Уфа : УГАТУ, 2007 **Вестник УГАТУ • Математика** Т. 9, № 3 (21). С. 36–39

Теория функций

УДК 517.5

В. В. НАПАЛКОВ (мл.)

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГИЛЬБЕРТА И ОРТОПОДОБНЫЕ СИСТЕМЫ РАЗЛОЖЕНИЯ

В работе приведен новый метод решения задач об описании сопряженного пространства в терминах различных систем функций. Этим методом решается задача об описании сильносопряженного к $B_2(G)$ пространства в терминах преобразования Гильберта. По этой теме получены новые результаты. *Пространство Бергмана, преобразование Гильберта, воспроизводящее ядро, ортоподобные системы разложения*

Пусть G – односвязная область в $\mathbb{C}$ с жордановой границей. Пространство $B_2(G)$ состоит из аналитических в области G функций g, удовлетворяющих условию:

$$\|g\|^2_{B_2(G)} = \int_G |g(z)|^2 \, dv(z) < \infty,$$

где v – элемент площади.

Пространство $B_2(G)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, g)_{B_2(G)} = \int_G f(z)\overline{g(z)} \, dv(z) < \infty.$$

По теореме Рисса – Фишера всякий линейный непрерывный функционал S на $B_2(G)$ порождается некоторой функцией $g \in B_2(G)$ по правилу:

$$S(f) = (f, g)_{B_2(G)}.$$

Система функций $\left\{\frac{1}{(z-\xi)^2}\right\}_{\xi\in\mathbb{C}\setminus\overline{G}}$ полна в пространстве $B_2(G)$(см., например, [3]). Обозначим

$$\mathcal{H}_G : g \to \widetilde{g}(\xi) = (\frac{1}{(z-\xi)^2}, g(z))_{B_2(G)} =$$

$$= \int_G \frac{\overline{g(z)}}{(z-\xi)^2} \, dv(z), \quad \xi \in \mathbb{C}\setminus\overline{G}. \qquad (1)$$

Нетрудно показать, что $\widetilde{g}(\xi)$ – аналитическая в $\mathbb{C}\setminus\overline{G}$ функция, которая исчезает на бесконечности.

По теореме Банаха имеется взаимнооднозначное соответствие между сильносопряженным к $B_2(G)$ пространством $B_2^*(G)$ и пространством

$$\widetilde{B}_2(G) \stackrel{def}{=} \{\widetilde{g} : g \in B_2(G)\}.$$

Пространство $\widetilde{B}_2(G)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением:

$$(\widetilde{f}, \widetilde{g})_{\widetilde{B}_2(G)} = (g, f)_{B_2(G)}.$$

В вопросах комплексного анализа часто возникает необходимость описания сильносопряженного пространства к заданному пространству аналитических функций. Такого рода задачи рассматривались, например, в работах [4], [5], [6], [7], [8], [13], [14]. Задача об описании пространства $B_2^*(G)$ в терминах преобразования Коши рассматривалась в работах [7],[11],[12]. В работе [13] решена задача об описании пространства $B_2^*(G)$ в терминах преобразования Гильберта. Там доказано, что в том и только том случае, когда область G – квазикруг, в пространстве $\widetilde{B}_2(G)$ можно ввести норму вида

$$\|\widetilde{g}\|^2_{B_2(\mathbb{C}\setminus\overline{G})} = \int_{\mathbb{C}\setminus G} |\widetilde{g}(\xi)|^2 \, dv(\xi) < \infty,$$

эквивалентную норме

$$\|\widetilde{g}\|_{\widetilde{B}_2(G)} = \sqrt{(\widetilde{g}, \widetilde{g})}_{\widetilde{B}_2(G)}.$$

Это означает, что найдутся постоянные $C_1, C_2 > 0$, что для любой $\widetilde{g}$ выполнено условие

$$C_1 \|\widetilde{g}\|_{\widetilde{B}_2(G)} \le \|\widetilde{g}\|_{B_2(\mathbb{C}\setminus\overline{G})} \le C_2 \|\widetilde{g}\|_{\widetilde{B}_2(G)}.$$

В работах [15], [16] изложен метод решения задач об описании сопряженного пространства, основанный на теории ортоподобных систем разложения. Ортоподобные системы разложения были введены в работах [9],[10].

В данной работе, применяя этот метод, мы докажем, что, если область G – квазикруг, то в пространстве $\widetilde{B}_2(G)$ можно ввести эквивалентную интегральную норму $\|\cdot\|_{B_2(\mathbb{C}\setminus\overline{G})}$.

Пусть граница области G делит комплексную плоскость на две неограниченные области G и $\mathbb{C}\setminus\overline{G}$. Если это не так(например, область G ограничена), то дробно-линейный автоморфизм плоскости $\mathbb{C}$: $w(z)=\frac{1}{z-z_0}$, $z_0\in\partial G$ переводит области G и $\mathbb{C}\setminus\overline{G}$ в неограниченные области $w(G)$ и $w(\mathbb{C}\setminus\overline{G})$ соответственно. Этот автоморфизм порождает изометрию пространств $B_2(G)$ и $B_2(w(G))$, $B_2(\mathbb{C}\setminus\overline{G})$ и $B_2(w(\mathbb{C}\setminus\overline{G}))$, соответственно, по правилу:

$$g(z)\in B_2(G),$$

$$g(z)\overset{T_w}{\to} g(1/z+z_0)/z^2,$$

$$g(1/z+z_0)/z^2\in B_2(w(G)),$$

$$\gamma(\xi)\in B_2(\mathbb{C}\setminus\overline{G}),$$

$$\gamma(\xi)\overset{T_w}{\to}\gamma(1/\xi+z_0)/\xi^2,$$

$$\gamma(1/\xi+z_0)/\xi^2\in B_2(w(\mathbb{C}\setminus\overline{G})).$$

Нетрудно показать, что справедливо равенство

$$\widetilde{g}(1/\xi+z_0)/\xi^2=\int_{w(G)}\frac{\overline{g(1/z+z_0)/z^2}}{(z-\xi)^2}\,dv(z),$$

где $\xi\in w(\mathbb{C}\setminus\overline{G})$.

Таким образом, общий случай сводится к случаю, когда области G и $\mathbb{C}\setminus\overline{G}$ неограничены.

Для любой точки $\eta\in G$ функционал

$$B_2(G)\ni f\to f(\eta)$$

является линейным и непрерывным. По теореме Рисса-Фишера имеет место представление

$$f(\eta)=(f(z),K_{B_2(G)}(z,\eta))_{B_2(G)}.$$

Функция $K_{B_2(G)}(z,\eta)$, $z,\eta\in G$ называется ядром Бергмана пространства $B_2(G)$ (см., например, [1]).

Пусть G – квазикруг и

$$\tau(\xi):\mathbb{C}\setminus\overline{G}\to G$$

– квазиконформное отражение относительно ∂G (см., например, [2]).

По лемме ([2], стр.76) $\tau(\xi)$ можно выбрать так, чтобы выполнялось условие

$$\frac{1}{M}dv(\xi)\le dv(\tau(\xi))\le M\,dv(\xi), \qquad (2)$$

где $\xi\in\mathbb{C}\setminus\overline{G}$, $M>0$ — постоянная. Для $f\in B_2(G)$ мы имеем

$$\|f\|^2_{B_2(G)}=\int_G|f(z)|^2\,dv(z)=$$

$$=\int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}}|f(\tau(\xi))|^2\,dv(\tau(\xi)).$$

Используя (2), получим неравенства

$$\frac{1}{M}\int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}}|f(\tau(\xi))|^2\,dv(\xi)\le\|f\|^2_{B_2(G)}\le$$

$$\le M\int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}}|f(\tau(\xi))|^2\,dv(\xi). \qquad (3)$$

Лемма 1. *Если область G – квазикруг, то любой элемент $f\in B_2(G)$ можно представить в виде:*

$$f(z)=\int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}}(f(\nu),\mathcal{A}K_{B_2(G)}(\nu,\tau(\xi)))_{B_2(G)}\times$$

$$\times K_{B_2(G)}(z,\tau(\xi))\,dv(\xi),\ z\in G,$$

где $\mathcal{A}$ – некоторый самосопряженный оператор, действующий в пространстве $B_2(G)$.

Доказательство. Если область G — квазикруг, то выполняется соотношение (3). Последнее означает, что в пространстве $B_2(G)$ можно ввести эквивалентную интегральную норму вида

$$\|f\|^2_1=\int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}}|f(\tau(\xi))|^2\,dv(\xi).$$

Эта норма порождает скалярное произведение

$$(f,g)_1\overset{def}{=}\frac{1}{4}(\|f+g\|_1^2-\|f-g\|_1^2+i\|f+ig\|_1^2-$$

$$-i\|f-ig\|_1^2).$$

Как и в работе [16] можно показать, что любой элемент $f\in B_2(G)$ представляется в виде

$$f(z)=\int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}}(f(\nu),K_1(\nu,\tau(\xi)))_1\times$$

$$\times K_1(z,\tau(\xi))\,dv(\xi),\ z\in G,$$

где функция $K_1(\nu,\tau(\xi))$ определена по теореме Рисса-Фишера из равенства

$$f(\tau(\xi))=(f(\nu),K_1(\nu,\tau(\xi)))_1.$$

По лемме 1 из работы [16] найдется самосопряженный оператор $\mathcal{A}$, действующий в пространстве $B_2(G)$, такой, что

$$(f, \mathcal{A}g)_1 = (f, g)_{B_2(G)}, \quad f, g \in B_2(G).$$

Так как

$$f(\tau(\xi)) = (f(\nu), K_1(\nu, \tau(\xi)))_1 = \\ = (f(\nu), K_{B_2(G)}(\nu, \tau(\xi)))_{B_2(G)},$$

то

$$K_1(\nu, \tau(\xi)) = \mathcal{A}K_{B_2(G)}(\nu, \tau(\xi)).$$

Поэтому

$$f(z) = \int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}} (f(\nu), \mathcal{A}K_{B_2(G)}(\nu, \tau(\xi)))_1 \times \\ \times \mathcal{A}K_{B_2(G)}(z, \tau(\xi))\, dv(\xi) = \\ = \int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}} (f(\nu), K_{B_2(G)}(\nu, \tau(\xi)))_{B_2(G)} \times \\ \times \mathcal{A}K_{B_2(G)}(z, \tau(\xi))\, dv(\xi) = \\ = \int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}} (f(\nu), \mathcal{A}K_{B_2(G)}(\nu, \tau(\xi)))_{B_2(G)} \times \\ \times K_{B_2(G)}(z, \tau(\xi))\, dv(\xi), \; z \in G. \qquad (4)$$

что и требовалось доказать.

На пространстве $B_2(G)$ рассмотрим оператор

$$f \mapsto \mathcal{R}f(z) \stackrel{def}{=} \int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}} (f(\nu), \frac{1}{(\xi-\nu)^2})_{B_2(G)} \times \\ \times K_{B_2(G)}(z, \tau(\xi))\, dv(\xi), \; z \in G.$$

Теорема 1. *Оператор $\mathcal{R}$ является линейным непрерывным самосопряженным оператором, который осуществляет автоморфизм пространства $B_2(G)$;*
для любой точки $\xi \in \mathbb{C}\setminus\overline{G}$ образом функции $K_{B_2(G)}(z, \tau(\xi))$, $z \in G$ является функция $\frac{1}{(z-\xi)^2}$, $z \in G$, т.е.

$$\frac{1}{(z-\xi)^2} = \mathcal{R}\Big(K_{B_2(G)}(z, \tau(\xi))\Big), \quad \forall \xi \in \mathbb{C}\setminus\overline{G}.$$

Доказательство. Введем в пространстве $B_2(G)$ скалярное произведение по правилу: положим

$$(f(\nu), \frac{1}{(\xi-\nu)^2})_2 \stackrel{def}{=} \\ = (\mathcal{A}f(\nu), K_{B_2(G)}(\nu, \tau(\xi)))_{B_2(G)}. \qquad (5)$$

Если f, g произвольные элементы пространства $B_2(G)$, то

$$(f, g)_2 \stackrel{def}{=} \int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}} (f(\nu), \frac{1}{(\xi-\nu)^2})_2 \times \\ \times \overline{(g(\nu), \frac{1}{(\xi-\nu)^2})_2}\, dv(\xi).$$

В силу равенства (4), имеем

$$(f, g)_2 = (\mathcal{A} \circ \mathcal{A}f, g)_1 = (\mathcal{A}f, g)_{B_2(G)}$$

$$f(z) = \int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}} (f(\nu), \frac{1}{(\xi-\nu)^2})_2 \times \\ \times K_{B_2(G)}(z, \tau(\xi))\, dv(\xi) = \\ = \int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}} (f(\nu), \mathcal{A}\frac{1}{(\xi-\nu)^2})_{B_2(G)} \times \\ \times K_{B_2(G)}(z, \tau(\xi))\, dv(\xi), \; z \in G.$$

Тогда, если через $\mathcal{R}$ обозначить оператор, обратный к оператору $\mathcal{A}$, то

$$\mathcal{R}f(z) = \int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}} (\mathcal{R}f(\nu), \mathcal{A}\frac{1}{(\xi-\nu)^2})_{B_2(G)} \times \\ \times K_{B_2(G)}(z, \tau(\xi))\, dv(\xi) = \\ = \int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}} (f(\nu), \frac{1}{(\xi-\nu)^2})_{B_2(G)} \times \\ \times K_{B_2(G)}(z, \tau(\xi))\, dv(\xi), \; z \in G.$$

Очевидно, что $\mathcal{R}$ – самосопряженный оператор (оператор $\mathcal{A}$ самосопряженный). В силу равенства (5), имеем

$$(f(\nu), \mathcal{R}\frac{1}{(\xi-\nu)^2})_2 = \\ = (f(\nu), K_{B_2(G)}(\nu, \tau(\xi)))_{B_2(G)}, \\ \xi \in \mathbb{C}\setminus\overline{G}, \forall f \in B_2(G).$$

Поэтому

$$\frac{1}{(\xi-\nu)^2} = \mathcal{R}\Big(K_{B_2(G)}(\nu, \tau(\xi))\Big).$$

Следствие. *Для любой функции $f \in B_2(G)$ выполнено равенство*

$$\tilde{f}(\xi) = \overline{\mathcal{R}f(\tau(\xi))}, \quad \forall \xi \in \mathbb{C}\setminus\overline{G}.$$

Доказательство. В силу теоремы 1

$$\mathcal{R}(K_{B_2(G)}(z, \tau(\xi))) = \frac{1}{(z-\xi)^2}, \quad \forall \xi \in \mathbb{C}\setminus\overline{G}.$$

Поэтому

$$\widetilde{f}(\xi) = (\frac{1}{(z-\xi)^2}, f(z))_{B_2(G)} =$$

$$= (\mathcal{R}(K_{B_2(G)}(z, \tau(\xi))), f(z))_{B_2(G)} =$$

$$= \overline{(K_{B_2(G)}(z, \tau(\xi)), \mathcal{R}f(z))_{B_2(G)}} = \overline{\mathcal{R}f(\tau(\xi))}.$$

В работе [16] доказано, что если существует автоморфизм пространства $B_2(G)$, переводящий семейство функций

$$\{K_{B_2(G)}(z, \tau(\xi))\}_{\xi\in\mathbb{C}\setminus\overline{G}}$$

в семейство

$$\{\frac{1}{(z-\xi)^2}\}_{\xi\in\mathbb{C}\setminus\overline{G}},$$

то в пространстве $\widetilde{B}_2(G)$ можно ввести эквивалентную интегральную норму. В нашем случае в качестве такого автоморфизма можно взять оператор $\mathcal{R}$. Таким образом, в пространстве $\widetilde{B}_2(G)$ можно ввести эквивалентную интегральную норму вида

$$\|\widetilde{g}\|^2_{B_2(\mathbb{C}\setminus\overline{G},\tau)} = \int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}} |\widetilde{g}(\xi)|^2\, dv(\tau(\xi)).$$

Используя неравенства (2), легко получаем

Теорема 2. *В пространстве $\widetilde{B}_2(G)$ можно ввести эквивалентную интегральную норму вида*

$$\|\widetilde{g}\|^2_{B_2(\mathbb{C}\setminus\overline{G})} = \int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}} |\widetilde{g}(\xi)|^2\, dv(\xi).$$

Замечание. Этот результат другим методом был получен в [13].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Aronszajn, N.** Theory of reproducing kernels / N. Aronszajn // Transactions of the American Mathematical Society. 1950. 68. №3. P. 337 – 404.
2. **Альфорс, Л.** Лекции по квазиконформным отображениям / Л. Альфорс // М.: Мир, 1969. С. 135.
3. **Гайер, Д.** Лекции по теории аппроксимации в комплексной области / Д. Гайер. – М.: Мир. 1986. С. 216.
4. **Напалков, В. В.** Преобразование Лапласа и продолжение аналитических функций / В. В. Напалков // Исследования по теории приближений. Уфа: БНЦ Уро АН СССР. 1986. С. 86 – 91.
5. **Луценко, В. И.** Обобщение теоремы Винера – Пели на функционалы в пространствах Смирнова / В. И. Луценко, Р. С. Юлмухаметов // Труды Матем. Инст. АН СССР им. В.А. Стеклова. 1991. Т. 200. С. 245 – 254.
6. **Напалков, В. В. (мл.)** Весовые преобразования Фурье-Лапласа аналитических функционалов в круге / В. В. Напалков (мл.), Р. С. Юлмухаметов // Матем. сборник. 1992. Т. 183. № 11. С.139–144.
7. **Напалков, В. В. (мл.).** О преобразовании Коши функционалов на пространстве Бергмана / В.В. Напалков (мл.), Р. С. Юлмухаметов // Матем. сборник. 1994. Т. 185. № 7. С.77–86.
8. **Напалков, В. В.**О преобразовании Лапласа функционалов в весовом пространстве Бергмана целых функций в $\mathbb{C}^n$ / В. В. Напалков, С. В. Попенов // Доклады РАН. 1997. Т. 354. №5. С.595–597.
9. **Лукашенко, Т. П.** О коэффициентах систем разложения, подобных ортогональным / Т. П. Лукашенко // Матем. сборник. 1997. №12. С. 57–72.
10. **Лукашенко, Т. П.** О свойствах систем разложения, подобных ортогональным / Т. П. Лукашенко // Известия РАН, Сер. матем. 1998. Т.62. № 5. С. 187 – 206.
11. **Merenkov, S. A.** On the Cauchy transform of functionals on a Bergman space / S. A. Merenkov //Математическая физика, анализ и геометрия. Харьков, 1999. №4.
12. **Napalkov, V. V. Jr.** Criterion of surjektivity of the Cauchy transform on a Bergman space/ V. V. Napalkov, Jr., R. S. Youlmukhametov // Israel Mathematical Conference Proceedings. Vol 15. 2001. P. 261 – 267.
13. **Напалков, В. В. (мл.)**//О преобразовании Гильберта в пространстве Бергмана / В.В. Напалков (мл.), Р. С. Юлмухаметов // Матем. заметки. 2001. Т. 70. № 1. С. 68-78.
14. **Исаев, К. П.,** Преобразование Лапласа функционалов на пространстве Бергмана / К. П. Исаев, Р. С. Юлмухаметов // Известия РАН, Серия матем. 2004. Т.68. №1. С. 5–42.
15. **Напалков, В. В. (мл.)** Различные представления пространства аналитических функций и задача об описании сопряженного пространства / В. В. Напалков (мл.) // Доклады РАН. 2002. 387. С. 164–167.
16. **Напалков, В. В. (мл.)** Интегральные преобразования весовых пространств Бергмана / В. В. Напалков (мл.) // Доклады РАН. 2004. 397. С. 1–3.

ОБ АВТОРЕ

Напалков Валерий Валентинович, ст. науч. сотр. Института математики с ВЦ УНЦ РАН. Дипл. математик (БашГУ, 1990). Канд. физ.-мат. наук(1995). Иссл. в обл. комплексного анализа.