &+ \Delta t_n F_{\varepsilon_x}^{(\sigma y), (n+1)}) / (1 + \Delta t_n A_{\varepsilon_x}^{(\sigma y), (n+1)}), \\ S_x^{(\sigma y), (n+1)} &= (\varepsilon_x^{(\sigma y), (n)} - \\ &- B_{\varepsilon_x}^{(\sigma y), (n+1)} \sigma_y^{(n)}) / (1 + \Delta t_n A_{\varepsilon_x}^{(\sigma y), (n+1)}), \\ R_y^{(\sigma x), (n+1)} &= (B_{\varepsilon_y}^{(\sigma x), (n+1)} + \\ &+ \Delta t_n F_{\varepsilon_y}^{(\sigma x), (n+1)}) / (1 + \Delta t_n A_{\varepsilon_y}^{(\sigma x), (n+1)}), \\ S_y^{(\sigma x), (n+1)} &= (\varepsilon_y^{(\sigma x), (n)} - \\ &- B_{\varepsilon_y}^{(\sigma x), (n+1)} \sigma_x^{(n)}) / (1 + \Delta t_n A_{\varepsilon_y}^{(\sigma x), (n+1)}), \\ R_y^{(\sigma y), (n+1)} &= (B_{\varepsilon_y}^{(\sigma y), (n+1)} + \\ &+ \Delta t_n F_{\varepsilon_y}^{(\sigma y), (n+1)}) / (1 + \Delta t_n A_{\varepsilon_y}^{(\sigma y), (n+1)}), \\ S_y^{(\sigma y), (n+1)} &= (\varepsilon_y^{(\sigma y), (n)} - \\ &- B_{\varepsilon_y}^{(\sigma y), (n+1)} \sigma_y^{(n)}) / (1 + \Delta t_n A_{\varepsilon_y}^{(\sigma y), (n+1)}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{xy}^{(\tau xy), (n+1)} &= (B_{\gamma xy}^{(\tau xy), (n+1)} + \\
 &+ \Delta t_n F_{\gamma xy}^{(\tau xy), (n+1)}) / (1 + \Delta t_n A_{\gamma xy}^{(\tau xy), (n+1)}), \\
 S_{xy}^{(\tau xy), (n+1)} &= (\gamma_{xy}^{(\tau xy), (n)} - \\
 &- B_{\gamma xy}^{(\tau xy), (n+1)} \tau_{xy}^{(n)}) / (1 + \Delta t_n A_{\gamma xy}^{(\tau xy), (n+1)}), \\
 \Delta t &= t_{n+1} - t_n, \quad n = 1, \dots, N-1.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Для полных ε_x , ε_y , γ_{xy} и тепловых ε_{xT} , ε_{yT} деформаций в моменты времени t_n , $n = 1, \dots, N$ введены обозначения

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x^{(n)} &= \varepsilon_x(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t_n), \\
 \varepsilon_{xT}^{(n)} &= \varepsilon_{xT}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t_n), \\
 \varepsilon_y^{(n)} &= \varepsilon_y(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t_n), \\
 \varepsilon_{yT}^{(n)} &= \varepsilon_{yT}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t_n), \\
 \gamma_{xy}^{(n)} &= \gamma_{xy}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t_n), \quad n = 1, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{14}$$

При подстановке (12) в (5) с учетом обозначений (14) для момента времени t_{n+1} , $n = 1, \dots, N-1$ получено

$$\begin{aligned}
 R_x^{(\sigma x), (n+1)} \sigma_x^{(n+1)} + R_x^{(\sigma y), (n+1)} \sigma_y^{(n+1)} &= \\
 = \varepsilon_x^{(n+1)} - \varepsilon_{xT}^{(n+1)} - S_x^{(\sigma x), (n+1)} - S_x^{(\sigma y), (n+1)}, \\
 R_y^{(\sigma x), (n+1)} \sigma_x^{(n+1)} + R_y^{(\sigma y), (n+1)} \sigma_y^{(n+1)} &= \\
 = \varepsilon_y^{(n+1)} - \varepsilon_{yT}^{(n+1)} - S_y^{(\sigma x), (n+1)} - S_y^{(\sigma y), (n+1)}, \\
 R_{xy}^{(\tau xy), (n+1)} \tau_{xy}^{(n+1)} &= \gamma_{xy}^{(n+1)} - S_{xy}^{(\tau xy), (n+1)}, \\
 n &= 1, \dots, N-1.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Из системы уравнений (15) определены напряжения $\sigma_x^{(n+1)}$, $\sigma_y^{(n+1)}$, $\tau_{xy}^{(n+1)}$

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^{(n+1)} &= E_{x,x}^{(n+1)} \varepsilon_x^{(n+1)} + E_{x,y}^{(n+1)} \varepsilon_y^{(n+1)} + q_x^{(n+1)}, \\
 \sigma_y^{(n+1)} &= E_{y,x}^{(n+1)} \varepsilon_x^{(n+1)} + E_{y,y}^{(n+1)} \varepsilon_y^{(n+1)} + q_y^{(n+1)}, \\
 \tau_{xy}^{(n+1)} &= G_{xy}^{(n+1)} \gamma_{xy}^{(n+1)} + q_{xy}^{(n+1)},
 \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned}
 E_{x,x}^{(n+1)} &= R_y^{(\sigma y), (n+1)} / V, \\
 E_{x,y}^{(n+1)} &= -R_x^{(\sigma y), (n+1)} / V, \\
 E_{y,x}^{(n+1)} &= -R_y^{(\sigma x), (n+1)} / V, \\
 E_{y,y}^{(n+1)} &= R_x^{(\sigma x), (n+1)} / V, \\
 V &= R_x^{(\sigma x), (n+1)} R_y^{(\sigma y), (n+1)} - \\
 &- R_y^{(\sigma x), (n+1)} R_x^{(\sigma y), (n+1)}, \\
 G_{xy}^{(n+1)} &= 1 / R_{xy}^{(\tau xy), (n+1)},
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
 q_x^{(n+1)} &= -E_{x,x}^{(n+1)} (\varepsilon_{xT}^{(n+1)} + \\
 &+ S_x^{(\sigma x), (n+1)} + S_x^{(\sigma y), (n+1)}) - \\
 &- E_{x,y}^{(n+1)} (\varepsilon_{yT}^{(n+1)} + S_y^{(\sigma x), (n+1)} + S_y^{(\sigma y), (n+1)}), \\
 q_y^{(n+1)} &= -E_{y,x}^{(n+1)} (\varepsilon_{xT}^{(n+1)} + S_x^{(\sigma x), (n+1)} + \\
 &+ S_x^{(\sigma y), (n+1)}) - E_{y,y}^{(n+1)} (\varepsilon_{yT}^{(n+1)} + \\
 &+ S_y^{(\sigma x), (n+1)} + S_y^{(\sigma y), (n+1)}), \\
 q_{xy}^{(n+1)} &= -G_{xy}^{(n+1)} S_{xy}^{(\tau xy), (n+1)}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

3. МАТРИЧНЫЙ МЕТОД ФОРМИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ОБОЛОЧКИ

Для оболочек произвольного очертания с неоднородным температурным полем и переменными по объему физико-механическими характеристиками материала практически невозможно построить традиционным «ручным» способом дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях. Поэтому в работе предлагается матричный метод формирования уравнений равновесия, реализованный на ЭВМ. Данный метод снимает все ограничения на геометрию оболочки, механические характеристики ее материала, на температурное поле и на характеристики внешней силовой нагрузки. Рассмотрим далее идеологию этого метода.

3.1. Соотношения связи между параметрами деформации базовой поверхности и внутренними усилиями

Оболочка рассматривается [3] в системе криволинейных координат α_1 , α_2 , α_3 , где координатные линии α_1 , α_2 направлены вдоль линий главных кривизн базовой поверхности, α_3 -линия — перпендикулярно к α_1 , α_2 .

Деформация оболочки определяется зависящими от α_1 , α_2 и t функциями перемещений u_1 , u_2 , u_3 точек ее срединной поверхности вдоль координатных направлений α_1 , α_2 , α_3 ,

$$\begin{aligned}
 u_1 &= u_1(\alpha_1, \alpha_2, t), \\
 u_2 &= u_2(\alpha_1, \alpha_2, t), \\
 u_3 &= u_3(\alpha_1, \alpha_2, t).
 \end{aligned} \tag{19}$$

Из значений функций перемещений u_1, u_2, u_3 и производных от них сформирован вектор $H = (H_i, i = 1, \dots, 12)^T$, имеющий структуру

$$H = \left(u_1, u_2, u_3, \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha_1^2}, \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha_2^2} \right)^T. \quad (20)$$

Деформация базовой поверхности оболочки определяется вектором R , включающим [3] шесть параметров деформации: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}, \chi_1, \chi_2, \tau$

$$R = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}, \chi_1, \chi_2, \tau)^T. \quad (21)$$

Связь между векторами H и R представлена матричным выражением

$$R = GH, \quad (22)$$

где компоненты матрицы $G = \|G_{ij}, i = 1, 2, \dots, 6, j = 1, 2, \dots, 12\|$ определяются через параметры Ляме оболочки A_1 и A_2 и производные от них по криволинейным координатам α_1, α_2 соотношениями из работы [3].

Из деформаций $\varepsilon_{11}^{(\alpha_3)}, \varepsilon_{22}^{(\alpha_3)}, \gamma_{12}^{(\alpha_3)}$, возникающих в слое оболочки с координатой α_3 , сформирован вектор

$$\varepsilon_{(\alpha_3)} = (\varepsilon_{11}^{(\alpha_3)}, \varepsilon_{22}^{(\alpha_3)}, \gamma_{12}^{(\alpha_3)})^T. \quad (23)$$

Вектор $\varepsilon_{(\alpha_3)}$ выражен через R матричным соотношением

$$\varepsilon_{(\alpha_3)} = D_{(\alpha_3)} R, \quad (24)$$

в котором матрица $D_{(\alpha_3)} = \|d_{rs}^{(\alpha_3)}\| = 0, r = 1, 2, 3, s = 1, 2, \dots, 6\|$ имеет компоненты, определяемые соотношениями из [3].

В слоях оболочки возникают напряжения $\sigma_{11}^{(\alpha_3)}, \sigma_{22}^{(\alpha_3)}, \tau_{12}^{(\alpha_3)}$, из которых сформирован вектор

$$\sigma_{(\alpha_3)} = (\sigma_{11}^{(\alpha_3)}, \sigma_{22}^{(\alpha_3)}, \tau_{12}^{(\alpha_3)})^T. \quad (25)$$

Связь между векторами $\sigma_{(\alpha_3)}$ и $\varepsilon_{(\alpha_3)}$ по отношению к системе координат, заданной ортами e_1, e_2, e_3 , направленными вдоль координатных направлений $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, записана в матричной форме

$$\sigma_{(\alpha_3)} = E_{(\alpha_3)} \varepsilon_{(\alpha_3)} + q_{(\alpha_3)}, \quad (26)$$

где $E_{(\alpha_3)} = \|E_{rs}^{(\alpha_3)}\|, r = 1, 2, 3, s = 1, 2, 3\|$ — матрица жесткости материала в рассматриваемой точке, $q_{(\alpha_3)} = (q_r^{(\alpha_3)}, r = 1, 2, 3)^T$ — вектор добавочных напряжений, возникающих вследствие тепловых деформаций и ползучести материала.

При рассмотрении конструкций из слоистых композитов обычно известны их упругие или вязкоупругие свойства по отношению к неизменно связанным с материалом слоя ортогональным осям X, Y, Z , в общем случае не совпадающим с направлением ортов сопровождающего базиса e_1, e_2, e_3 . В связи с этим сформированы векторы из напряжений, деформаций и условных добавочных напряжений, отнесенных к координатной системе главных осей ортотропии X, Y, Z

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{(\alpha_3)} &= (\sigma_x^{(\alpha_3)}, \sigma_y^{(\alpha_3)}, \tau_{xy}^{(\alpha_3)})^T, \\ \hat{\varepsilon}_{(\alpha_3)} &= (\varepsilon_x^{(\alpha_3)}, \varepsilon_y^{(\alpha_3)}, \gamma_{xy}^{(\alpha_3)})^T, \\ \hat{q}_{(\alpha_3)} &= (q_x^{(\alpha_3)}, q_y^{(\alpha_3)}, q_{xy}^{(\alpha_3)})^T. \end{aligned} \quad (27)$$

Связь между данными векторами записана в матричной форме

$$\hat{\sigma}_{(\alpha_3)} = \hat{E}_{(\alpha_3)} \hat{\varepsilon}_{(\alpha_3)} + \hat{q}_{(\alpha_3)}, \quad (28)$$

где $\hat{E}_{(\alpha_3)} = \|\hat{E}_{rs}^{(\alpha_3)}\|, r = 1, 2, 3, s = 1, 2, 3\|$ — матрица жесткости материала в рассматриваемой точке по отношению к системе координатных осей X, Y, Z .

Вектор $\hat{\sigma}_{(\alpha_3)}$ выражен через вектор $\sigma_{(\alpha_3)}$ матричным соотношением

$$\hat{\sigma}_{(\alpha_3)} = A_{(\alpha_3)} \sigma_{(\alpha_3)}, \quad (29)$$

а вектор $\hat{\varepsilon}_{(\alpha_3)}$ выражен через вектор $\varepsilon_{(\alpha_3)}$ соотношением

$$\hat{\varepsilon}_{(\alpha_3)} = B_{(\alpha_3)} \varepsilon_{(\alpha_3)}. \quad (30)$$

В выражениях (29) (30) матрицы $A_{(\alpha_3)} = \|A_{rs}^{(\alpha_3)}\|, r = 1, 2, 3, s = 1, 2, 3\|, B_{(\alpha_3)} = \|B_{rs}^{(\alpha_3)}\|, r = 1, 2, 3, s = 1, 2, 3\|$ являются функциями от угла между ортами сопровождающего базиса e_1, e_2, e_3 и координатными осями X, Y, Z , и определяются формулами теории анизотропных тел [4].

Выражения (29) и (30) подставлены в (28) и получено

$$A_{(\alpha_3)} \sigma_{(\alpha_3)} = \hat{E}_{(\alpha_3)} B_{(\alpha_3)} \varepsilon_{(\alpha_3)} + \hat{q}_{(\alpha_3)}. \quad (31)$$

Равенство (31) умножено на матрицу $A_{(\alpha_3)}^{-1}$ обратную к $A_{(\alpha_3)}$ и записано

$$\sigma_{(\alpha_3)} = A_{(\alpha_3)}^{-1} \hat{E}_{(\alpha_3)} B_{(\alpha_3)} \varepsilon_{(\alpha_3)} + A_{(\alpha_3)}^{-1} \hat{q}_{(\alpha_3)}. \quad (32)$$

Подстановка (24) в (32) привела к уравнению

$$\sigma_{(\alpha 3)} = A_{(\alpha 3)}^{-1} \hat{E}_{(\alpha 3)} B_{(\alpha 3)} D_{(\alpha 3)} R + A_{(\alpha 3)}^{-1} \hat{q}_{(\alpha 3)}. \quad (33)$$

Напряжения приведены к линиям главных кривизн базовой поверхности в виде погонных усилий $N_1, N_2, S_1, S_2, G_1, G_2$, изгибающих M_1, M_2 и крутящих H_1, H_2 моментов, из которых сформирован вектор F

$$F = (N_1, N_2, S_1, S_2, M_1, M_2, H_1, H_2)^T. \quad (34)$$

Компоненты вектора F определяются согласно [3] формулами вида

$$N_1 = \int_{\alpha_3^{(o)}}^{\alpha_3^{(k)}} \sigma_{11}^{(\alpha 3)} (1 + k_2 \alpha_3) d\alpha_3, \\ N_2 = \int_{\alpha_3^{(o)}}^{\alpha_3^{(k)}} \sigma_{22}^{(\alpha 3)} (1 + k_1 \alpha_3) d\alpha_3, \\ \dots \dots \dots \quad (35)$$

$$H_1 = \int_{\alpha_3^{(o)}}^{\alpha_3^{(k)}} \tau_{12}^{(\alpha 3)} (1 + k_2 \alpha_3) d\alpha_3,$$

$$H_2 = \int_{\alpha_3^{(o)}}^{\alpha_3^{(k)}} \tau_{21}^{(\alpha 3)} (1 + k_1 \alpha_3) d\alpha_3,$$

где $\alpha_3^{(o)}$ и $\alpha_3^{(k)}$ — координаты соответственно для внутренней и наружной поверхностей оболочки относительно базовой поверхности.

Согласно (35) сформирована матрица $P_{(\alpha 3)} = \|P_{r,s}^{(\alpha 3)}\|, r = 1, \dots, 8, s = 1, 2, 3\|$, на основе которой вектор F определяется соотношениями

$$F = \int_{\alpha_3^{(o)}}^{\alpha_3^{(k)}} P_{(\alpha 3)} \sigma_{(\alpha 3)} d\alpha_3. \quad (36)$$

Подстановкой (33) в (36) получено

$$F = \int_{\alpha_3^{(o)}}^{\alpha_3^{(k)}} P_{(\alpha 3)} A_{(\alpha 3)}^{-1} \hat{E}_{(\alpha 3)} B_{(\alpha 3)} D_{(\alpha 3)} R d\alpha_3 +$$

$$+ \int_{\alpha_3^{(o)}}^{\alpha_3^{(k)}} P_{(\alpha 3)} A_{(\alpha 3)}^{-1} \hat{q}_{(\alpha 3)} d\alpha_3. \quad (37)$$

При обозначениях

$$C = \int_{\alpha_3^{(o)}}^{\alpha_3^{(k)}} P_{(\alpha 3)} A_{(\alpha 3)}^{-1} \hat{E}_{(\alpha 3)} B_{(\alpha 3)} D_{(\alpha 3)} d\alpha_3, \quad (38)$$

$$Q = \int_{\alpha_3^{(o)}}^{\alpha_3^{(k)}} P_{(\alpha 3)} A_{(\alpha 3)}^{-1} \hat{q}_{(\alpha 3)} d\alpha_3$$

связь между вектором силовых факторов F и вектором параметров деформации оболочки R была описана матричным выражением

$$F = CR + Q, \quad (39)$$

где $C = \|C_{r,s}\|, r = 1, 2, \dots, 8, s = 1, 2, \dots, 6\|$ — матрица жесткости листового композита в целом, $Q = (Q_r, r = 1, 2, \dots, 8)^T$ — вектор дополнительных усилий, возникающих вследствие температурной деформации и ползучести.

Уравнения равновесия оболочки произвольного очертания представлены согласно [3] в виде системы из трех матричных уравнений

$$U_1^T T = -q_1, \quad U_2^T T = -q_2, \quad U_3^T T = -q_3, \quad (40)$$

где U_1^T, U_2^T, U_3^T — векторы размера 24

$$U_k^T = (U_i^{(k)}, i = 1, 2, \dots, 24)^T, k = 1, 2, 3, \quad (41)$$

компоненты которых являются функциями от параметров Ляме оболочки A_1 и A_2 , и производных от них по криволинейным координатам α_1, α_2, T — вектор внутренних сил и производных от них по α_1, α_2

$$T = \left(N_1, \frac{\partial N_1}{\partial \alpha_1}, N_2, \frac{\partial N_2}{\partial \alpha_2}, S_1, \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_1}, S_2, \frac{\partial S_2}{\partial \alpha_2}, \right. \\ M_1, \frac{\partial M_1}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial M_1}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial^2 M_1}{\partial \alpha_1^2}, M_2, \frac{\partial M_2}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial M_2}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial^2 M_2}{\partial \alpha_2^2}, \\ H_1, \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial^2 H_1}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \\ \left. H_2, \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial^2 H_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \right)^T. \quad (42)$$

Для определения вектора T уравнение (39) продифференцировано по α_1 и α_2 , и получено векторное выражение

$$T = DP + L, \quad (43)$$

в котором вектор P имеет вид

$$T = \left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}, \chi_1, \chi_2, \tau, \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial \chi_1}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial \chi_2}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial \tau}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial \chi_1}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial \chi_2}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial \tau}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial \alpha_1^2}, \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial \alpha_1^2}, \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial \alpha_1^2}, \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial \alpha_1^2}, \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial \alpha_1^2}, \frac{\partial^2 \tau}{\partial \alpha_1^2}, \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \frac{\partial^2 \tau}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial \alpha_2^2}, \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial \alpha_2^2}, \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial \alpha_2^2}, \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial \alpha_2^2}, \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial \alpha_2^2}, \frac{\partial^2 \tau}{\partial \alpha_2^2} \right)^T. \quad (44)$$

Компоненты матрицы $D = \|D_{i,j}, i = 1, 2, \dots, 24, j = 1, 2, \dots, 36\|$ определяются дифференцированием компонент матрицы C , а компоненты вектора L — дифференцированием вектора Q . Для определения вектора P дифференцировали (22) по α_1 и α_2 и получили матричное соотношение

$$P = VS, \quad (45)$$

в котором вектор S имеет вид

$$S = \left(u_1, u_2, u_3, \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_1^2}, \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1^2}, \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha_1^2}, \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_2^2}, \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_2^2}, \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha_2^2}, \frac{\partial^3 u_1}{\partial \alpha_1^3}, \frac{\partial^3 u_2}{\partial \alpha_1^3}, \frac{\partial^3 u_3}{\partial \alpha_1^3}, \frac{\partial^3 u_1}{\partial \alpha_1^2 \partial \alpha_2}, \frac{\partial^3 u_2}{\partial \alpha_1^2 \partial \alpha_2}, \frac{\partial^3 u_3}{\partial \alpha_1^2 \partial \alpha_2}, \frac{\partial^3 u_1}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2^2}, \frac{\partial^3 u_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2^2}, \frac{\partial^3 u_3}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2^2}, \frac{\partial^3 u_1}{\partial \alpha_2^3}, \frac{\partial^3 u_2}{\partial \alpha_2^3}, \frac{\partial^3 u_3}{\partial \alpha_2^3}, \frac{\partial^4 u_1}{\partial \alpha_1^4}, \frac{\partial^4 u_2}{\partial \alpha_1^4}, \frac{\partial^4 u_3}{\partial \alpha_1^4}, \frac{\partial^4 u_1}{\partial \alpha_1^3 \partial \alpha_2}, \frac{\partial^4 u_2}{\partial \alpha_1^3 \partial \alpha_2}, \frac{\partial^4 u_3}{\partial \alpha_1^3 \partial \alpha_2} \right)^T, \quad (46)$$

а матрица $V = \|V_{i,j}, i = 1, 2, \dots, 36, j = 1, 2, \dots, 35\|$ имеет компоненты, получаемые дифференцированием компонент матрицы G по α_1 и α_2 .

При подстановке (45) в (43) получено матричное выражение

$$T = DVS + L. \quad (47)$$

С учетом (47) система (40) приведена к виду

$$\begin{aligned} U_1^T DVS &= -q_1 - U_1^T L, \\ U_2^T DVS &= -q_2 - U_2^T L, \\ U_3^T DVS &= -q_3 - U_3^T L. \end{aligned} \quad (48)$$

В соответствии с системой уравнений (48) введены в рассмотрение векторы строки K_1^T, K_2^T, K_3^T , учитывающие геометрию оболочки и механические характеристики ее материала и скалярные величины Q_1, Q_2, Q_3 , учитывающие внешнюю нагрузку, тепловую деформацию и деформацию ползучести

$$\begin{aligned} K_1^T &= U_1^T DV, \quad Q_1 = -q_1 - U_1^T L, \\ K_2^T &= U_2^T DV, \quad Q_2 = -q_2 - U_2^T L, \\ K_3^T &= U_3^T DV, \quad Q_3 = -q_3 - U_3^T L. \end{aligned} \quad (49)$$

На основе обозначений (49) система уравнений (48) приняла вид

$$\begin{aligned} K_1^T S &= \hat{Q}_1, \\ K_2^T S &= \hat{Q}_2, \\ K_3^T S &= \hat{Q}_3. \end{aligned} \quad (50)$$

Уравнения (50) построены для упругого материала, но при подстановке (16) в (50) получается система уравнений, позволяющих рассчитать жесткость и прочность оболочек при ползучести в условиях произвольных высоких температур.

4. ПРИМЕР РАСЧЕТА НА ПРОЧНОСТЬ

По предложенной методике рассчитана заштрихованная по контуру панель, выделенная из прямой круговой конической оболочки (рис. 1), имеющая базовую поверхность в форме части круговой конической поверхности с радиусом верхнего основания $R_o = 1$ м, длиной образующей $L = 1$ м, углом конусности $\gamma = \pi/6$ рад и двугранным углом $\theta = \pi/3$ рад.

Вдоль образующей базовой поверхности направлена координатная линия α_1 с областью изменения $0 \leq \alpha_1 \leq L$ (рис. 1). Вторая криволинейная координата α_2 — двугранный угол с областью изменения $0 \leq \alpha_2 \leq \theta$ (рис. 1). Вдоль координатной линии α_1 направлен орт e_1 , а вдоль α_2 — орт e_2 . Орт нормали к базовой поверхности e_3 определяется векторным произведением $e_3 = e_1 \times e_2$.

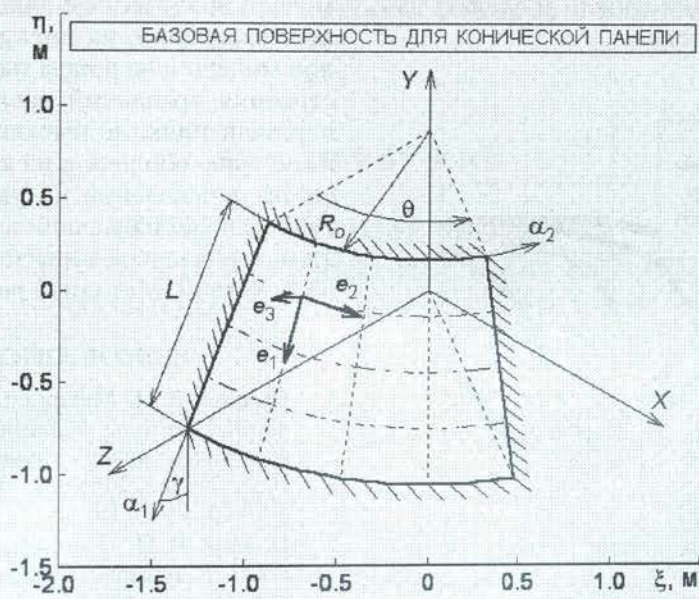


Рис. 1. Базовая поверхность конической панели, ее основные размеры, координатные системы

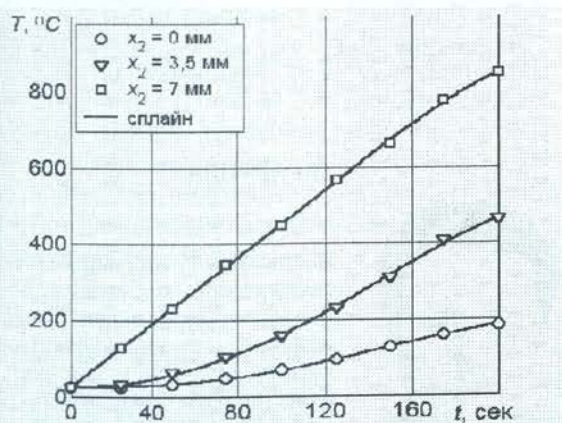


Рис. 2. Изменение температуры T во времени t в слоях с координатами α_3 при одностороннем нагреве оболочки из стеклопластика КТ-11-К-Ф

в частных производных решалась методом сплайнов [1].

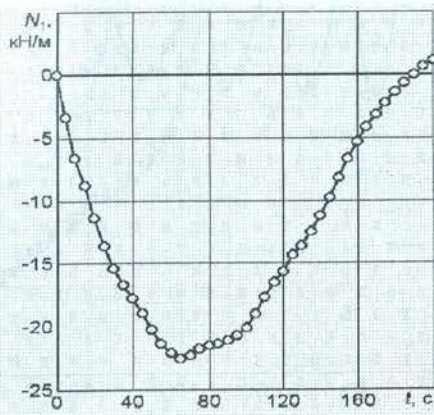


Рис. 3. Зависимость погонной продольной силы N_1 от времени t в центральной точке с координатами $\alpha_1 = L/2$ и $\alpha_2 = \theta/2$

Материал панели — стеклопластик КТ-11-К-Ф, толщина панели равна 7 мм, температура в панели изменяется во времени t и по координате α_3 , оставаясь одинаковой вдоль координатных направлений α_1 и α_2 . Графики изменения температуры в панели представлены на рис. 2. Внешняя распределенная нагрузка равна нулю: $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $q_3 = 0$. Панель закреплена по контуру.

Расчетные дифференциальные уравнения равновесия и дискретная модель ползучести стеклопластика были сформированы на основе методов, изложенных выше, а полученная система дифференциальных уравнений

При решении для расчетных моментов времени t_n , $n = 1, 2, \dots$ были определены функции перемещения $u_i = u_i(\alpha_1, \alpha_2)$, $i = 1, 2, 3$, внутренние силовые факторы $N_i = N_i(\alpha_1, \alpha_2)$, $S_i = S_i(\alpha_1, \alpha_2)$, $M_i = M_i(\alpha_1, \alpha_2)$, $H_i = H_i(\alpha_1, \alpha_2)$, $i = 1, 2$, напряжения $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $i, j = 1, 2$.

Расчетные N_1 и σ_{11} для центральной точки с координатами $\alpha_1 = L/2$, $\alpha_2 = \theta/2$ представлены на рис. 3, 4. На рис. 5 показаны зависимости коэффициентов запаса прочности $K = \sigma_{пч}/\sigma_{11}$ от времени в различных слоях центральной точки. Графики рис. 3–5 позволяют оценить напряженно-деформированное

состояние любой точки панели и сделать заключение о ее прочности.

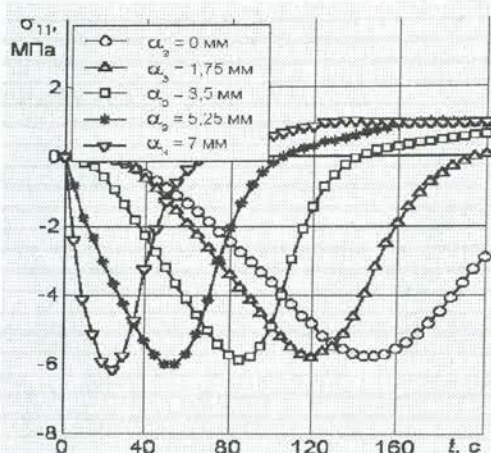


Рис. 4. Изменение нормального напряжения σ_{11} от времени t в слоях с координатами α_3 для центральной точки с координатами $\alpha_1 = L/2$ и $\alpha_2 = \theta/2$

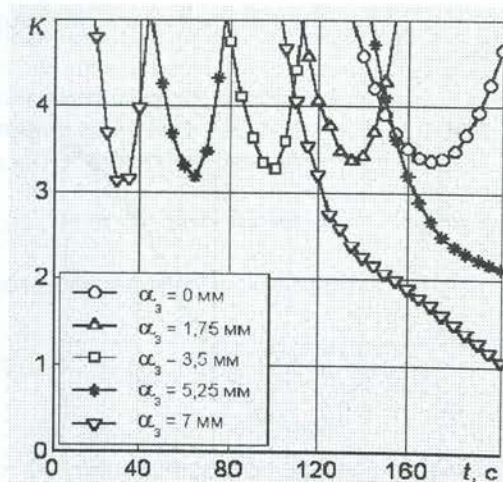


Рис. 5. Изменение коэффициентов запаса прочности K от времени t в слоях с координатами α_3 для центральной точки с координатами $\alpha_1 = L/2, \alpha_2 = \theta/2$

ВЫВОДЫ

Предложена новая методика расчета оболочечных конструкций из стеклопластиков на прочность при высоких температурах, базирующаяся на новых экспериментальных результатах исследований механических свойств стеклопластиков, на математической

модели ползучести в форме дифференциальных уравнений, на дискретном аналоге данной модели и на новом матричном методе построения уравнений равновесия оболочек в перемещениях, не имеющем ограничений на геометрию оболочки, на анизотропию ее слоев, на направления их укладки, на температурное поле, на механические характеристики материала и на характер внешних силовых воздействий. Методика реализована на ЭВМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Павлов, В. П. Метод сплайнов и другие численные методы решения одномерных задач механики деформируемых твердых тел / В. П. Павлов. Уфимск. гос. авиац. ун-т. Уфа: УГАТУ, 2003. 197 с.
2. Павлов, В. П. Тепловая деформация, прочность и термовязкоупругость стеклопластиков при высокой переменной во времени температуре в условиях термодеструкции. Экспериментальные исследования и математическое моделирование / В. П. Павлов. Уфимск. гос. авиац. ун-т. Уфа: УГАТУ, 2004. 218 с.
3. Филин, А. П. Элементы теории оболочек / А. П. Филин. Л.: Стройиздат, 1975. 256 с.
4. Лехницкий, С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. М.: Наука, 1977. 416 с.

ОБ АВТОРАХ



Жернаков Владимир Сергеевич, проф., зав. каф. сопротивления материалов. Дипл. инж.-мех. по авиац. двигателям (УАИ, 1967). Д-р техн. наук по тепл. двигателям ЛА (УГАТУ, 1992). Заслуж. деят. науки и техники РФ. Иссл. в обл. механики деформир. тверд. тела.



Павлов Виктор Павлович, проф. каф. сопротивления материалов. Дипл. инж.-мех. по авиац. двигателям (УАИ, 1973). Д-р техн. наук по динамике, прочности машин, приборов и аппаратуры (УГАТУ, 2005). Иссл. в обл. механики полимерн. композиц. материалов при нестационарных высоких температурах.