Уфа : УГАТУ, 2007 Вестник УГАТУ • Математика Т. 9, № 3 (21). С. 110–115

Комплексный анализ

УДК 517.548.3

К. В. ТРУНОВ, Р. С. ЮЛМУХАМЕТОВ

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ КЛАССОВ КАРЛЕМАНА НА ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

В работе рассмотрены квазианалитические классы Карлемана на ограниченных односвязных областях. Получены критерий квазианалитичности классов Карлемана при некоторых ограничениях на область. *Квазианалитичность, классы Карлемана, изоморфизм, субгармонические функции, голоморфные функции, индуктивный предел, проективный предел*

Приведем необходимые нам определения из работы [1].

Пусть E — совершенное компактное множество на плоскости $\mathbb{C}$. Комплекснозначная функция f называется бесконечно дифференцируемой на множестве E, если существуют непрерывные на E функции $f_0, f_1, \ldots$, такие, что $f_0(z) \equiv f(z)$, $z \in E$, и при любых $n = 0, 1, 2, \ldots$, $k = 0, 1, \ldots, n$ функции

$$R_{n,k}(\zeta, z) := f_k(\zeta) - \sum_{p=0}^{n-k} f_{k+p}(z)\frac{(\zeta - z)^p}{p!}$$

равномерно по $\zeta, z \in E$ удовлетворяют оценке

$$|R_{n,k}(\zeta, z)| = o(|\zeta - z|^{n-k}).$$

Заметим, что для бесконечно дифференцируемой функции f функции f_k однозначно определяются самой функцией по реккурентным соотношениям

$$f_0(z) = f(z),$$

$$f_{k+1}(z) = \lim_{\zeta \to z} \frac{f_k(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, \; k = 0, 1, \ldots$$

В частности, во внутренних точках E функция f оказывается голоморфной, причем $f_k(z) = f^{(k)}(z)$, и все производные функции f непрерывно продолжаются до границы множества E. Имея в виду это обстоятельство, в дальнейшем для бесконечно дифференцируемых функций на E вместо f_k будем писать $f^{(k)}$.

Для возрастающей последовательности положительных чисел $M = (M_n)_{n=0}^{\infty}$ и натурального числа q через $A_q(E, M)$ обозначим класс бесконечно дифференцируемых функций f на E, для которых выполняется условие

$$|R_{n,k}(\zeta, z)| \le$$
$$\le Cq^{n+1}M_{n+1}\frac{|\zeta - z|^{n-k+1}}{(n-k+1)!}, \quad \zeta, z \in E,$$

где постоянная C не зависит от n, k и $\zeta, z \in E$. Классом Карлемана $A(E, M)$ называется объединение всех классов $A_q(E, M)$, $q \in \mathbb{N}$.

Если E — отрезок I вещественной оси, то в силу формул Тейлора классы Карлемана могут быть описаны в классическом виде: бесконечно дифференцируемые на соответствующем интервале I^0 функции f, для которых существуют $q \in \mathbb{N}$ и $C > 0$ такие, что

$$|f^{(k)}(x)| \le Cq^k M_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \; x \in I^0.$$

В данной работе мы будем рассматривать в качестве множества E замыкание односвязной ограниченной области D в $\mathbb{C}$ со спрямляемой жордановой границей. Функции из класса $A(\overline{D}, M)$ в этом случае голоморфны в D и вместе со всеми производными непрерывно продолжаются до границы D. В дальнейшем через $f^{(k)}(z)$ мы будем обозначать производную порядка k функции f, непрерывно продолженную до границы D. Таким образом, класс $A(\overline{D}, M)$ состоит из голоморфных в D функций f, удовлетворяющих при некотором $q \in \mathbb{N}$ условию

$$\sup_{n \ge 0, k \le n} \sup_{z, \zeta \in D} \frac{(n-k+1)!}{q^{n+1}M_{n+1}|\zeta - z|^{n-k+1}} \times$$
$$\times \left| f^{(k)}(\zeta) - \sum_{p=0}^{n-k} f^{(k+p)}(z)\frac{(\zeta - z)^p}{p!} \right| < \infty.$$

Если область D является квазидиском, то есть для нее существует число $\delta > 0$ такое, что любые две точки $\zeta, z \in D$ могут быть соединены кривой, длина которой не превосходит $\delta|z-\zeta|$, то класс Карлемана $A(\overline{D}, M)$ совпадает с классом голоморфных в D функций f, которые при некоторых $q \in \mathbb{N}$ и $C > 0$ удовлетворяют условию

$$|f^{(k)}(z)| \leq Cq^k M_k, \quad k = 0, 1, 2, ..., \ z \in D.$$

Таким свойством обладают, очевидно, выпуклые области. Именно так определены классы Карлемана в работах [2]-[8], посвященных проблеме квазианалитичности. Проблема заключается в следующем вопросе: если точка z_0 лежит на границе (в смысле плоскости) E, то при каких условиях на множество E и последовательность M в классе $A(E, M)$ будет выполняться теорема единственности в точке z_0? Классы, в которых нет функции, кроме тождественного нуля, обращающейся в 0 вместе со всеми производными в точке z_0, называются квазианалитическими в точке z_0.

Данная работа посвящена проблеме квазианалитичности в граничной точке z_0 невыпуклой области D. Введем соответствующие пространства.

В пространстве $A_q(\overline{D}, M)$ введем норму

$$\|f\|_q := \max\Big(\sup_{n \geq 0, k \leq n} \frac{(n-k+1)!}{q^{n+1} M_{n+1}} \times$$

$$\times \sup_{z, \zeta \in D} \frac{|R_{n,k}(\zeta, z)|}{|\zeta - z|^{n-k+1}}, \frac{1}{M_0} \sup_{z \in D} |f(z)|\Big).$$

Пространства $A_q(\overline{D}, M)$ банаховы и, очевидно, что пространство $A_q(\overline{D}, M)$ непрерывно вложено в пространство $A_{q+1}(\overline{D}, M)$. В пространстве $A(\overline{D}, M)$ будем рассматривать топологию индуктивного предела пространств $A_q(\overline{D}, M)$:

$$A(\overline{D}, M) = \lim_q \ \mathrm{ind} \ A_q(\overline{D}, M).$$

Последовательность

$$m_n = \frac{M_n}{n!}, \quad n = 0, 1, ...,$$

называется присоединенной последовательностью. Всюду в дальнейшем будем считать, что последовательность (m_n) регулярна ([1]), то есть удовлетворяет следующим трем условиям:

1) логарифмическая выпуклость:

$$m_n^2 \leq m_{n-1} m_{n+1}, \quad n = 1, 2, ..., \qquad (1)$$

2) найдется целое число $Q > 0$ такое, что

$$m_{n+1} \leq Q^n m_n, \quad n = 0, 1, ... \qquad (2)$$

3) имеет место соотношение

$$\lim_{n \to \infty} m_n^{\frac{1}{n}} = \infty. \qquad (3)$$

Определим функцию на положительной полуоси

$$M(x) = \sup_{k \geq 0} \frac{1}{m_k x^k}, \quad x > 0.$$

Ясно, что $M(x)$ — убывающая функция и

$$\lim_{x \to 0} M(x) = \infty, \quad M(x) \geq \frac{1}{m_0}. \qquad (4)$$

В силу логарифмической выпуклости последовательности (m_n) имеет место обратное представление

$$m_k = \sup_{x > 0} \frac{1}{x^k M(x)}, \quad k = 0, 1, ... \qquad (5)$$

Через G обозначим дополнение $\overline{D}$ до расширенной плоскости, то есть $G = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$, и пусть

$$d(\zeta) = \inf_{z \in D} |\zeta - z|, \ \zeta \in G$$

— функция расстояния до границы G. Для $q \in \mathbb{N}$ введем банаховы пространства

$$X_q = \{\gamma \in H(G), \ \gamma(\infty) = 0,$$

$$\|\gamma\|_{X_q} = \sup_{\zeta \in G} \frac{|\gamma(\zeta)|}{M(qd(\zeta))} < \infty\}.$$

В силу монотонного убывания функции $M(x)$ пространство X_{q+1} непрерывно вложено в пространство X_q. Через $\widetilde{A}(G, M)$ обозначим проективный предел пространств X_q:

$$\widetilde{A}(G, M) = \lim_q \ \mathrm{pr} \ X_q.$$

Для некоторого упрощения обозначений будем считать, что точка $z = 0$ лежит на границе области D и рассматривается задача о квазианалитичности в точке $z = 0$.

Теорема 1 *Пусть D, D_1 — односвязные области, Ω — область, содержащая замыкание $\overline{D}$ и φ — аналитическая функция в Ω такая, что $\varphi(D) \subset D_1$. Если граничная точка $w_0 \in \partial D_1$ является образом граничной точки $z_0 \in \partial D$, то есть $w_0 = \varphi(z_0)$, то для* *любой последовательности $M = (M_n)$ имеет место включение*

$$\{f(\varphi(z)),\ f \in A(\overline{D}_1, M)\} \subset A(\overline{D}, M\}.$$

Доказательство

Для любых $\zeta, z, w \in \mathbb{C}$, $w \neq \zeta, z$ и $j = 0, 1, 2, \ldots$ тождество

$$\frac{1}{w-\zeta} - \sum_{p=0}^{j} \frac{(\zeta - z)^p}{(w-z)^{p+1}} \equiv \frac{(\zeta - z)^{j+1}}{(w-\zeta)(w-z)^{j+1}}$$

получается непосредственным вычислением суммы в левой части по формуле геометрической прогрессии.

Дифференцируя это тождество по w получим ряд тождеств для $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\frac{k!}{(w-\zeta)^{k+1}} - \sum_{p=0}^{j} \frac{(p+k)!(\zeta - z)^p}{p!(w-z)^{p+k+1}} \equiv$$

$$\equiv (\zeta - z)^{j+1} \sum_{s=0}^{k} \frac{C_k^s (j+k-s)!s!}{j!(w-\zeta)^{s+1}(w-z)^{j+k-s+1}}.$$

Возьмем число $n \geq k$ и в этом тождестве положим $j = n - k$

$$\frac{k!}{(w-\zeta)^{k+1}} - \sum_{p=0}^{n-k} \frac{(p+k)!(\zeta - z)^p}{p!(w-z)^{p+k+1}} \equiv$$

$$\equiv (\zeta - z)^{n-k+1} \times$$

$$\times \sum_{s=0}^{k} \frac{C_k^s (n-s)!s!}{(n-k)!(w-\zeta)^{s+1}(w-z)^{n-s+1}}. \quad (6)$$

Если $\zeta, z \in \overline{D}$ и $w \notin \overline{D}$, то $|w-\zeta|, |w-z| \geq d(w)$, поэтому

$$\left| \sum_{s=0}^{k} \frac{C_k^s (n-s)!s!}{(n-k)!(w-\zeta)^{s+1}(w-z)^{n-s+1}} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{d(w)^{n+2}} \sum_{s=0}^{k} \frac{C_k^s (n-s)!s!}{(n-k)!} =$$

$$= \frac{k!}{d(w)^{n+2}} \sum_{s=0}^{k} C_{n-s}^{k-s}.$$

Сумму биномиальных коэффициентов в правой части можно свернуть по известному реккурентному соотношению $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$, $m = 1, 2, \ldots, n$, и $C_n^0 = C_n^n = 1$:

$$\sum_{s=0}^{k} C_{n-s}^{k-s} = \sum_{p=0}^{k} C_{n-k+p}^{p} =$$

$$= C_{n-k}^0 + C_{n-k+1}^1 + \sum_{p=2}^{k} C_{n-k+p}^p =$$

$$= C_{n-k+1}^0 + C_{n-k+1}^1 + \sum_{p=2}^{k} C_{n-k+p}^p =$$

$$= C_{n-k+2}^1 + C_{n-k+2}^2 + \sum_{p=3}^{k} C_{n-k+p}^p =$$

$$= \ldots = C_{n+1}^k. \quad (7)$$

Пусть $f \in A(\overline{D}_1, M)$. По теореме Е. М. Дынькина ([1]) существует непрерывно дифференцируемая функция F в $\mathbb{C}$, такая, что $F(w) \equiv f(w)$ в D_1 и

$$\left| \frac{\partial F(w)}{\partial \overline{w}} \right| \leq \frac{C}{M(Bd_1(w))},\ w \in \mathbb{C}, \quad (8)$$

где C, B — некоторые константы, а $d_1(w)$ обозначает расстояние от точки $w \notin D_1$ до границы D_1. Пусть $3r = \inf\{|z-w|,\ z \in \overline{D},\ w \notin \Omega\}$ — расстояние от $\overline{D}$ до границы Ω. По условиям теоремы $r > 0$. Через Ω' и Ω'' обозначим, соответственно, r — раздутие и $2r$ — раздутие множества $\overline{D}$, то есть $\Omega' = \bigcup_{z \in D_1} B(z, r)$, $\quad \Omega'' = \bigcup_{z \in D_1} B(z, 2r)$.

В кольце $\Omega'' \setminus \Omega'$ возьмем гладкую жорданову кривую Γ, охватывающую $\overline{D}$ и через Ω_1 обозначим внутренность этой кривой. Применим формулу Бореля — Помпею (см. [9]) к функции $g(z) = F(\varphi(z))$ в области Ω_1:

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(t)}{t-z} dt - \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_1} \frac{\partial g}{\partial \overline{t}} \frac{dv(t)}{t-z}.$$

Докажем, что каждое слагаемое в правой части этого равенства принадлежит классу $A(\overline{D}, M)$. Введем обозначения

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(t)}{t-z} dt, v(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_1} \frac{\partial g}{\partial \overline{t}} \frac{dv(t)}{t-z}.$$

Для $z, \zeta \in D$ и $k, n \in \mathbb{N},\ n \geq k$ имеем

$$\left| u^{(k)}(\zeta) - \sum_{p=0}^{n-k} u^{(k+p)}(z) \frac{(\zeta - z)^p}{p!} \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma |g(t)| \times$$

$$\times\left|\frac{k!}{(t-z)^{k+1}}-\sum_{p=0}^{n-k}\frac{(p+k)!(\zeta-z)^p}{p!(t-z)^{p+k+1}}\right||dt|.$$

Применим формулу (6) и заметим, что если $z,\zeta\in D$ и $t\in\Gamma$, то $|\zeta-t|,\ |z-t|\ge r$, поэтому

$$\left|u^{(k)}(\zeta)-\sum_{p=0}^{n-k}u^{(k+p)}(z)\frac{(\zeta-z)^p}{p!}\right|\le$$

$$\le|\zeta-z|^{n-k+1}\frac{1}{2\pi r^{n+2}}\times$$

$$\times\max_{t\in\Gamma}|g(t)||\Gamma|\sum_{s=0}^{k}\frac{C_k^s(n-s)!s!}{(n-k)!}=$$

$$=\max_{t\in\Gamma}|g(t)||\Gamma||\zeta-z|^{n-k+1}\frac{k!}{2\pi r^{n+2}}\sum_{s=0}^{k}C_{n-s}^{k-s},$$

где $|\Gamma|$ — обозначает длину кривой Γ. Получим оценку

$$\left|u^{(k)}(\zeta)-\sum_{p=0}^{n-k}u^{(k+p)}(z)\frac{(\zeta-z)^p}{p!}\right|\le$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\max_{t\in\Gamma}|g(t)||\Gamma||\zeta-z|^{n-k+1}\frac{(n+1)!}{(n-k+1)!r^{n+2}}.$$

Из свойства (3) регулярных последовательностей следует существование числа $\delta>0$, такого, что $m_n^{\frac{1}{n}}\ge\delta$, $n=0,1,\ldots$, или $M_n\ge n!\delta^n$, $n=0,1,\ldots$ Поэтому

$$\left|u^{(k)}(\zeta)-\sum_{p=0}^{n-k}u^{(k+p)}(z)\frac{(\zeta-z)^p}{p!}\right|\le$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\max_{t\in\Gamma}|g(t)||\Gamma||\zeta-z|^{n-k+1}\times$$

$$\times\frac{M_{n+1}}{(n-k+1)!\delta^{n+1}r^{n+2}}.$$

Итак, мы получили оценку

$$\sup_{n\ge0,k\le n}\ \sup_{z,\zeta\in D}\frac{(\delta r)^{n+1}(n-k+1)!}{M_{n+1}|z-\zeta|^{n-k+1}}\times$$

$$\times\left|u^{(k)}(\zeta)-\sum_{p=0}^{n-k}u^{(k+p)}(z)\frac{(\zeta-z)^p}{p!}\right|\le$$

$$\le\frac{\max_{t\in\Gamma}|g(t)||\Gamma|}{2\pi r}.\tag{9}$$

Далее займемся функцией $v(z)$. Поскольку интеграл в определении функции $v(z)$ в силу свойств функции $F(w)$ считается лишь по области $\Omega_1\setminus D$, то для $z,\zeta\in D$ и $k,n\in\mathbb{N}$, $n\ge k$ имеем

$$\left|v^{(k)}(\zeta)-\sum_{p=0}^{n-k}v^{(k+p)}(z)\frac{(\zeta-z)^p}{p!}\right|\le$$

$$\le\frac{1}{\pi}\int_{\Omega_1\setminus D}\left|\frac{\partial g(t)}{\partial\bar t}\right|\times$$

$$\times\left|\frac{k!}{(t-z)^{k+1}}-\sum_{p=0}^{n-k}\frac{(p+k)!(\zeta-z)^p}{p!(t-z)^{p+k+1}}\right|dv(t).$$

Снова применим формулу (6) и заметим, что если $t\in\Omega_1\setminus D$, $\zeta,z\in D$, то $|\zeta-t|,|z-t|\ge d(t)$, поэтому

$$\left|v^{(k)}(\zeta)-\sum_{p=0}^{n-k}v^{(k+p)}(z)\frac{(\zeta-z)^p}{p!}\right|\le$$

$$\le\frac{1}{\pi}\int_{\Omega_1\setminus D}\left|\frac{\partial g(t)}{\partial\bar t}\right|\frac{|\zeta-z|^{n-k+1}k!}{d(t)^{n+2}}\sum_{s=0}^{n-k}C_{n-s}^{k-s}dv(t).$$

Сумму биномиальных коэффициентов вычислим по соотношению (7)

$$\left|v^{(k)}(\zeta)-\sum_{p=0}^{n-k}v^{(k+p)}(z)\frac{(\zeta-z)^p}{p!}\right|\le$$

$$\le\frac{|\Omega_1|}{\pi}\sup_{\Omega_1\setminus D}\left|\frac{\partial g(t)}{\partial\bar t}\right|\frac{|\zeta-z|^{n-k+1}(n+1)!}{d(t)^{n+2}(n-k+1)!},\tag{10}$$

где через $|\Omega_1|$ обозначена площадь области Ω_1. По определению функции $g(t)$ и по соотношению (8) имеем

$$\left|\frac{\partial g(t)}{\partial\bar t}\right|=\left|\frac{\partial F(w)}{\partial\bar w}(\varphi(t))\overline{\varphi'(t)}\right|\le$$

$$\le\frac{C}{M(Bd_1(\varphi(t)))}\max_{t\in\Omega_1}|\varphi'(t)|.\tag{11}$$

Пусть $t\in\Omega_1\setminus D$ и $d(t)=|t-t_0|$, где $t_0\in\partial D$. Тогда $\varphi(t_0)\in\overline{D}_1$. Кроме того, $|t-t_0|<2r$, $B(t_0,2r)\subset\overline{\Omega}''$, поэтому

$$d_1(\varphi(t))\le|\varphi(t)-\varphi(t_0)|\le\max_{\overline{\Omega}''}|\varphi'(z)||t-t_0|=$$

$$=\max_{\overline{\Omega}''}|\varphi'(z)|d(t).$$

Конечную величину $\max_{\overline{\Omega}''}|\varphi'(z)|$ обозначим через T. Таким образом, для $t \in \Omega_1 \setminus D$ получили оценку

$$d_1(\varphi(t)) \le Td(t).$$

Подставим ее в соотношение (11), с учетом монотонного убывания функции $M(x)$ получим

$$\left|\frac{\partial g(t)}{\partial \bar t}\right| = \left|\frac{\partial F(w)}{\partial \overline{w}}(\varphi(t))\overline{\varphi'(t)}\right| \le \frac{TC}{M(BTd(t))}.$$

Подставим это неравенство в соотношение (10):

$$\frac{(n-k+1)!}{|\zeta - z|^{n-k+1}}\left|v^{(k)}(\zeta) - \sum_{p=0}^{n-k} v^{(k+p)}(z)\frac{(\zeta - z)^p}{p!}\right| \le$$

$$\le \frac{TC|\Omega_1|}{\pi}\sup_{t\in\Omega_1\setminus D}\frac{1}{M(BTd(t))d(t)^{n+2}}.$$

По свойствам (5) и (2) регулярных последовательностей имеем

$$\sup_{t\in\Omega_1\setminus D}\frac{1}{M(BTd(t))d(t)^{n+2}} \le$$

$$\le \sup_{x>0}\frac{1}{M(BTx)x^{n+2}} = = (BT)^{n+2}m_{n+2} \le$$

$$\le BT(BTQ)^{n+1}m_{n+1} = BT(BTQ)^{n+1}\frac{M_{n+1}}{(n+1)!},$$

следовательно,

$$\frac{(n-k+1)!}{|\zeta - z|^{n-k+1}}\left|v^{(k)}(\zeta) - \sum_{p=0}^{n-k} v^{(k+p)}(z)\frac{(\zeta - z)^p}{p!}\right| \le$$

$$\le \frac{BT^2C|\Omega_1|}{\pi}(BTQ)^{n+1}M_{n+1}.$$

Таким образом, мы получили оценку

$$\sup_{n\ge0,k\le n}\sup_{\zeta,z\in D}\frac{(n-k+1)!}{(BTQ)^{n+1}M_{n+1}|\zeta - z|^{n-k+1}}\times$$

$$\times\left|v^{(k)}(\zeta) - \sum_{p=0}^{n-k} v^{(k+p)}(z)\frac{(\zeta - z)^p}{p!}\right| \le$$

$$\le \frac{BT^2C|\Omega_1|}{\pi}.$$

Поскольку $g(t) \equiv u(t) + v(t)$, то последняя оценка вместе с (9) дает соотношение

$$\sup_{n\ge0,k\le n}\sup_{\zeta,z\in D}\frac{P^{n+1}(n-k+1)!}{M_{n+1}|\zeta - z|^{n-k+1}}\times$$

$$\times\left|g^{(k)}(\zeta) - \sum_{p=0}^{n-k} g^{(k+p)}(z)\frac{(\zeta - z)^p}{p!}\right| \le C',$$

где

$$P = \min(\delta r, BTQ),$$

$$C' = \frac{\max_{t\in\Gamma}|g(t)||\Gamma|}{2\pi r} + \frac{BT^2C|\Omega_1|}{\pi}.$$

Эта оценка показывает, что $g(t) \in A(\overline{D}, M)$.

Теорема 1 доказана.

Следствие 1

Пусть D, D_1 — односвязные области, Ω, Ω_1 — области, содержащие соответственно замыкания $\overline{D}, \overline{D}_1$ и φ — конформное отображение Ω на Ω_1 такое, что $\varphi(D) = \varphi(D_1)$. Если граничная точка $w_0 \in \partial D_1$ является образом граничной точки $z_0 \in \partial D$, то есть $w_0 = \varphi(z_0)$, то для любой последовательности $M = (M_n)$ класс $A(\overline{D}_1, M)$ квазианалитичен в точке w_0 тогда и только тогда, когда класс $A(\overline{D}, M)$ квазианалитичен в точке z_0.

Доказательство

Пусть класс $A(\overline{D}_1, M)$ неквазианалитичен в точке w_0, то есть существует функция $f \in A(\overline{D}_1, M)$, равная нулю со всеми производными в точке w_0. Функция $g(w) = f(\varphi(w))$ по теореме 1 принадлежит классу $A(\overline{D}, M)$ и со всеми производными обращается в нуль в точке z_0. Тем самым, класс $A(\overline{D}, M)$ также не может быть квазианалитичным. Обратное утверждение показывается аналогично.

Следствие 2

Пусть $B' = B'(a, R)$ — внешность круга $B(a, R)$ в расширенной плоскости, то есть $B'(a, R) = \overline{\mathbb{C}} \setminus B(a, R)$. Тогда для любой точки $z_0 \in \partial B'$ критерием квазианалитичности класса $A(\overline{B}', M)$ в точке z_0 является условие

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{\frac{3}{2}}}\,dr = \infty,$$

где

$$T(r) = \sup_{n\ge0}\frac{r^n}{M_n}$$

— функция следа последовательности M.

Доказательство

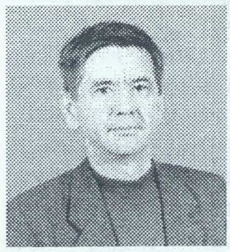
Утверждение немедленно следует из следствия 1, поскольку отображение $\varphi(w) = \frac{R}{w-a}$ конформно преобразовывает $\overline{\mathbb{C}}$ на себя, причем B' отображается на единичный круг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дынькин, Е. М.** Псевдоаналитическое продолжение гладких функций, равномерная шкала. / Е. М. Дынькин // Сб. Математическое программирование и смежные вопросы. 1976. М. С. 40.
2. **Carleman, T.** Les fonctions quasi analytiques / T. Carleman, // Paris: 1926.
3. **Ostrowski, A.** Uber quasi-analytishe Funktionen und Bestimmtheit asymptotisher Entwickelungen / A. Ostrowski // Acta Math. 1930. T.53, V.181.
4. **Mandelbrojt, S.** Series adhereentes, regularisation des suites, applications / S. Mandelbrojt // Paris: Gauther-Villars. 1952.
5. **Baltasar, R.-Salinas.** Functions with null-moments / R.-Salinas Baltasar // Rev. Acad. Ci. Madrid. 1955. T.49. PP. 331-368.
6. **Коренблюм, Б. И.** Квазианалитические классы в круге / Б. И. Коренблюм // ДАН СССР. 1965 Т.164. СС. 36-39.
7. **Юлмухаметов, Р. С.** Квазианалитические классы функций в выпуклых областях / Р. С. Юлмухаметов // Математический сб. 1986. Т.130, №.4. СС.500-520.
8. **Юлмухаметов, Р. С.** Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук / Р. С. Юлмухаметов // МИАН СССР им. Стеклова, В. 1987.
9. **Бицадзе, А. В.** Основы теории аналитических функций комплексного переменного / А. В. Бицадзе // М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. литературы, 1972. 283с.

ОБ АВТОРАХ

Трунов Кирилл Владимирович, ст. преп. каф. программирования и экономической информатики БашГУ, канд. физ-мат. наук (ИМ с ВЦ УНЦ РАН, 2005) Иссл. в обл. комплексного анализа.



Юлмухаметов Ринад Салаватович, проф., зав. каф. программирования и экономической информатики БашГУ. Дипл. математик (БашГУ, 1979). Д-р физ.-мат. наук по теор. функций (защ. в МИАН СССР, М.,1987). Иссл. в области комплексного анализа.