

УДК 532.546

В. А. БАЙКОВ, О. С. БОРЩУК, И. Б. ВАСИЛЬЕВ

ВЫТЕСНЕНИЕ ВЯЗКИХ НЕСЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ
ВО ФРАКТАЛЬНЫХ СРЕДАХ

В работе строится приближенное решение задачи о вытеснении вязких несжимаемых жидкостей во фрактальной среде. *Фрактальная среда, фрактальная размерность, устойчивость фронта вытеснения, метод малого параметра*

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим задачу о вытеснении без перемешивания одной вязкой несжимаемой жидкости (например, нефти) другой жидкостью (например, водой) в среде с фрактальными свойствами. Предполагаем, что обе жидкости движутся по каналу прямоугольного сечения в направлении оси Ox ($x > 0$) (Рис. 1). Ширина канала ограничена и равна $h_2 - h_1$ ($h_1, h_2 > 0$). Для определенности будем считать, что по оси z (перпендикулярно рассматриваемому плоскому течению) в точке $(0, 0)$ проходит трещина, создающая радиальные напряжения в матрице пласта, приводящие к фрактальным свойствам среды.

С учетом самоподобной структуры пласта закон Дарси в данном случае рассматривается в виде (см. [1, 2]):

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= -\frac{k_f(x)}{\mu} \eta(x) \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial x}, \\ v(x, y, t) &= -\frac{k_f(y)}{\mu} \eta(y) \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial y}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$ — соответственно x - и y -компоненты скорости фильтрации; $p(x, y, t)$ — давление; $k_f(x)$ — проницаемость системы трещин; $\eta(x)$ — число фрактальных узлов в единице объема породы. Как показано в [1]

$$k_f(\xi) = K\xi^{-\theta}, \quad \eta(\xi) = \xi^{D-2}, \quad (2)$$

где $\xi = \{x, y\}$; K — проницаемость однородной поровой среды; D — фрактальная размерность породы (см. [3]); θ — структурный коэффициент для системы трещин. С учетом

(2) уравнения (1) примут вид:

$$\begin{aligned} u_j(x, y, t) &= -\frac{K_j}{\mu_j} x^{D-2-\theta} \frac{\partial p_j(x, y, t)}{\partial x}, \\ v_j(x, y, t) &= -\frac{K_j}{\mu_j} y^{D-2-\theta} \frac{\partial p_j(x, y, t)}{\partial y}. \end{aligned}$$

Здесь $j = 1$ соответствует вытесняющей жидкости в области Ω_1 , а $j = 2$ — вытесняемой жидкости в области Ω_2 , где

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{(x, y) \mid \alpha < x < \phi(y, t), h_1 < y < h_2\}, \\ \Omega_2 &= \{(x, y) \mid \phi(y, t) < x < \beta, h_1 < y < h_2\}. \end{aligned}$$

Таким образом, для решения рассматриваемой задачи можно записать полную систему уравнений, включающую уравнения неразрывности и уравнения фильтрации во фрактальных средах:

$$\frac{\partial u_j(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial v_j(x, y, t)}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$u_j(x, y, t) = -\alpha_j x^a \frac{\partial p_j(x, y, t)}{\partial x}, \quad (4)$$

$$v_j(x, y, t) = -\alpha_j y^a \frac{\partial p_j(x, y, t)}{\partial y}, \quad (5)$$

где $\alpha_j = \frac{K_j}{\mu_j}$, $a = D - 2 - \theta$.

Уравнение границы раздела жидкостей $x = \phi(y, t)$ связано с полем скоростей кинематическим соотношением

$$\left(m \frac{\partial x}{\partial t} - u_1(x, y, t) \right) \Big|_{x=\phi(y, t)} = 0, \quad (6)$$

где m — пористость. Динамическое условие равенства давлений и скоростей на границе дает

$$\left(u_1(x, y, t) - u_2(x, y, t) \right) \Big|_{x=\phi(y, t)} = 0, \quad (7)$$

Авторы выражают признательность профессору Жиберу А.В. за консультации и помощь в написании работы

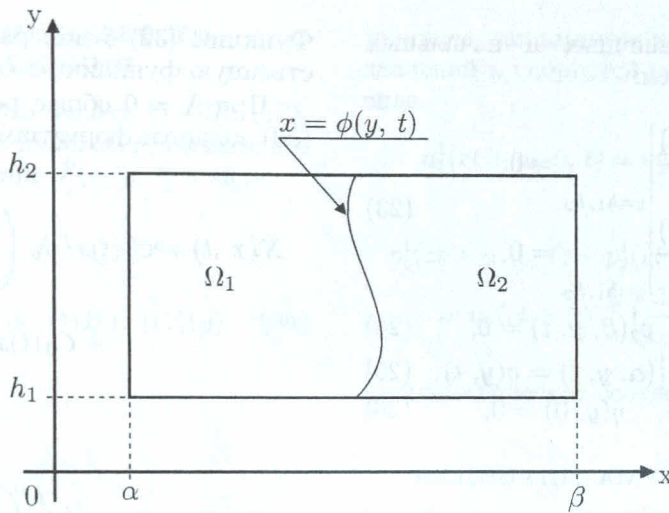


Рис. 1. Схема канала

$$\left. (p_1(x, y, t) - p_2(x, y, t)) \right|_{x=\phi(y, t)} = 0. \quad (8)$$

Запишем граничные и начальные условия. Граничное условие непротекания на боковых стенках канала

$$\left. \frac{\partial p_j(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=h_1, h_2} = 0, \quad (9)$$

давление в фазе $j = 2$ на выходе из канала

$$p_2(\beta, y, t) = p^*, \quad (10)$$

скорость закачки фазы $j = 1$ в канал

$$u_1(\alpha, y, t) = u^*(y, t), \quad (11)$$

положение границы в начальный момент времени

$$\phi(y, 0) = \alpha. \quad (12)$$

Полагая $u^*(y, t) = u_0 + \varepsilon g(y, t)$, рассмотрим поставленную задачу для режима постоянной закачки ($u_0 \equiv \text{const}$) с малыми возмущениями $g(y, t)$.

Предполагая, что решения краевой задачи (3)–(12) — функции $u_j(x, y, t, \varepsilon)$, $v_j(x, y, t, \varepsilon)$, $p_j(x, y, t, \varepsilon)$, $\phi(y, t, \varepsilon)$ — локально аналитические по ε в окрестности нуля, будем иметь:

$$u_j(x, y, t, \varepsilon) = u_j^0(x, y, t) + \varepsilon u_j^1(x, y, t) + o(\varepsilon), \quad (13)$$

$$v_j(x, y, t, \varepsilon) = v_j^0(x, y, t) + \varepsilon v_j^1(x, y, t) + o(\varepsilon), \quad (14)$$

$$p_j(x, y, t, \varepsilon) = p_j^0(x, y, t) + \varepsilon p_j^1(x, y, t) + o(\varepsilon), \quad (15)$$

$$\phi(y, t, \varepsilon) = \phi_0(y, t) + \varepsilon \eta(y, t) + o(\varepsilon). \quad (16)$$

Нашей целью является построение нулевого и первого приближения для функций $u_j(x, y, t, \varepsilon)$, $v_j(x, y, t, \varepsilon)$, $p_j(x, y, t, \varepsilon)$, $\phi(y, t, \varepsilon)$.

1. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НУЛЕВОГО И ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЙ

Подставим выражения (13)–(16) в уравнения (6)–(11). Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε . Тогда для нулевого приближения кинематическое соотношение (6) и динамические условия равенства давлений и скоростей на границе (8), (7) примут вид:

$$m \frac{\partial \phi_0(y, t)}{\partial t} = u_1^0(\phi_0, y, t), \quad (17)$$

$$u_1^0(\phi_0, y, t) = u_2^0(\phi_0, y, t), \quad (18)$$

$$p_1^0(\phi_0, y, t) = p_2^0(\phi_0, y, t). \quad (19)$$

Опуская аргументы функций (ϕ_0, y, t) для первого приближения получим соотношения:

$$u_1^1 - u_2^1 = \eta \left(\frac{\partial u_2^0}{\partial x} - \frac{\partial u_1^0}{\partial x} \right), \quad (20)$$

$$p_1^1 - p_2^1 = \eta \left(\frac{\partial p_2^0}{\partial x} - \frac{\partial p_1^0}{\partial x} \right), \quad (21)$$

$$m \frac{\partial \eta(y, t)}{\partial t} = \eta \frac{\partial u_1^0}{\partial x} + u_1^1. \quad (22)$$

Аналогично для граничных и начальных условий (9)–(12), имеем:

$$\left. \frac{\partial p_j^0(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=h_1, h_2} = 0, \quad (23)$$

$$\left. \frac{\partial p_j^1(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=h_1, h_2} = 0, \quad (24)$$

$$p_2^0(\beta, y, t) = p^*, \quad p_2^1(\beta, y, t) = 0, \quad (24)$$

$$u_1^0(\alpha, y, t) = u_0, \quad u_1^1(\alpha, y, t) = g(y, t), \quad (25)$$

$$\phi_0(y, 0) = \alpha, \quad \eta(y, 0) = 0. \quad (26)$$

2. ЗАДАЧА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

Из (3)–(5) и (13)–(15) следует, что p_j^0 и p_j^1 являются решениями уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(x^a \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(y^a \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial y} \right) = 0. \quad (27)$$

Частные решения будем искать в виде

$$p(x, y, t) = X(x, t)Y(y, t). \quad (28)$$

После подстановки (28) в (27) получим систему уравнений

$$x^2 \frac{\partial^2 X(x, t)}{\partial x^2} + ax \frac{\partial X(x, t)}{\partial x} + \lambda x^{2-a} X(x, t) = 0, \quad (29)$$

$$y^2 \frac{\partial^2 Y(y, t)}{\partial y^2} + ay \frac{\partial Y(y, t)}{\partial y} - \lambda y^{2-a} Y(y, t) = 0. \quad (30)$$

При этом граничные условия (23) принимают вид:

$$\left. \frac{\partial Y(y, t)}{\partial y} \right|_{y=h_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial Y(y, t)}{\partial y} \right|_{y=h_2} = 0. \quad (31)$$

Таким образом, мы приходим к задаче о собственных значениях: найти те значения параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения задачи (30), (31). Последняя является аналогом задачи Штурма–Лиувилля.

Если $\lambda = 0$, то решение уравнения (30) с учетом граничных условий (31) принимает вид:

$$Y_0(y, t) \equiv 1. \quad (32)$$

Функцию (32) будем рассматривать как собственную функцию, соответствующую $\lambda = 0$.

При $\lambda \neq 0$ общее решение системы (29), (30) задается формулами [4]:

$$X(x, t) = C_1(t)x^f J_\nu \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{b} x^b \right) + C_2(t)x^f J_{-\nu} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{b} x^b \right), \quad (33)$$

$$Y(y, t) = C_3(t)y^f J_\nu \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{b} y^b \right) + C_4(t)y^f J_{-\nu} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{b} y^b \right), \quad (34)$$

где

$$\nu = \frac{1-a}{2-a}; \quad f = \frac{1-a}{2}; \quad b = \frac{2-a}{2};$$

$J_{\pm\nu}(\xi)$ — функция Бесселя первого рода.

Подставляя (34) в граничные условия (31), находим последовательность собственных значений $0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots$, которым соответствуют ненулевые решения вида

$$Y_i(y) = y^f J_\nu \left(\frac{\sqrt{-\lambda_i}}{b} y^b \right) - W_i y^f J_{-\nu} \left(\frac{\sqrt{-\lambda_i}}{b} y^b \right), \quad (35)$$

где W_i — константа, определяемая из условий (31). Эти решения будем рассматривать как собственные функции, соответствующие значениям λ_i .

Собственные функции $Y_i(y)$ и $Y_k(y)$, $i, k = 0, 1, 2, \dots$, $i \neq k$, отвечающие различным собственным значениям λ_i, λ_k , ортогональны. Это следует из того, что функции $Y_i(y)$, $i = 1, 2, \dots$ являются решениями уравнения

$$\frac{d}{dy} (y^a Y_i'(y)) - \lambda_i Y_i(y, t) = 0.$$

В дальнейшем будем искать решения $p_j(x, y, t)$ в виде ряда по ортогональной системе собственных функций $\{Y_i(y)\}$.

3. ПОСТРОЕНИЕ НУЛЕВОГО ПРИВЛИЖЕНИЯ

Рассмотрим краевую задачу (3)–(5), (17), (18), (19) и (23)–(26) в нулевом приближении и будем искать функции $p_j^0(x, y, t)$ в виде:

$$p_j^0(x, y, t) = \alpha_{0,j}(t) + \beta_{0,j}(t)x^{1-a} + \sum_{i=1}^{\infty} [\alpha_{i,j}(t)A_i(x) + \beta_{i,j}(t)B_i(x)]Y_i(y), \quad (36)$$

где

$$A_i(x) = x^f J_{\nu} \left(\frac{\sqrt{\lambda_i}}{b} x^b \right), \quad (37)$$

$$B_i(x) = x^f J_{-\nu} \left(\frac{\sqrt{\lambda_i}}{b} x^b \right). \quad (38)$$

Подставляя (36) в граничные условия (17), (18), (19) и (23)–(26) и приравнявая коэффициенты при одинаковых собственных функциях $Y_i(y)$, получаем решение, где компоненты скорости в фазах $j = 1, 2$ равны

$$\begin{aligned} u_1^0(x, y, t) &\equiv u_0, & u_2^0(x, y, t) &\equiv u_0, \\ v_1^0(x, y, t) &\equiv 0, & v_2^0(x, y, t) &\equiv 0; \end{aligned} \quad (39)$$

уравнения границы раздела примет вид

$$\phi_0(y, t) = \frac{u_0}{m}t + \alpha, \quad (40)$$

а давление в фазах изменяется по формулам

$$\begin{aligned} p_1^0(x, y, t) &= p^* + \\ &+ \frac{u_0}{1-a} \left[\left(\frac{u_0}{m}t + \alpha \right)^{1-a} \left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{\beta^{1-a}}{\alpha_2} - \frac{x^{1-a}}{\alpha_1} \right], \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} p_2^0(x, y, t) &= p^* + \frac{u_0\beta^{1-a}}{\alpha_2(1-a)} - \\ &- \frac{u_0}{\alpha_2(1-a)}x^{1-a}. \end{aligned} \quad (42)$$

4. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРВОГО ПРИВЛИЖЕНИЯ

Используя нулевые приближения (39)–(42) для каждой из рассматриваемых областей D_j , где

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) \mid \alpha < x < \phi_0(y, t), h_1 < y < h_2\}, \\ D_2 &= \{(x, y) \mid \phi_0(y, t) < x < \beta, h_1 < y < h_2\} \end{aligned}$$

запишем динамические условия равенства давлений и скоростей на границе (20), (21) в виде

$$u_1^1(ct + \alpha, y, t) = u_2^1(ct + \alpha, y, t), \quad (43)$$

$$\begin{aligned} p_1^1(ct + \alpha, y, t) - p_2^1(ct + \alpha, y, t) &= \\ = u_0(ct + \alpha)^{-a} \left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} \right) \eta(y, t), \end{aligned} \quad (44)$$

а кинематическое соотношение (22) как

$$\begin{aligned} m \frac{\partial \eta(y, t)}{\partial t} &= u_1^1(ct + \alpha, y, t), \\ \eta(y, 0) &= 0, \end{aligned} \quad (45)$$

где $c = \frac{u_0}{m}$. Граничные и начальные условия (23)–(25) преобразуем к виду

$$\left. \frac{\partial p_j^1}{\partial y} \right|_{y=h_1, h_2} = 0, \quad (46)$$

$$u_1^1(\alpha, y, t) = g_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} g_i(t)Y_i(y), \quad (47)$$

$$p_2^1(\beta, y, t) = 0. \quad (48)$$

Здесь $g_i(t)$ — коэффициенты ряда Фурье функции $g(y, t)$:

$$\begin{aligned} g_i(t) &= \frac{\int_{h_1}^{h_2} g(y, t)Y_i(y) dy}{\left(\int_{h_1}^{h_2} Y_i^2(y) dy \right)^{1/2}}, \\ i &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (49)$$

Для первого приближения будем искать решение в виде:

$$\begin{aligned} p_j^1(x, y, t) &= \alpha_{0,j}(t) + \beta_{0,j}(t)x^{1-a} + \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} [\alpha_{i,j}(t)A_i(x) + \beta_{i,j}(t)B_i(x)]Y_i(y). \end{aligned} \quad (50)$$

Аналогично построению нулевого приближения подставим ряды (50) в уравнения (43)–(48) и, приравнявая коэффициенты при различных собственных функциях $Y_i(y)$, найдем выражение для коэффициентов при $Y_0(y) \equiv 1$

$$\alpha_{0,1}(t) = \frac{H(ct + \alpha)^{-a}}{m} \int_0^t g_0(\tau) d\tau +$$

$$+ \frac{g_0(t)}{1-a} \left(\frac{H(ct+\alpha)^{1-a}}{mu_0\alpha_1} + \frac{\beta^{1-a}}{\alpha_2} \right), \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{0,2}(t) &= \frac{\beta^{1-a}}{\alpha_2(1-a)} g_0(t), \\ \beta_{0,1} &= -\frac{g_0(t)}{\alpha_1(1-a)}, \\ \beta_{0,2} &= -\frac{g_0(t)}{\alpha_2(1-a)}, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\text{где } H = u_0 \left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} \right).$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов при $Y_i(y)$, $i = 1, 2, \dots$ обозначим

$$\begin{aligned} \Theta_{i,1} &= \frac{A'_i(\alpha)}{B'_i(\alpha)}, \quad \Theta_{i,2} = \frac{A_i(\beta)}{B_i(\beta)}, \\ \Theta_{i,3} &= \frac{1}{\alpha_1 \alpha^a B'_i(\alpha)}. \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{i,1}(t) &= A_i(ct+\alpha) - \Theta_{i,1} B_i(ct+\alpha), \\ \Delta_{i,2}(t) &= A_i(ct+\alpha) - \Theta_{i,2} B_i(ct+\alpha), \\ \Delta_{i,3}(t) &= \Theta_{i,3} B_i(ct+\alpha). \end{aligned} \quad (54)$$

Используя введенные обозначения, получим

$$\begin{aligned} \beta_{i,1}(t) &= -\Theta_{i,3} g_i(t) - \Theta_{i,1} \alpha_{i,1}(t), \\ \beta_{i,2}(t) &= -\Theta_{i,2} \alpha_{i,2}(t), \end{aligned} \quad (55)$$

$$\alpha_{i,2}(t) = \frac{\alpha_1}{\alpha_2 \Delta'_{i,2}(t)} (\Delta'_{i,1}(t) \alpha_{i,1}(t) - \Delta'_{i,3}(t) g_i(t)), \quad (56)$$

$$\alpha_{i,1}(t) = \int_0^t F_{i,2}(\tau) e^{\left(-\int_{\tau}^t F_{i,1}(\xi) d\xi\right)} d\tau. \quad (57)$$

Здесь функции $F_{i,1}(t)$ и $F_{i,2}(t)$ принимают вид:

$$\begin{aligned} F_{i,1}(t) &= \frac{ac}{ct+\alpha} + \frac{W'_{i,1}(t)}{W_{i,1}(t)} + \\ &+ \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) \frac{\Delta'_{i,1}(t)}{W_{i,1}(t)}, \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} F_{i,2}(t) &= \frac{g(t)}{W_{i,1}(t)} \left[\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) \Delta'_{i,3}(t) + \right. \\ &+ \left. \frac{ac}{ct+\alpha} W_{i,2}(t) + W'_{i,2}(t) \right] + \\ &+ \frac{W_{i,2}(t)}{W_{i,1}(t)} g'(t), \end{aligned} \quad (59)$$

где $W_{i,1}(t)$ и $W_{i,2}(t)$ соответственно равны

$$\begin{aligned} W_{i,1}(t) &= \Delta_{i,1}(t) - \frac{\alpha_1 \Delta_{i,2}(t)}{\alpha_2 \Delta'_{i,2}(t)} \Delta'_{i,1}(t), \\ W_{i,2}(t) &= \Delta_{i,3}(t) - \frac{\alpha_1 \Delta_{i,2}(t)}{\alpha_2 \Delta'_{i,2}(t)} \Delta'_{i,3}(t). \end{aligned} \quad (60)$$

Отметим, что, если граничное условие (47) раскладывается в конечную сумму по системе собственных функций $\{Y_i(y)\}$, то и решения (50) будут конечными суммами. Также, возможно задание граничного условия (48) в виде функции $s(y, t)$, которая аналогично (47) раскладывается в ряд по системе $\{Y_i(y)\}$.

5. ПРОВЕРКА УСТОЙЧИВОСТИ ФРОНТА ВЫТЕСНЕНИЯ

Рассмотрим поведение фронта вытеснения $\eta(y, t)$. Известно [5], что при вытеснении жидкости с повышенной вязкостью менее вязкой жидкостью или газом имеет место вязкостная неустойчивость фронта вытеснения в пористой среде. Проверим устойчивость фронта вытеснения во фрактальной среде с радиальным распределением анизотропности свойств.

Будем рассматривать задачу (3)–(5) для первого приближения совместно с граничными и начальными условиями (43), (44), (46), (48), дополнив их соотношениями

$$\begin{aligned} m \frac{\partial \eta(y, t)}{\partial t} &= u_1^1(ct+\alpha, y, t), \\ \eta(y, 0) &= Y_1(y), \end{aligned} \quad (61)$$

т.е. в начальный момент времени первое приближение границы представляет собой кривую, представленную на рис. 2. На входе в канал будем поддерживать нулевые граничные условия:

$$u_1^1(\alpha, y, t) = 0. \quad (62)$$

Для поставленной задачи из соотношения (44) выразим $\eta(y, t)$

$$\eta(y, t) = \frac{Y_1(y)}{H} (ct+\alpha)^a \alpha_{1,1}(t) W_{1,1}(t), \quad (63)$$

где $W_{1,1}(t)$ определяется формулой (60). Коэффициент $\alpha_{1,1}(t)$ находится из обыкновенного дифференциального уравнения

$$\alpha'_{1,1}(t) = -\alpha_{1,1}(t) \left(\frac{ca}{ct+\alpha} + \frac{W'_{1,1}(t)}{W_{1,1}(t)} \right) +$$

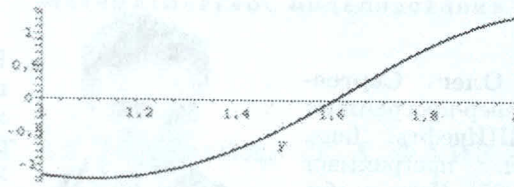


Рис. 2. Возмущение границы в начальный момент времени

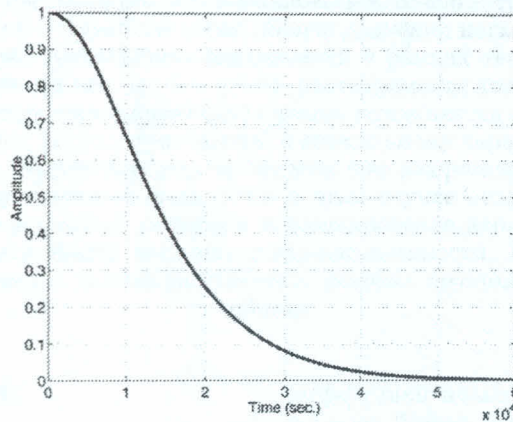


Рис. 3. Амплитуда возмущения в зависимости от времени

$$+ \frac{\Delta'_{1,1}(t)}{W_{1,1}(t)} \Big). \quad (64)$$

Результаты численных расчетов амплитуды возмущения

$$\frac{(ct + \alpha)^a}{H} \alpha_{1,1}(t) W_{1,1}(t), \quad (65)$$

представленные на рис. 3, показывают, что с течением времени граница раздела вырождается в прямую.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматривается фильтрующая порода с радиальными фрактальными образованиями, для которых проницаемость среды уменьшается с расстоянием от центра трещины, задающей сеть фрактальных структур, по закону $K_f(\xi) = K\xi^a$ ($\xi = \{x, y\}$, $a = D - 2 - \theta < 0$). Показано, что в исследуемой модели единичного фрактального ядра, образованного трещиной в фильтрующей пористой породе, наблюдается устойчивый фронт вытеснения со временем вырождающийся в прямую.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мирзаджанзаде, А. Х. Этюды о моделировании сложных систем нефтедобычи. Нели-

нейность, неравновесность, неоднородность. / А. Х. Мирзаджанзаде, М. М. Хасанов, Р. Н. Бахтизин. – Уфа: Гилем, 1999. 464 с.

2. Мальшаков, А. В. Уравнения гидродинамики для пористых сред со структурой порового пространства, обладающей фрактальной геометрией / А. В. Мальшаков // ИФЖ. 1992. Т. 62, вып. 3. С. 405–410.
3. Соколов, И. М. Размерности и другие геометрические критические показатели в теории протекания / И. М. Соколов // УФН. 1986. Том 150, № 2. С. 221–255.
4. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики. / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Наука, 1972. 736 с.
5. Аметов, И. М. Устойчивость вытеснения несмешивающихся вязкоупругих жидкостей в пористой среде / И. М. Аметов, И. Ш. Ахатов, В. А. Байков // ПММ. 1991. Т. 55, вып. 5. С. 803–807.

ОБ АВТОРАХ

Байков Виталий Анварович, зам. ген. дир. ООО „ЮНГ-НГЦ Уфа“. Д-р физ.-мат. наук (ИПМ им. М. В. Келдыша, 1991). Иссл. в обл. волновых процессов, нелинейной механики, физики нефти, мат. и физ. моделирования.





Борщук Олег Сергеевич, инженер-программист РН-УфаНИПИнефть. Дипл. мат., сист. программист (УГАТУ, 2005). Иссл. в обл. гидродинамич. моделирования, физики пласта.



Васильев Игорь Борисович, зав. сект. гидродинамич. моделирования ООО „ЮНГ-НТЦ Уфа“. Дипл. мат.-инж. (УГАТУ, 1998). Иссл. в обл. группового анализа диф. уравнений, физики пласта.

