Уфа : УГАТУ, 2007 **Вестник УГАТУ • Математика** Т. 9, № 3 (21). С. 88–95

Комплексный анализ

УДК 517.54

К. П. ИСАЕВ, А. А. РУМЯНЦЕВА

ИНТЕГРАЛЫ ЛАПЛАСА И РАЗЛИЧНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

В работе изучается асимптотика интегралов Лапласа. Полученные результаты применяются к вопросам, связанным с преобразованием Фурье — Лапласа функций (функционалов) в весовых пространствах функций. *Интеграл Лапласа; сопряженные пространства; выпуклые функции; функция Бергмана*

Асимптотика интегралов Лапласа

Пусть E — выпуклая область в пространстве $\mathbb{R}^n$ и h — выпуклая функция в области E. В работе изучается асимптотическое поведение интегралов вида

$$L_h(y) = \int e^{xy-h(x)}\,dx, \qquad (1)$$

где для $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ использовано обозначение $xy = \sum_{k=1}^{n} x_i y_i$. В монографии [1] рассматриваются выпуклые функции, для которых допускается значение $+\infty$. Доопределим при необходимости функцию h, полагая $h(x) = +\infty$ для $x \notin E$, и будем считать, что функция h определена и выпукла на всем пространтсве $\mathbb{R}^n$ (см. [1]). Функция

$$\widetilde{h}(y) = \sup_x(xy - h(x)), \ y \in \mathbb{R}^n,$$

называется сопряженной по Юнгу к функции h. Известно ([1]), что $\widetilde{h}$ — также выпуклая функция, причем сопряженная по Юнгу к функции $\widetilde{h}$ совпадает с h. Пусть $\widetilde{E} = \{y \in \mathbb{R}^n : \widetilde{h}(y) < +\infty\}$. Если внутренность множества $\widetilde{E}$ пуста, то интеграл в (1) расходится для всех $y \in \mathbb{R}^n$. Поэтому будем считать, что внутренность $\widetilde{E}$ — не пустое множество.

Если функция h дважды непрерывно дифференцируема и ее вторая производная удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, то рассматриваемая задача является классической и подробно изучена. Соответствующие результаты можно найти в книгах [2], [3].

Введем необходимые обозначения и определения. Через $V(A)$ будем обозначать n-мерный объем множества $A \subset \mathbb{R}^n$. Пусть E — некоторая область в $\mathbb{R}^n$ и $x \in E$. Определим индукцией по размерности пространства величину $vd\,(x, E)$, которую будем называть "объемным расстоянием". Если $E \subset \mathbb{R}$, то положим

$$vd\,(x, E) = \inf\{|x - y| : \ y \notin E\}$$

— обычное расстояние от точки $x \in E$ до границы E. Пусть величина $vd\,(x, E)$ определена в пространстве $\mathbb{R}^n$ и $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Возьмем точку $y_0 \in \partial E$, такую, что

$$\inf\{|x - y| : \ y \notin E\} = |x - y_0|.$$

Если таких точек на границе несколько, то возьмем любую из них. Через точку y_0 проходит единственная опорная гиперплоскость, ортогональная отрезку, соединяющему точки x, y_0. Пусть P — гиперплоскость, параллельная этой опорной гиперплоскости и проходящая через точку x. Размерность выпуклого множества $E_1 = P \bigcap E$ равна n и $x \in E_1$. По допущению индукции величина $vd\,(x, E_1)$ уже определена. Положим

$$vd\,(x, E) = vd\,(x, E_1)|x - y_0|.$$

Как видно из определения, величина $vd\,(x, E)$ не всегда определяется однозначно, если n больше 1. Если обычное расстояние от x до границы E или одного из сечений E плоскостями достигается не в единственной точке, то в зависимости от выбора точки достижения величина E может получиться различной. Из доказанных теорем будет видно, что в случаях, рассматриваемых в наших утверждениях, разные значения $vd\,(x, E)$ будут сравнимыми.

Теорема 1. *Пусть*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \ h(x) + \widetilde{h}(y) - xy \leq 1\}$$

и для $y \in \mathbb{R}^n$ через D_y обозначим проекцию на $\mathbb{R}^n_x$ сечения множества D:

$$D_y = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in D\}.$$

Тогда

$$e^{-1} V(D_y) e^{\widetilde{h}(y)} \le$$

$$\le \int e^{xy-h(x)}\,dx \le (1+n!) V(D_y) e^{\widetilde{h}(y)},\ y \in \widetilde{E}.$$

Доказательство. Нижняя оценка очевидна в силу неотрицательности подинтегральной функции и определения множества D. Зафиксируем y. Заметим, что при всех x и y

$$\widetilde{h}(y) + h(x) - xy \ge 0.$$

Положим

$$\alpha(t) = V(\{x : \widetilde{h}(y) + h(x) - xy \le t\}),\ t \ge 0.$$

В наших обозначениях $\alpha(1) = V(D_y)$. Как известно ([4]), $(\alpha(t))^{\frac{1}{n}}$ — вогнутая возрастающая функция на $[0; +\infty)$. Имеет место представление

$$L_h(y) = e^{\widetilde{h}(y)} \int_0^\infty e^{-t}\,d\alpha(t).$$

Не уменьшая общности, будем считать, что $\alpha(0) = 0$. Из вогнутости функции $(\alpha(t))^{\frac{1}{n}}$ следует оценка

$$(\alpha(t))^{\frac{1}{n}} \le (\alpha(1))^{\frac{1}{n}} t,\ t \ge 1. \qquad (2)$$

Интегрированием по частям получим

$$L_h(y) e^{-\widetilde{h}(y)} = \int_0^1 e^{-t}\,d\alpha(t) + \int_1^\infty e^{-t}\,d\alpha(t) \le$$

$$\le \alpha(1) + \int_1^\infty e^{-t} \alpha(t)\,dt.$$

Воспользуемся оценкой (2):

$$L_h(y) e^{-\widetilde{h}(y)} \le \alpha(1) \left(1 + \int_1^\infty e^{-t} t^n\,dt\right) \le$$

$$\le (1+n!)\alpha(1).$$

Теорема 1 доказана.

Замечание. Очевидно, можно было бы взять любое положительное число p и вместо множества D взять множество

$$D(p) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : h(x) + \widetilde{h}(y) - xy \le p\}$$

и теми же рассуждениями доказать асимптотику

$$e^{-p} V(D(p)_y) e^{\widetilde{h}(y)} \le \int e^{xy-h(x)}\,dx \le$$

$$\le (1 + \frac{n!}{p^n}) V(D(p)_y) e^{\widetilde{h}(y)},\ y \in \widetilde{E}.$$

При фиксированном y возьмем произвольную точку $x = x_y$ для которой верно равенство

$$\widetilde{h}(y) + h(x_y) - yx_y = 0$$

и через D^y обозначим проекцию на $\mathbb{R}^n_y$ сечения множества D:

$$D^y = \{z : (x_y, z) \in D\}.$$

Теорема 2. *Имеют место неравенства*

$$\frac{1}{e(1+n!) vd\,(y, D^y)} e^{\widetilde{h}(y)} \le \int e^{xy-h(x)}\,dx \le$$

$$\le \frac{e^2(1+n!)(2n)^n}{vd\,(y, D^y)} e^{\widetilde{h}(y)},\ y \in \widetilde{E}.$$

Доказательство. Для сокращения записей при фиксированном y введем обозначение

$$u(x) = \widetilde{h}(y) + h(x + x_y) - (x + x_y)y.$$

Тогда u — неотрицательная выпуклая функция и $u(0) = 0$, причем

$$\{x : u(x) \le 1\} = D_y - x_y.$$

Нетрудно вычислить, что имеет место равенство

$$\widetilde{u}(z) = \widetilde{h}(z + y) - \widetilde{h}(y) - x_y z.$$

По определению сопряженных по Юнгу $\widetilde{h}(z + y) \ge x(y + z) - h(x)$ для всех x, в частности,

$$\widetilde{h}(z + y) \ge x_y(y + z) - h(x_y),$$

Поэтому

$$\widetilde{u}(z) = \widetilde{h}(z + y) - \widetilde{h}(y) - x_y z \ge$$

$$\ge x_y(y + z) - h(x_y) - \widetilde{h}(y) - x_y z = 0, \qquad (3)$$

причем $\widetilde{u}(0)=0$ Рассмотрим выпуклое множество

$$E=\{z:\ \widetilde{u}(z)\le 1\}$$

и опорную функцию H этого множества:

$$H(z)=\sup_{t\in E} zt.$$

Поскольку $0\in E$, то $H(z)\ge 0$.

Лемма 1. *Пусть*

$$F=\{u(x)\le 1\},\quad G_1=\{H(x)\le 1\},$$

$$G_2=\{H(x)\le 2\}.$$

Имеют место включения

$$G_1\subset F\subset G_2.$$

Доказательство. Если $u(x)\le 1$, то

$$H(x)=\sup_{z\in E} xz\le \sup_{z\in E}(xz-\widetilde{u}(z)+1)\le$$

$$\le \sup(xz-\widetilde{u}(z))+1=u(x)+1\le 2,$$

и тем самым правое включение доказано. Пусть $H(x)\le 1$ и $z\notin E$, тогда, поскольку $0\in E$, то найдется $\tau>1$ и $z_0\in\partial E$ так, что $z=\tau z_0$. В силу выпуклости функции $\widetilde{u}$ имеем

$$1=\widetilde{u}(z_0)\le \frac{1}{\tau}\widetilde{u}(z)+\left(1-\frac{1}{\tau}\right)\widetilde{u}(0)=\frac{1}{\tau}\widetilde{u}(z),$$

то есть $\widetilde{u}(z)\ge\tau$. Поэтому

$$xz-\widetilde{u}(z)\le\tau(xz_0-1)\le\tau(\sup_{z'\in\partial E} xz'-1)=$$

$$=\tau(H(x)-1)\le 0.$$

Отсюда, в силу неотрицательности функции $\widetilde{u}$ справедлива следующая оценка:

$$u(x)=\sup_z(xz-\widetilde{u}(z))=\max(\sup_{z\in E}(xz-\widetilde{u}(z)).$$

$$\sup_{z\notin E}(xz-\widetilde{u}(z)))\le \max(\sup_{z\in E}(xz-\widetilde{u}(z)),0)\le$$

$$\le \sup_{z\in E} zx=H(x)\le 1.$$

Лемма доказана.

С помощью замены переменных $x:=x+$ $+x_y$ получим равенство

$$L_h(y)=\int e^{xy-h(x)}\,dx=$$

$$=\int e^{(x+x_y)y-h(x+x_y)}\,dx=$$

$$=e^{\widetilde{h}(y)}\int e^{-u(x)}\,dx. \tag{4}$$

Применим к последнему интегралу теорему 1, учитывая, что $\widetilde{u}(0)=0$:

$$e^{-1}V(F)\int e^{-u(x)}\,dx\le(1+n!)\,V(F),$$

а объем множества F оценим по лемме

$$e^{-1}V(G_1)\le\int e^{-u(x)}\,dx\le(1+n!)\,V(G_2).$$

Опорная функция H тоже неотрицательная, значит, $\widetilde{H}(0)=0$, и по замечанию к теореме 1 имеем

$$e^{-2}V(G_2)\le\int e^{-H(x)}\,dx\le(1+n!)\,V(G_1).$$

Последние два соотношения дают оценку

$$\frac{1}{e(1+n!)}\int e^{-H(x)}\,dx\le$$

$$\le e^{-1}V(G_1)\le\int e^{-u(x)}\,dx\le(1+n!)V(G_2)\le$$

$$\le(1+n!)e^2\int e^{-H(x)}\,dx.$$

Вместе с представлением (4) получим

$$\frac{1}{e(1+n!)}e^{\widetilde{h}(y)}\int e^{-H(x)}\,dx\le L_h(y)\le$$

$$\le(1+n!)e^2e^{\widetilde{h}(y)}\int e^{-H(x)}\,dx. \tag{5}$$

Таким образом, для доказательства теоремы 2 нам нужно выяснить асимптотику интеграла от $\exp(-H(x)))$, где $H(x)$ — опорная функция множества

$$E=\{z:\ \widetilde{u}(z)\le 1\}.$$

Заметим, что

$$E+y=\{t:\ \widetilde{h}(t)-\widetilde{(}y)-x_yt+x_yy\le 1\}=$$

$$=\{\widetilde{h}(t)+h(x_y)-x_yt\le 1\}=D^y,$$

поэтому $vd\ (y,D^y)=vd\ (0,E)$. Следовательно, утверждение теоремы 2 будет вытекать из следующей леммы.

Лемма 2. *Пусть E — выпуклое множество, содержащее начало координат, и $H(x)$ — опорная функция этого множества. Тогда*

$$\frac{1}{vd\,(0,E)} \le \int e^{-H(x)}\,dx \le \frac{(2n)^n}{vd\,(0,E)}.$$

Доказательство. При определении величины $vd\,(x,E)$ мы фактически строили ортогональный репер с началом в точке x. Поскольку утверждение леммы инваринтно относительно поворотов системы координат, можем считать, что

$$\inf\{|x|\ x=(0,...,0,x_i,x_{i+1},...,x_n)\notin E\}$$

достигается в точке $(0,...,0,a_i,0,...,0)\in\partial E$, причем $a_i>0$. При таком выборе системы координат, очевидно

$$vd\,(0,E)=a_1a_2...a_n.$$

Пусть H_1 — опорная функция симплекса с вершинами в точках $(0,...,0,\ \pm a_i,0,...,0)$. Очевидно, что этот симплекс лежит в E, поэтому для всех x $H_1(x)\le H(x)$. С другой стороны,

$$H_1(x)=max_i(\pm a_ix_i)=max_i(a_i|x_i|)\ge$$
$$\ge\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i|x_i|,$$

следовательно,

$$\int e^{-H(x)}\,dx\le\int e^{-H_1(x)}\,dx\le$$
$$\le\int e^{-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i|x_i|)}\,dx=\frac{(2n)^n}{a_1a_2...a_n}.$$

Таким образом,

$$\int e^{-H(x)}\,dx\le\frac{(2n)^n}{a_1a_2...a_n}=\frac{(2n)^n}{vd\,(0,E)}.$$

Докажем нижнюю оценку. По выбору системы координат опорная гиперплоскость P_1 к множеству E в граничной точке $(a_1,0,...,0)$ описывается уравнением

$$x=(x_1,...,x_n):\ x_1=a_1.$$

Рассмотрим пересечение E_1 множества E с подпространством $R_1=\{x=(x_1,x_2,...,x_n):\ x_1=0\}$. Снова по выбору системы координат опорная гиперплоскость P_2 к множеству E_1 в пространстве R_1 в граничной точке $(0,a_2,0,...,0)$ описывается уравнением (в пространстве R_1) $x_2=a_2$. Значит, во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ уравнение этой опорной плоскости имеет вид

$$A_{2,1}x_1+x_2=a_2.$$

Продолжая рассуждать аналогичным образом, получим, что опорная гиперплоскость P_i к множеству E в точке $(0,...,0,a_i,0,...,0)$ описывается уравнением вида

$$A_{i,1}x_1+A_{i,2}x_2+...+A_{i,i-1}x_{i-1}+x_i=a_i.$$

Положим

$$A_{i,i}=1,\quad A_{i,j}=0,\ j>i,$$

и через A обозначим треугольную матрицу с элементами $A_{i,j}$. Через G обозначим выпуклую неограниченную область, ограниченную гиперплоскостями P_i, $i=1,2,...,n$, содержащую множество E. Область G есть пересечение полупространств

$$P_i^-=\{x=(x_1,...,x_n):\ A_{i,1}x_1+A_{i,2}x_2+...$$
$$...+A_{i,i-1}x_{i-1}+x_i<a_i\}.$$

При линейном преобразовании пространства $y=Ax$ область G преобразуется в область

$$G'=\{y=(y_1,...,y_n):\ y_i<a_i,\ i=1,2,...,n\}.$$

Опорная функция области G' легко вычисляется:

$$H_{G'}(z)=\begin{cases}\sum_i a_iz_i, & \text{если все } z_i\ge 0,\\ +\infty & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Пусть B — обратная матрица к матрице A. Тогда для опорной функции области G выполняется формула

$$H_G(z)=\sup_{x\in G}zx=\sup_{y\in G'}z(By)=\sup_{y\in G'}(B^Tz)y=$$
$$=H_{G'}((A^T)^{-1}z),$$

где A^T,B^T — транспонированные матрицы. Поскольку $E\subset G$, то $H(x)\le H_G(x)$, значит

$$\int e^{-H(x)}\,dx\ge\int e^{-H_G(x)}\,dx=$$
$$=\int e^{-H_{G'}((A^T)^{-1}(x))}\,dx.$$

Произведем замену переменных в последнем интеграле, учитывая, что $\det A=1$

$$\int e^{-H(x)}\,dx\ge\int e^{-H_{G'}(y)}\,dy=\int_{\mathbb{R}^n_+}e^{-H_{G'}(y)}\,dy=$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n_+} e^{-\sum_i a_i y_i} \, dy = \frac{1}{a_1 ... a_n}.$$

Лемма 2 доказана.

Подставим соотношения леммы 2 в оценки (5) и получим утверждение теоремы 2.

Геометрические характеристики выпуклых функций

В этом параграфе мы более подробно рассмотрим характеристику, названную нами "объемным расстоянием"и приведем в некотором смысле эквивалентные определения. Рассмотрим одномерный случай.

Пусть $h(x)$ — выпуклая функция и $\widetilde{h}(y)$ — сопряженная по Юнгу к ней. Напомним, что при фиксированном y через D^y мы обозначили интервал

$$\{z : \widetilde{h}(z) + h(x_y) - x_y z \leq 1\},$$

где точка x_y удовлетворяет условию $\widetilde{h}(y) + h(x_y) - x_y y = 0$ и "объемным расстоянием"в одномерном случае считаем обычное расстояние от точки y, которая по определению лежит в этом интервале, до границы интервала. Возьмем произвольное положительное число p и определим более общую величину $\rho_1(y,p)$ следующим образом. Интервал

$$I_1(y,p) = \{z : \widetilde{h}(z) + h(x_y) - x_y z \leq p\}$$

по-прежнему содержит точку y. Величину $\rho_1(y,p)$ положим равной расстоянию от точки y до границы указанного интервала.

Лемма 3. *При $q \geq p > 0$ имеют место двусторонние оценки*

$$\rho_1(y,q) \geq \rho_1(y,p) \geq \frac{p}{q} \rho_1(y,q).$$

Доказательство.

Левое неравенство очевидно. Пусть $I_1(y,q) = (a_q; b_q)$ и $\alpha = \frac{p}{q}$, $z = \alpha b_q + (1 - \alpha) y$. Тогда в силу выпуклости функции $\widetilde{h}$ имеем

$$\widetilde{h}(z) + h(x_y) - x_y z \leq \alpha \widetilde{h}(b_q) +$$
$$+ (1-\alpha)\widetilde{h}(y) + h(x_y) - \alpha x_y b_q - (1-\alpha) x_y y =$$
$$= \alpha(\widetilde{h}(b_q) + h(x_y) - x_y b_q) +$$
$$+ (1-\alpha)(\widetilde{h}(y) + h(x_y) - x_y y)) = \alpha q = p.$$

Следовательно, если $I_1(y,p) = (a_p; b_p)$, то $b_p \geq \alpha b_q + (1-\alpha) y$, то $b_p - y \geq \alpha(b_q - y)$. Точно также покажем, что $y - a_p \geq \alpha(y - a_q)$. Таким образом, $\rho_1(y,p) \geq \alpha \rho_1(y,q) = \frac{p}{q} \rho_1(y,q)$.

Для положительного числа p введем еще одну величину:

$$\rho_2(y,p) = \sup\{t > 0 : \int_{y-t}^{y+t} |\widetilde{h}'(\tau) - \widetilde{h}'(y)| \, d\tau \leq p\}.$$

Лемма 4. *1. Для любого положительного p выполняются оценки*

$$2\rho_2(y,p) \geq \rho_1(y,p) \geq \rho_2(y,p).$$

2. При $q \geq p > 0$ имеют место двусторонние оценки

$$\rho_2(y,q) \geq \rho_2(y,p) \geq \frac{p}{2q} \rho_2(y,q).$$

Доказательство. Интеграл в определении величины ρ_2 легко считается и определение величины $\rho_2 = \rho_2(y,p)$ можно написать в виде

$$\frac{\widetilde{h}(y - \rho_2) + \widetilde{h}(y + \rho_2)}{2} - \widetilde{h}(y) = \frac{p}{2}.$$

Для краткости положим $a = y - \rho_2$, $b = y + \rho_2$ и $I_2(y,p)) = (a; b)$. Тогда $a + b = 2y$ и $\widetilde{h}(y) = y x_y - h(x_y)$ по определеню точки x_y, поэтому

$$(\widetilde{h}(a) + h(x_y) - a x_y) + (\widetilde{h}(b) + h(x_y) - b x_y) = p.$$

Так как кажая скобка в левой части — неотрицательная величина, то каждая из них не превосходит p, то есть $a, b \in I_1(y,p)$ или $I_2(y,p) \subset I_1(y,p)$. Другими словами

$$\rho_1(y,p) \geq \rho_2(y,p).$$

Пусть теперь $I_1(y, \frac{p}{2}) = (a; b)$. Это значит, что

$$\widetilde{h}(a) + h(x_y) - a x_y \leq \frac{p}{2},$$

$$\widetilde{h}(b) + h(x_y) - b x_y \leq \frac{p}{2}. \qquad (*)$$

Если, например, $y - a \leq b - y$, то $\rho_1(y, \frac{p}{2}) = y - a$, причем

$$\widetilde{h}(y + (y - a)) + h(x_y) - (y + (y - a) x_y) \leq \frac{p}{2}.$$

Сложим последнее неравенство с первым неравенством в $(*)$ и получим

$$\frac{\widetilde{h}(y-(y-a))+\widetilde{h}(y+(y-a))}{2}+h(x_y)-yx_y \leq \frac{p}{2}$$

или

$$\frac{\widetilde{h}(y-(y-a))+\widetilde{h}(y+(y-a))}{2}-\widetilde{h}(y) \leq \frac{p}{2}.$$

Тем самым, $\rho_2(y,p) \geq y-a = \rho_1(y,\frac{p}{2})$. Из правой оценки в лемме 3 следует $\rho_1(y,\frac{p}{2}) \geq \geq \frac{1}{2}\rho_1(p)$. Значит, $\rho_2(y,p) \geq \frac{1}{2}\rho_1(y,p)$. Второе утверждение леммы следует из первого утверждения и леммы 3.

Введем еще одну характеристику для выпуклых функций. Пусть z — фиксированная точка на плоскости. Для любого положительного числа $r>0$ через $B(z,r)$ обозначим круг $\{w: |w-z|<r\}$ и для непрерывной в $\overline{B}(z,r)$ функции f положим

$$||f||_r = \max_{w\in\overline{B}(z,r)} |f(w)|.$$

Пусть $d(f,r)$ — расстояние от функции f до подпространства гармонческих в $B(z,r)$ функций:

$$d(f,z,r) = \inf\{||f-H||_r,$$

$$H \text{ — гармонична в } B(z,r)\}.$$

Функция $u(w)=h(\mathrm{Re}\, w)$ является непрерывной функцией в некоторой вертикальной полосе на плоскости. Для положительного числа p положим

$$\rho_3(z,p) = \sup\{r: \ d(u,z,r) \leq p\}.$$

Ясно, что $\rho_3(z,p)$ зависит только от $\mathrm{Re}\, z$. Кроме того, поскольку функцию $\widetilde{h}$ при необходимости мы доопределяем, полагая равной $+\infty$, то $\rho_3(z,p)$ как и $\rho_1(y,p)$, $\rho_2(y,p)$ не может превосходить расстояния от y до границы области определения функции $\widetilde{h}$.

Лемма 5. *1. Для любого положительного p выполняются оценки*

$$\rho_3(y,p) \geq \rho_1(y,p) \geq \frac{1}{12}\rho_3(y,p).$$

2. При $q \geq p > 0$ имеют место двусторонние оценки

$$\rho_3(y,q) \geq \rho_3(y,p) \geq \frac{p}{12q}\rho_3(y,q).$$

Доказательство.

Итак, зафиксируем точку $z\in\mathbb{C}$ так, что $y=\mathrm{Re}\, z$ лежит в области определения функции $\widetilde{h}$. При фиксированном y функция $v(w) = x_y\mathrm{Re}\, w - h(x_y)$ гармонична. По определению величины $\rho_1(y,p)$ в интервале $(y - \rho_1(y,p); y+\rho_1(y,p))$ выполняется оценка

$$\widetilde{h}(t)+h(x_y)-tx_y \leq p.$$

Следовательно, в полосе

$$\{w: \ y-\rho_1(y,p) < \mathrm{Re}\, w < y+\rho_1(y,p)\}$$

выполняется оценка

$$0 \leq u(w)-v(w) \leq p.$$

Круг $B(z,\rho_1(y,p))$ лежит в этой полосе. Таким образом, для $r=\rho_1(y,p)$ в круге $B(z,r)$ нашлась гармоническая функция v, для которой $||u-v||_r \leq p$, то есть $\rho_3(y,p) \geq \rho_1(y,p)$.

Левое неравенство п. 1 леммы доказано.

Для сокращения записи величину $\rho_3(z,p)$ обозначим через R. Таким образом, в круге $B(z,R)$ существует гармоническая функция H такая, что $||u-H||_R \leq p$. Тогда в этом круге

$$v(w) \leq u(w) \leq H(w)+p,$$

то есть

$$(H(w)+p)-v(w) \geq 0.$$

Кроме того, поскольку $v(z)=u(z)$, то

$$(H(z)+p)-v(z) = (H(z)+p)-u(z) =$$

$$= (H(z)-u(z))+p \leq 2p.$$

По неравенству Харнака для неотрицательных гармонических функций в круге $B(z,\frac{R}{2})$ имеем оценку

$$(H(w)+p)-v(w) \leq 3((H(z)+p)-v(z)) \leq 6p.$$

Из этой оценки следует, что

$$\rho_1(y,6p) \geq \frac{R}{2} = \frac{1}{2}\rho_3(y,p).$$

Таким образом, по лемме 3 получим

$$\rho_3(y,p) \leq 2\rho_1(y,6p) \leq 12\rho_1(y,p).$$

Преобразование Фурье – Лапласа

В качестве применения фактов, изложенных выше, рассмотрим вопрос о преобразованиях Фурье - Лапласа функций (функционалов) в весовых пространствах.

Пусть I — интервал на вещественной оси, функция $W(t)$ на I такова, что $1/W(t)$ измерима на I. Рассмотрим пространство $L^2(I,W)$:

$$\{f \in L_{\mathrm{loc}}(I) : \ ||f||^2 := \int_I \frac{|f(t)|^2}{W(t)} dt < \infty\}.$$

Для функционала S на этом пространстве его преобразованием Фурье-Лапласа называется целая функция $\widehat{S}(\lambda) = S(e^{\lambda t}), \quad \lambda \in \mathbb{C}$. По известному общему виду функционалов на гильбертовых пространствах получаем, что преобразование Фурье - Лапласа непрерывного функционала имеет вид

$$\widehat{S}(\lambda) = \int_I \frac{\overline{f(t)}}{W(t)} e^{\lambda t - 2h(t)}\, dt$$

для некоторой функции $f \in L^2(I,W)$.

В работе [6] доказана следующая теорема.

Теорема А. *Пусть $W(t)$ — ограничена снизу положительной постоянной на ограниченном интервале I и ограничена сверху на каждом компактном подмножестве I. Положим $\widetilde{h}(x) = \sup_{t\in I}(xt - \ln\sqrt{W(t)})$— сопряженная по Юнгу к функции $h(x) = \ln\sqrt{W(t)}$, и определим $\rho_{\widetilde{h}}(x)$ из условия*

$$\int_{x-\rho_{\widetilde{h}}}^{x+\rho_{\widetilde{h}}} |\widetilde{h}'(x) - \widetilde{h}'(t)|dt = 1.$$

Тогда

1. Обобщенное преобразование Лапласа $\widehat{S}(z) = S(e^{zt})$ функционала S на $L^2(I,W)$ является целой функцией, удовлетворяющей условиям $|\widehat{S}(z)| \le C_S \exp(\widetilde{h}(x))$,

$$||\widehat{S}||^2 := \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{S}(x+iy)|^2 e^{-2\widetilde{h}(x)} \times$$

$$\times \rho_{\widetilde{h}}(x) d\widetilde{h}'(x) dy \le (\pi e)^2 ||S||^2.$$

2. Если $\ln W(t)$ — выпуклая функция, то имеют место и нижняя и верхняя оценки

$$(\pi e)^{-1}||S|| \le ||\widehat{S}|| \le \pi e ||S||.$$

Кроме того, в этом случае верно обратное утверждение: если F — целая функция экспоненциального типа, удовлетворяющая условиям $|F(z)| \le C_F \exp \widetilde{h}(x), \ z = x + iy$,

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^2 e^{-2\widetilde{h}(x)} \times$$

$$\times \rho_{\widetilde{h}}(x) d\widetilde{h}'(x) dy < \infty,$$

то существует функционал $S \in L^2(I,W)$ такой, что

$$\widehat{S}(z) \equiv F(z), \ z \in \mathbb{C}.$$

3. Если

$$W(t) = \int_{\infty}^{\infty} e^{2xt} d\mu(x),$$

где $\mu(t)$ — неотрицательная борелевская мера на $\mathbb{R}$, то для любого функционала S

$$||S||^2 = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{S}(x+iy)|^2 d\mu(x) dy.$$

В работе [7] эта теорема распространена на случай неограниченных интервалов I. Утверждение третьего пункта является одномерным случаем теоремы из работы [8].

Сравнив определение величины $\rho_{\widetilde{h}}$ и ρ_2 в лемме 4 мы можем компактно записать теорему А.

Теорема А′. *Пусть $h(t)$ — выпуклая функция на интервале I и*

$$K(x) = \int_I e^{2xt - 2h(t)} dt,$$

$$\widetilde{h}(x) = \sup_I (xt - h(t)),$$

$$J = \{x \in \mathbb{R} : \ \widetilde{h}(x) < \infty\}.$$

Тогда функция F, аналитическая в полосе $J + i\mathbb{R}$, представима в виде

$$F(\lambda) = \int_I e^{\lambda t} \overline{f(t)} e^{-2h(t)} dt \tag{6}$$

с функцией f, удовлетворяющей условию

$$\int_I |f(t)|^2 e^{-2h(t)} dt < \infty,$$

тогда и лишь тогда, когда

$$||F||^2 := \int_{\mathbb{R}}\int_J \frac{|F(x+iy)|^2}{K(x)} d\widetilde{h}'(x) dy < \infty,$$

при этом выполняются оценки

$$(\pi e)^{-1}||f|| \leq ||F|| \leq (\pi e)||f||.$$

Функция $K(x)$ имеет простой функциональный смысл. В пространстве функций F, представимых в виде (6), введем следующую наведенную норму

$$||F|| = ||f||. \tag{7}$$

Пусть X — некоторое функциональное гильбертово пространство функций на множестве G. Если линейные функционалы $\delta_z : f \mapsto f(z)$, $z \in G$, ограничены на пространстве X, то функция

$$K(z) = ||\delta_z||, \quad z \in G,$$

называется функцией Бергмана пространства X (см. [5]).

Если X — пространство аналитических функций с нормой (7), то для любого $z \in J + i\mathbb{R}$

$$|F(z)| \leq \int_I |\overline{f(t)}| e^{xt-2h(t)}\, dt \leq$$

$$\leq ||f|| \sqrt{\int_I e^{2xt-2h(t)}\, dt} = ||f|| \sqrt{K(x)} =$$

$$= ||F|| \sqrt{K(x)},$$

то есть

$$||\delta_z|| \leq \sqrt{K(x)}.$$

На самом деле имеет место равенство. Возьмем $f(t) = \exp(zt)$. Тогда

$$|F(z)| = \int_I e^{2xt-2h(t)}\, dt = \sqrt{\int_I e^{2xt-2h(t)}\, dt} \times$$

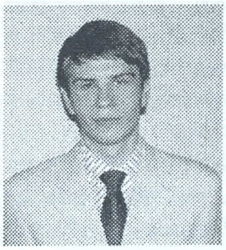
$$\times \sqrt{K(x)} = ||e^{zt}|| \sqrt{K(x)} = ||F|| \sqrt{K(x)}.$$

Таким образом, функция $K(x)$ — это функция Бергмана в сопряженном пространстве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Рокафеллар, Р.** Выпуклый анализ / Р. Рокафеллар // М.: Мир, 1973.
2. **Федорюк, М. В.** Метод перевала / М. В. Федорюк // М.: Наука, 1977.
3. **Евграфов, М. А.** Асимптотические оценки и целые функции / М. А. Евграфов // М.: Наука, 1979.
4. **Погорелов, А. В.** Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. / А. В. Погорелов // М.: Наука, 1979.
5. **Aronszajn, N.** Theory of reproducing kernels / N. Aronszajn // Transactions of the American Mathematical Society, 1950, 68, N3. P.337-404.
6. **Луценко, В. И.** Обобщенные теоремы Пэли-Винера на весовые пространства / В. И. Луценко, Р. С. Юлмухаметов // Матем. заметки, 1990, 48, №5. С.83-87.
7. **Луценко, В. И.** Теорема Пэли-Винера на неограниченном интервале. Исследования по теории приближений / В. И. Луценко // Уфа, 1989. С. 79-85.
8. **Saitoh, S.** Fourier - Laplace transforms and Bergman spaces on the tube domains / S. Saitoh // Мат. вести. 1987, 38, №4. С.571-586.

ОБ АВТОРАХ



Исаев Константин Петрович, ст. преп. каф. программирования и экономической информатики БашГУ, канд. физ.-мат. наук (ИМ с ВЦ УНЦ РАН, 2004). Иссл. в обл. комплексного анализа.

Румянцева Алла Александровна, магистрант математического фак-та. Дипл. бакалавр в области прикладной математики (БашГУ, 2005).