Уфа : УГАТУ, 2007 Вестник УГАТУ • Математика Т. 9, № 3 (21). С. 116–124

Комплексный анализ

УДК 517.55

Р. С. ЮЛМУХАМЕТОВ

СПЕКТРАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ В ЯДРЕ ОПЕРАТОРА СВЕРТКИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В работе рассматривается полнота системы элементарных решений вида $f(z) = z^\alpha \exp < z, \xi >$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, $\alpha_i \geq 0$ — целые неотрицательные числа, в пространстве всех решений однородного уравнения свертки.

спектральный синтез, уравнение свертки, весовые пространства функций, полнота полиномов, целые функции

ВВЕДЕНИЕ

Пусть D — область в $\mathbb{C}^p$, $H(D)$ — пространство функций, голоморфных в области D. Через $H^*(D)$ обозначим сильно сопряженное пространство к $H(D)$. По теореме Хана – Банаха о продолжении функционалов следует, что любой линейный непрерывный функционал $S \in H^*(D)$ продолжается до функционала на пространстве непрерывных функций $C(D)$ и представляется в виде

$$S(f) = \int\limits_D f\, d\mu, \quad f \in H(D), \qquad (1)$$

где μ — мера на D с компактным в D носителем. В силу компактности носителя μ мы можем определить следующий оператор свертки, порождаемый функционалом S: $M_S[f](\zeta) = S_z(f(z+\zeta))$, $f \in H(D)$. Значениями оператора M_S являются функции, определенные и голоморфные в некоторой окрестности точки $\zeta = 0$. Через $E(S)$ обозначим множество "элементарных"решений однородного уравнения свертки

$$M_S[f](\zeta) \equiv 0, \quad f \in H(D), \qquad (2)$$

то есть решений вида $f(z) = z^\alpha \exp < z, \xi >$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, $\alpha_i \geq 0$ — целые неотрицательные числа и $< z, \xi >= \sum\limits_{i=1}^{p} z_i \xi_i$, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot z_p^{\alpha_p}$. Напомним, что если $\widehat{S}(\lambda) = S_z(\exp < \lambda, z >)$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$, — преобразование Лапласа функционала S, то функция $f(z) = z^\alpha \exp < z, \xi >$ является элементарным решением уравнения (2) лишь тогда, когда $\widehat{S}(\xi)$ и $|\alpha|$ меньше кратности корня ξ. Через $W(D,S)$ обозначим пространство всех решений уравнения (2) и зададимся вопросом: является-ли система $E(S)$ полной в пространстве всех решений $W(D,S)$? Если ответ положительный, то говорят, что подпространство $W(D,S)$ допускает спектральный синтез.

В одномерном случае положительный ответ получен в [2]. Для частных видов областей $D \subset \mathbb{C}^p$ полнота системы элементарных решений доказана в [3]-[5]. Спектральный синтез для произвольных выпуклых областей в многомерном пространстве анонсирован в [6].

В данной работе мы приводим версию доказательства теоремы о спектральном синтезе в $H(D)$, которая несколько отличается от доказательства, намеченного в работе [6]. Новая версия доказательства позволяет решить задачу спектрального синтеза в весовых пространствах голоморфных функций. Сначала введем эти пространства.

Пусть D ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}^p$ и $U = \{u_n\}_{n=1}^\infty$ — убывающая последовательность выпуклых функций в D, удовлетворяющих условию: $u_n(z) \to \infty$ при $\operatorname{dist}(z, \partial D) \to 0$. Через $H(D,U)$ обозначим пространство функций $f \in H(D)$, удовлетворяющих условию: для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$|f(z)| \exp(-u_n(z)) \to 0, \text{когда } \operatorname{dist}(z, \partial D) \to 0.$$

Пространство $H(D,U)$ наделяется локально выпуклой топологией с помощью полунорм $p_n(f) = \sup\limits_{z\in D} |f(z)| \exp(-u_n(z))$, $n = 1, 2, \ldots$ Очевидно, что любой функционал $S \in H^*(D)$ является линейным непрерывным функционалом на $H(D,U)$ и порожденный им оператор свертки M_S действует на пространстве

Работа выпонсна при поддсржкс Российскокого фонда фундамснтальных исслсдований, грант № 02-01-01058

$H(D,U)$. Все элементарные решения уравнения (2) лежат в $H(D,U)$. Можно поставить вопрос: будет-ли полной система $E(S)$ в пространстве решений уравнения (2) из $H(D,U)$? В данной работе будет получен положительный ответ на этот вопрос при некоторых условиях на весовые функции. Доказательство ведется по обычной схеме с использованием преобразования Лапласа. Преобразованием Лапласа линейного непрерывного функционала $S \in H^*(D,U)$ называется функция $\widehat{S}(\lambda) = S_z(\exp < \lambda, z >)$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$. Следующая теорема доказана в [8].

Теорема А. *Пусть $U = \{u_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ — убывающая последовательность выпуклых функций в ограниченной выпуклой области D и*

$$v_n(\lambda) = \sup\{Re < \lambda, \overline{z} > -u_n(z) : z \in D\},$$

$\lambda \in \mathbb{C}^p$, $n \in \mathbb{N}$, — сопряженные по Юнгу к функциям $u_n(z)$. Предположим, что выполнены условия

1) для любого номера n найдется число c_n такое, что

$$v_{n+1}(\lambda) \geq v_n(\lambda) + \ln(1 + |\lambda|^2) + c_n, \quad \lambda \in \mathbb{C}^n; \tag{3}$$

2) для любого номера n $v_n \in C^2(\mathbb{C}^p)$ и для некоторого $b_n > 0$ при всех $y = (y_1, ..., y_{2p}) \in \mathbb{R}^{2p}$ выполняется оценка снизу

$$\sum_{k,m=1}^{2p} \frac{\partial^2 v_n(\lambda)}{\partial x_k \partial x_m} y_k y_m \geq \frac{12p + b_n}{1 + |\lambda|^2} |y|^2,$$

$$\lambda = (x_1 + ix_2, ..., x_{2p-1} + ix_{2p}) \in \mathbb{C}^p.$$

Через $P(v_n)$ обозначим пространство целых функций F с нормой $||F||_n = \sup\{|F(\lambda)| \exp(-v_n(\lambda)) : \lambda \in \mathbb{C}^p\}$, а через $P(D,U)$ обозначим объединение этих пространств с топологией индуктивного предела. При этих условиях преобразование Лапласа $L: \ S \ \Gamma\!\!\rightarrow \widehat{S}$ устанавливает топологический изоморфизм сильно сопряженного пространства $H^*(D,U)$ и пространства $P(D,U)$.

Эта теорема без ограничений на квадратичную форму функций v_n анонсирована в [7].

Для любого натурального m положим

$$D'_m = \{z \in D : \quad \text{dist}(z, \partial D) > \frac{1}{m}\} \tag{4}$$

и пусть $D_m, D'_m \subset D_m \subset D'_{m+1}$ — последовательность выпуклых областей с дважды гладкой границей. Следуя [15] функции

$$u_m(z) = \begin{cases} 0, & z \in \overline{D}_m, \\ +\infty, & z \in D \setminus \overline{D}_m, \end{cases}$$

будем считать выпуклыми. Если $U = (u_m)_{m=1}^{\infty}$, то $H(D,U) = H(D)$. Известно ([1]), что преобразование Лапласа устанавливает топологический изоморфизм пространств $H^*(D)$ и $P(D)$, состоящим из целых функций F, которые удовлетворяют условию: найдется компакт K в D и постоянная C, такие, что $|F(\lambda)| \leq C \exp(h_K(\lambda))$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$, где $h_K(\lambda) = \sup\{\text{Re} < \lambda, \overline{z} >: \ z \in K\}$ — опорная функция компакта K. Пространство $P(D)$ может быть описано следующим образом. Через h_m обозначим опорную функцию компакта $\overline{D}_m$ и через $P(h_m)$ обозначим банахово пространство целых функций с нормой $||F||_m = \sup\{|F(\lambda)| \exp(-h_m(\lambda)) : \ \lambda \in \mathbb{C}^p\}$. Тогда пространство $P(D)$ является объединением всех $P(h_m)$ с топологией индуктивного предела. Кроме того, сопряженные по Юнгу к функциям u_m совпадают с опорными функциями h_m и $P(D) = P(D,U)$. Таким образом, для рассматриваемой системы функций u_m преобразование Лапласа устанавливает топологический изоморфизм пространств $H^*(D,U)$ и $P(D,U)$ ([1]).

Теорема 1. *Пусть $U = \{u_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ — убывающая последовательность выпуклых функций в ограниченной выпуклой области D и преобразование Лапласа устанавливает топологический изоморфизм пространств $H^*(D,U)$ и $P(D,U)$. Если функции, сопряженные по Юнгу с v_n, удовлетворяют условию (3), то для функционала $S \in H^*(D)$ любое решение уравнения свертки (2) из пространства $H(D,U)$ приближается линейными комбинациями элементарных решений этого уравнения в топологии пространства $H(D,U)$.*

План данной работы следующий.

В §2 мы хорошо проработанными в работах предыдущих авторов методами сведем задачу о спектральном синтезе в ядре оператора свертки в пространстве $H(D,U)$ к проблеме полноты полиномов в некоторых весовых пространствах целых функций.

В §2 мы рассмотрим проблему полноты полиномов в весовых пространствах целых функций независимым образом.

Наконец, в §3 на основе результатов первых двух параграфов докажем теорему 1.

1. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ПОЛНОТА ПОЛИНОМОВ

Пусть $U = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ — убывающая последовательность выпуклых функций в ограниченной выпуклой области D, для которой выполнены условия теоремы 1. Для множества X в некотором линейно-топологическом пространстве через $X^{\perp}$, как обычно, будем обозначать аннулятор X.

Возьмем функционал $S \in H^*(D)$, множество решений уравнения (2) в пространстве $H(D,U)$ обозначим через $W(D,U,S)$. По теореме Банаха наличие спектрального синтеза для $W(D,U,S)$ равносильно совпадению аннуляторов $E^{\perp}(S)$ и $W^{\perp}(D,U,S)$. Нам потребуются следующие свойства пространства $H(D,U)$.

Лемма 1. *В условиях теоремы 1*

1. Пространство $H(D,U)$ — полное локально выпуклое рефлексивное пространство, то есть $(H^*(D,U))^* = H(D,U)$.

2. В пространстве $H(D,U)$ операторы дифференцирования действуют непрерывно.

3. Пусть $J(D,U,S) = \{f \in P(D,U) : f/\widehat{S} \in H(\mathbb{C}^p)\}$. Тогда $L(E^{\perp}(S)) = J(D,U,S)$.

4. Пусть $I(D,U,S)$ — замыкание в пространстве $P(D,U)$ множества $I'(S) = \{f \in P(D,U) : f/\widehat{S}$ — полином$\}$. Тогда $L(W^{\perp}(D,U,S)) = I(S)$.

5. Элементарные решения полны в пространстве решений уравнения (2) в $H(D,U)$ тогда и только, когда $I(D,U,S) = J(D,U,S)$.

Доказательство. Доказательство первого утверждения можно получить стандартными приемами на основе результатов из [9]. В силу условия (3) оператор умножения, например на λ_1, действует непрерывно на пространстве $P(D,U)$. При изоморфизме, устанавливаемом преобразованием Лапласа, оператору умножения на λ_1 соответствует непрерывный оператор A на $H^*(D,U)$ — оператор "сверточного умножения"на функционал δ', определенный по правилу $\delta'(f) = \frac{\partial f}{\partial z_1}(0)$, $f \in H(D,U)$. Сопряженный оператор A^* по п.1 доказываемой теоремы непрерывно действует на пространстве $H(D,U)$ и нетрудно показать ([14]), что A^* совпадает с оператором дифференцирования по переменной λ_1.

Утверждения пунктов 3 и 4 доказываются вполне аналогично доказательству соответствующих утверждений для пространства $H(D)$ в работе [10]. Необходимые факты — рефлексивность пространства $H(D,U)$ и его замкнутость относительно дифференцирования — мы уже доказали. Последнее утверждение — это следствие теоремы Банаха о полноте.

Последнее утверждение в этой лемме в более подробном изложении означает, что для наличия спектрального синтеза в ядре оператора свертки в пространстве $H(D,U)$ необходимо и достаточно, чтобы любая функция вида $f\widehat{S}$ из пространства $P(D,U)$ аппроксимировалась функциями вида $p\widehat{S}$, где p — полиномы. Если учесть топологию пространства $P(D,U)$, то это условие можно сформулировать так: для любой функции $f\widehat{S} \in P(D,U)$ должны существовать номер $m \in \mathbb{N}$ и последовательность полиномов p_n такие, что

$$|f(\lambda) - p_n(\lambda)| \le \varepsilon_n \frac{e^{v_m(\lambda)}}{|\widehat{S}(\lambda)|}, \quad \lambda \in \mathbb{C}^p,$$

где $\varepsilon_n \to 0$, при $n \to \infty$. Таким образом, речь идет о полноте полиномов в некотором весовом пространстве целых функций.

2. ПОЛНОТА ПОЛИНОМОВ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Для плюрисубгармонической (п.с.г.) функции v на $\mathbb{C}^p$ через $P(v)$ будем обозначать пространство целых функций F с нормой $||F||_{P(v)} := \sup_{\lambda\in\mathbb{C}^p}(|F(\lambda)| \exp(-v(\lambda)))$, а через $P_2(v)$ — гильбертово пространство целых функций F с нормой $||F||^2_{P_2(v)} := \int_{\mathbb{C}^p} |F(\lambda)|^2 \exp(-2v(\lambda))dm(\lambda)$. Через $D(z,r)$ будем обозначать шар с центром в точке $z \in \mathbb{C}^p$ и радиуса r. В дальнейшем мы часто будем требовать для п.с.г. функций выполнения одного условия, которое сформулируем здесь: функция $\varphi(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$, удовлетворяет условию (R) с постоянными $B, s > 0$, если

$$|\varphi(\lambda) - \varphi(\zeta)| \le B, \zeta \in D(\lambda, (1+|\lambda|^2)^{-s}), \ \lambda \in \mathbb{C}^p. \tag{R}$$

Основной для этого параграфа является следующая теорема

Теорема 2. *Пусть $v(\lambda)$ — п.с.г. функция на всем $\mathbb{C}^p$ удовлетворяющая условию (R). Предположим также, что существуют постоянные $\delta, \Delta > 0$ такие, что*

$$\delta(1 + |\lambda|) \le v(\lambda) \le \Delta(1 + |\lambda|), \ \lambda \in \mathbb{C}^p.$$

Тогда всякая функция из пространства $P(v)$ приближается полиномами в норме пространстве $P(v + (ps + p + 1)\ln(1 + |\lambda|^2))$.
Доказательство по существу основано на одной теореме из работы [11], лемме 12.2 из [10] и на теореме Л. Хермандера об L_2-оценках. Сначала сформулируем указанные теоремы в достаточной для данной ситуации форме.

Теорема B. (см. [11]) *Пусть $\varphi(\lambda) = \sup^*\varphi_\alpha(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$, где φ_α — фильтрующееся вправо семейство п.с.г. функций в $\mathbb{C}^p$. Тогда функции из пространства $P_2(\varphi)$ аппроксимируются функциями из $\bigcup\limits_\alpha P_2(\varphi_\alpha)$ по норме пространства $P_2(\varphi + \ln(1 + |\lambda|^2))$. В частности, если функции φ_α имеют логарифмический рост, то есть $\varphi_\alpha(\lambda) = O(\ln|\lambda|)$, $\lambda \to \infty$, то речь идет об аппроксимации полиномами.*

Лемма C. (см. лемма 12.2. из [10]) *Пусть φ — п.с.г. функция на $\mathbb{C}^p$ и для некоторого $\varepsilon > 0$ функция $f \in P(\varphi + \varepsilon|\lambda|)$ представляется в виде произведения функций $f_k \in P(\frac{1}{N}(\varphi + \varepsilon|\lambda|))$, $k = 1, 2, ..., N$, причем $\frac{1}{N}(\varphi(\lambda) + \varepsilon|\lambda|) \le C + \varepsilon|\lambda|$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$. Тогда f приближается полиномами в норме пространства $P(\varphi + 4\varepsilon|\lambda|)$.*

Отметим, что рассматриваемую задачу о спектральном синтезе мы сводим к вопросу о полноте полиномов в пространствах с равномерно весовыми топологиями, а намерены использовать теорему B и L_2 -оценки Л. Хермандера, в которых рассматриваются интегрально весовые нормы. Поэтому сформулируем здесь утверждение, позволяющие переходить из равномерно весовых норм к интегрально весовым и наоборот.

Лемма 2. *1. Пусть φ — п.с.г. функция в $\mathbb{C}^p$ и $F \in P(\varphi)$. Тогда*

$$||F||_{P_2(\varphi + p\ln(1+|\lambda|^2))} \le \sqrt{2S_p}||F||_{P(\varphi)}.$$

2. Пусть φ — п.с.г. функция в $\mathbb{C}^p$, удовлетворяющая условию (R) и $F \in P_2(\varphi)$. Тогда

$$||F||_{P(\varphi + ps\ln(1+|\lambda|^2))} \le \frac{e^B}{\sqrt{V}_p}||F||_{P_2(\varphi)}.$$

Здесь S_p, V_p обозначают объем единичной сферы и шара в $\mathbb{C}^p$.

Доказательство. Утверждение первого пункта тривиальное. Вторая оценка тоже простая и выводится из свойства субгармоничности функции $|F|^2$.

Лемма 3. *Пусть φ — п.с.г. функция в $\mathbb{C}^p$, удовлетворяющая условию (R). Тогда для любой точки $a \in \mathbb{C}^p$ существует целая функция F_a такая, что $F_a(a) = \exp\varphi(a)$ и*

$$\int\limits_{\mathbb{C}^p} |F_a(\lambda)|^2 e^{-2\varphi(\lambda) - ((2s+3)p+1)\ln(1+|\lambda|^2)} dm(\lambda) \le$$
$$\le C_p,$$

где $C_p = \frac{3^{2s+2}}{1+4s^2}(6e^{2B}\pi(1 + 4s^2))^p$.

Доказательство. Применим метод математической индукции по размерности пространства. Пусть $p = 1$ и

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0, & \text{когда } |t| \ge 1, \\ 1, & \text{когда } |t| \le \frac{1}{2}, \\ 2(1 - |t|), & \text{когда } \frac{1}{2} \le |t| \le 1, \end{cases}$$

тогда $|\partial\alpha(t)/\partial\bar{t}| \le 1$. Пусть $a \in \mathbb{C}$ — произвольная точка. Положим

$$g(z) = \frac{e^{\varphi(a)}}{(z - a)} \frac{\partial}{\partial\bar{z}} \alpha\left((z - a)(1 + |a|^2)^s\right), \quad z \in \mathbb{C},$$

и рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}} u(z) = g(z). \tag{5}$$

По свойствам функции $\alpha(z)$ и по условию на функцию $\varphi(z)$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{C}} |g(z)|^2 e^{-2\varphi(z)} dm(z) \le 4\pi e^{2B}(1 + |a|^2)^{2s}.$$

Из простой оценки

$$\sup_{|z-\lambda|\le 1} \frac{1 + |z|^2}{1 + |\lambda|^2} \le \frac{1 + (1 + |\lambda|)^2}{1 + |\lambda|^2} \le \frac{3 + 2|\lambda|^2}{1 + |\lambda|^2} \le 3$$

следует

$$\int\limits_{\mathbb{C}} |g(z)|^2 e^{-2\varphi(z) - (2s+1)\ln(1+|z|^2)} dm(z) \le$$
$$\le 4\pi 3^{2s+1} e^{2B}(1 + |a|^2)^{-1}.$$

По теореме Л. Хермандера уравнение (5) имеет решение u, удовлетворяющее оценке

$$\int\limits_{\mathbb{C}} |u(z)|^2 e^{-2\varphi(z) - (2s+3)\ln(1+|z|^2)} dm(z) \le$$
$$\le 2\pi 3^{2s+1} e^{2B}(1 + |a|^2)^{-1}.$$

Поскольку $|z-a|^2 \le (1+|z|)^2(1+|a|)^2 \le 4(1+|a|^2)(1+|z|^2)$, то

$$\int_{\mathbb{C}} |z-a|^2|u(z)|^2 e^{-2\varphi(z)-(2s+4)\ln(1+|z|^2)}dm(z) \le$$
$$\le 8\pi 3^{2s+1}e^{2B}.$$

Функция $F_a(z) = \alpha\left((z-a)(1+|a|^2)^s\right)\exp\varphi(a) - (z-a)u(z)$, $z \in \mathbb{C}$, в силу определения функции u является целой функцией и $F_a(a) = \exp\varphi(a)$. Кроме того,

$$\int_{\mathbb{C}} |F_a(z)|^2 e^{-2\varphi(z)-(2s+4)\ln(1+|z|^2)}dm(z) \le$$
$$\le 50\pi 3^{2s}e^{2B}.$$

Допустим, что утверждение леммы доказано для $\mathbb{C}^{p-1}$. Возьмем точку $a \in \mathbb{C}^p$. Не уменьшая общности, будем считать, что точка a лежит на $(p-1)$-мерном подпространстве $\{z_1 = 0\}$. По допущению индукции существует целая функция f от переменной $z' = (z_2,\dots,z_p) \in \mathbb{C}^{p-1}$ со свойствами $f(a') = e^{\varphi(a')}$, $a' = (a_2,\dots a_p)$,

$$\int_{\mathbb{C}^{p-1}} |f(z)|^2 e^{-2\varphi(z)-(2s(p-1)+3p-2)\ln(1+|z|^2)}dm(z) \le$$
$$\le C_{p-1}.$$

Пусть $g(z) = f(z)z_1^{-1}\overline{\partial}\alpha(z_1(1+|z'|^2)^s)$, $z = (z_1,\dots,z_p) \in \mathbb{C}^p$, где функция f рассматривается как функция на всем $\mathbb{C}^p$, зависящая только от $z' = (z_2,\dots,z_p)$, и функция $\alpha(w)$, $w \in \mathbb{C}$, определена как выше. Непосредственным вычислением получим оценку $|\overline{\partial}\alpha(z_1(1+|z'|^2)^s)|^2 \le (1+4s^2)(1+|z'|^2)^{2s}$. По свойствам функции $\alpha(w)$ имеем $|g(z)|^2 \le 4|f(z')|^2(1+4s^2)(1+|z'|^2)^{4s}$, причем $g(z) = 0$, если $|z_1| \ge (1+|z'|^2)^{-s}$. Таким образом,

$$\int_{\mathbb{C}^p} |g(z)|^2 e^{g_1(z,s,p)}dm(z) \le 4(1+4s^2)\times$$
$$\times \int_{\mathbb{C}^{p-1}(z')} |f(z')|^2(1+|z'|^2)^{4s}e^{g_1(z,s,p)}\times$$
$$\times \int_{|z_1|\le(1+|z'|^2)^{-s}} e^{g_2(z,z',s,p)}\,dm(z_1)\,dm(z'),$$

где $g_1(z,s,p) = -2\varphi(z) - (2sp+3p-2)\ln(1+|z|^2)$, $g_2(z,z',s,p) = 2(\varphi(z')-\varphi(z)) + (2sp+3p-2)\ln\frac{1+|z'|^2}{1+|z|^2}$.

Отсюда по условию (R) на функцию φ получим

$$\int_{\mathbb{C}^p} |g(z)|^2 e^{-2\varphi(z)-(2sp+3p-2)\ln(1+|z|^2)}dm(z) \le$$
$$\le 4\pi(1+4s^2)e^{2B}C_{p-1}.$$

Рассмотрим теперь уравнение $\overline{\partial}u = g$. По теореме Л. Хермандера это уравнение имеет решение u, удовлетворяющее оценке

$$\int_{\mathbb{C}^p} |u(z)|^2 e^{-2\varphi(z)-(2sp+3p)\ln(1+|z|^2)}dm(z) \le$$
$$\le 2\pi(1+4s^2)e^{2B}C_{p-1}.$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{C}^p} |z_1u(z)|^2 e^{-2\varphi(z)-(2sp+3p+1)\ln(1+|z|^2)}dm(z) \le$$
$$\le 2\pi(1+4s^2)e^{2B}C_{p-1}. \quad (6)$$

Положим $F_a(z) = f(z')\alpha(z_1(1+|z'|^2)^s) - z_1u(z)$, $z \in \mathbb{C}^p$. По определению функции u функция F_a — целая и по допущению индукции $F_a(a) = \exp\varphi(a)$. Кроме того, по свойствам функции α имеем

$$\int_{\mathbb{C}^p} |f(z')|^2\alpha(z_1(1+|z'|^2)^s)\times$$
$$\times e^{-2\varphi(z)-(2sp+3p+1)\ln(1+|z|^2)}dm(z) \le \pi e^{2B}C_{p-1}.$$

Эта оценка вместе с (6) и неравенством треугольника для норм дает соотношение

$$\int_{\mathbb{C}^p} |F_a(z)|^2 e^{-2\varphi(z)-(2sp+3p+1)\ln(1+|z|^2)}dm(z) \le$$
$$\le e^{2B}6\pi(1+4s^2)C_{p-1}.$$

Таким образом, можно взять $C_1 = 50\pi e^{2B}3^{2s}$, $C_p = 6\pi e^{2B}(1+4s^2)C_{p-1}$, $p > 1$. Лемма 3 доказана.

Следствие. *Пусть φ — п.с.г. функция в $\mathbb{C}^p$, удовлетворяющая условию (R). Тогда функция F_a из леммы 3 удовлетворяет равномерной оценке*

$$|F_a(\lambda)|^2 \le c_p e^{2\varphi(\lambda)+(3sp+3p+1)\ln(1+|\lambda|^2)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}^p,$$

где $c_p = \frac{e^{2B}3^{2s+2}}{V_p(1+4s^2)}(6\pi e^{2B}(1+4s^2))^p$.

Доказательство. Данное утверждение следует из пункта 2 леммы 2.

Лемма 4. *Пусть φ — неотрицательная п.с.г. функция в $\mathbb{C}^p$, удовлетворяющая условию (R) и такая, что $\varphi(\lambda) \le \Delta(1+|\lambda|)$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$. Тогда для любого $\sigma > 0$ функции из пространства $P(\varphi+\sigma|\lambda|)$ приближаются полиномами в норме пространства $P(\varphi+9\sigma|\lambda|)$*

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию переменной $\lambda \in \mathbb{C}^p$

$$w(\lambda) = \sup{}^*\{u(\lambda) - \mathrm{psh}, u(z) = O(\ln|z|),\ u(z) \le \varphi(z) + 8\sigma|z|,\ z \in \mathbb{C}^p\}.$$

Положим $N = [\Delta/\sigma] + 3$, где $[x]$ обозначает целую часть x. Тогда $(\Delta+2\sigma)/N \le \sigma$. Пусть $u(\lambda) = (\varphi(\lambda)+\sigma|\lambda|)/N$. Эта функция удовлетворяет условию (R) с константами $(B+\sigma)/N, s$. По утверждению следствия леммы 3 для любой точки $a \in \mathbb{C}^p$ существует функция F_a, равная $\exp((\varphi(a)+\sigma|a|)/N)$ в точке a и удовлетворяющая оценке

$$|F_a(\lambda)| \le c_p e^{\frac{1}{N}(\varphi(\lambda)+\sigma|\lambda|)+(3sp+3p+1)\ln(1+|\lambda|^2)},\quad \lambda \in \mathbb{C}^p,$$

где величина c_p определяется как в следствии к лемме 3 и зависит только от размерности p и чисел B, s, Δ, σ. Оценку сверху для функции F_a запишем в виде $|F_a(\lambda)| \le c_p' \exp(\frac{1}{N}(\varphi(\lambda)+2\sigma|\lambda|))$, при этом постоянная c_p' зависит лишь от p, B, Δ, s, σ и N. Функция $f_a = (F_a/c_p')^N$ равна $(c_p')^{-N}e^{\varphi(a)+\sigma|a|}$ в точке a и удовлетворяет оценке $|f_a(\lambda)| \le \exp(\varphi(\lambda)+2\sigma|\lambda|)$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$. По выбору числа N функции f_a удовлетворяют условиям леммы С, где вместо ε надо взять 2σ. По утверждению этой леммы каждая функция f_a приближается полиномами в норме пространства $P(\varphi+8\sigma|\lambda|)$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует полином $p_{a,\varepsilon}$, такой, что $|f_a(\lambda) - p_{a,\varepsilon}(\lambda)| \le \varepsilon\exp(\varphi(\lambda)+8\sigma|\lambda|)$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$. Тогда полином $q_{a,\varepsilon} = \frac{1}{1+\varepsilon}p_{a,\varepsilon}$ обладает свойствами $|q_{a,\varepsilon}(\lambda)| \le \exp(\varphi(\lambda)+8\sigma|\lambda|)$ для всех λ и $|q_{a,\varepsilon}(a)| \ge ((c_p')^{-N}\exp(\varphi(a)+\sigma|a|) - \varepsilon\exp(\varphi(a)+8\sigma|a|))/(1+\varepsilon)$. Из оценки сверху и из определения функции w следует, что $w(\lambda) \ge \ln|q_{a,\varepsilon}(\lambda)|$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$. В точке a воспользуемся нижней оценкой для $q_{a,\varepsilon}(a)$, устремим затем ε к нулю и получим нижнюю оценку для функции w, а именно $w(a) \ge \varphi(a) + \sigma|a| - N\ln c_p'$, $a \in \mathbb{C}^p$. Отсюда следует, что пространство $P(\varphi+\sigma|\lambda|)$ содержится в пространстве $P(w)$. По пункту 1 леммы 2 имеем $P(w) \subset P_2(w+p\ln(1+|\lambda|^2))$. Функция $w + p\ln(1+|\lambda|^2)$ по определению функции w является верхней огибающей семейства п.с.г. функций логарифмического роста. По теореме В функции из пространства $P_2(w+p\ln(1+|\lambda|^2))$, значит и функции из пространства $P(\varphi+\sigma|\lambda|)$, аппроксимируются полиномами в норме пространства $P_2(w+(p+1)\ln(1+|\lambda|^2))$, тем более в норме пространства $P_2(\varphi+8\sigma|\lambda|)$. В пункте 2 леммы 2 в качестве функции φ можно взять функцию $\varphi+8\sigma|\lambda|$, потому что для этой функции условие (R) выполняется с константами $B+8\sigma, s$. С учетом утверждения п.2 леммы 2 получим, что функции из $P(\varphi+\sigma|\lambda|)$ аппроксимируются полиномами в норме пространства $P(\varphi+8\sigma|\lambda|+ps\ln(1+|\lambda|^2))$, тем более в норме пространства $P(\varphi+9\sigma|\lambda|)$. Лемма 4 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Пусть функция v удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда функция $v_1(\lambda) = v(\lambda) + p\ln(1+|\lambda|^2)$ также удовлетворяет условиям теоремы 2 с постоянными $B + p\ln 3, s$ в условии (R) и $\Delta + p$ вместо Δ. Для $\alpha \in (0;1)$ через φ_α обозначим функцию $(1-\alpha)v_1$. Применим к функции φ_α лемму 4 с $\sigma_\alpha = \frac{\alpha\delta}{10}$. Получим, что все функции из пространства $P(\varphi_\alpha + \sigma_\alpha|\lambda|)$ аппроксимируются полиномами в норме пространства $P(\varphi_\alpha+9\sigma_\alpha|\lambda|)$. Поскольку для всех λ имеем $v_1(\lambda) \ge v(\lambda) \ge \delta(1+|\lambda|) \ge \delta|\lambda|$ и $\varphi_\alpha(\lambda) + 9\sigma_\alpha|\lambda| + p\ln(1+|\lambda|^2) \le v_1(\lambda) - \frac{\alpha\delta}{10}|\lambda| + p\ln(1+|\lambda|^2) \le v_1(\lambda) + \mathrm{const}$, то в силу пункта 1 леммы 2 получим, что функции из пространств $P(\varphi_\alpha + \sigma_\alpha|\lambda|)$ при любом $\alpha \in (0;1)$ приближаются полиномами в норме пространства $P_2(v_1)$. Функция $\varphi_\alpha + \sigma_\alpha|\lambda|$ удовлетворяет условию (R) с постоянными $(1-\alpha)(B+p\ln 3)\sigma_\alpha, s$. Из леммы 2 следует равенство множеств

$$\bigcup_{\alpha\in(0;1)} P(\varphi_\alpha + \sigma_\alpha|\lambda|)) = \bigcup_{\alpha\in(0;1)} P_2(\varphi_\alpha + \sigma_\alpha|\lambda|)$$

Таким образом, функции из этих объединений аппроксимируются полиномами в норме пространства $P_2(v_1)$. Поскольку $\varphi_\alpha(\lambda) + \sigma_\alpha|\lambda| \le v_1(\lambda)$ и $\lim_{\alpha\to 0}(\varphi_\alpha(\lambda) + \sigma_\alpha|\lambda|) = v_1(\lambda)$ в каждой точке $\lambda \in \mathbb{C}^p$, то $\sup^*(\varphi_\alpha(\lambda) + \sigma_\alpha|\lambda|) = v_1(\lambda)$. Значит, по теореме В функции из пространства $P_2(v_1)$ приближаются функциями из $\bigcup_{\alpha\in(0;1)} P_2(\varphi_\alpha + \sigma_\alpha|\lambda|)$ в норме пространства $P_2(v_1 + \ln(1+|\lambda|^2))$. Таким образом, функции из пространства $P_2(v_1)$ приближаются полиномами в норме пространства $P_2(v_1(\lambda) + \ln(1+|\lambda|^2))$. Снова по п.1 леммы 2 получаем, что функции из $P(v)$ приближаются полиномами в норме пространства $P_2(v_1 + \ln(1 + |\lambda|^2))$. Поскольку функция $v_1(\lambda) + \ln(1 + |\lambda|^2) = v(\lambda) + (p + 1)\ln(1 + |\lambda|^2)$ удовлетворяет условию (R), то из п.2 леммы 2 вытекает, что функции из $P(v)$ приближаются полиномами в норме пространства $P(v + (ps + p + 1)\ln(1 + |\lambda|^2))$. Теорема 2 доказана.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

В первом параграфе мы свели задачу спектрального синтеза в ядре оператора свертки M_S, где $S \in H^*(D)$, к вопросу о полноте полиномов в индуктивном пределе весовых пространств $P(v_m - \ln|\widehat{S}|)$. Сначала мы опишем эти пространства с помощью весов, более пригодных для применения теоремы 2. Сформулируем два простых утверждения.

Лемма 5. *Пусть функция u — полунепрерывна снизу в $\overline{D}$ и $v(\lambda) = \sup\{Re < \lambda, z > - u(z) : z \in D\}$ — сопряженная по Юнгу функция. Тогда v удовлетворяет условию Липшица $|v(\lambda_1) - v(\lambda_2)| \leq M(D)|\lambda_1 - \lambda_2|$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^p$, где $M(D) = \max\{|z|, z \in \overline{D}\}$.*

Это утверждение следует непосредственно из определения сопряженной по Юнгу функции.

Лемма 6. *Пусть w, v — субгармонические функции в $\mathbb{R}^m$, причем $w(0) > -\infty$ и $v(x) + w(x) \leq C(1 + |x|)$, $w(x) \leq c(1 + |x|)$, $x \in \mathbb{R}^m$. Тогда $v(x) \leq (4C + 2^{m+1}c)(1 + |x|) - 2^m w(0)$, $x \in \mathbb{R}^m$.*

Доказательство. Для двумерного пространства ($m = 2$) утверждение леммы вытекает из леммы в работе [13]. Для $m > 2$ доказательство аналогичное.

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ введем следующие семейства функций

$$\mathcal{K}_m = \{t : t - \text{п.с.г. в } \mathbb{C}^p, t(\lambda) \leq$$
$$\leq v_m(\lambda) - \ln|\widehat{S}(\lambda)|, \lambda \in \mathbb{C}^p\}.$$

Каждое из этих семейств локально ограничено сверху. В самом деле, возьмем бесконечно дифференцируюмую, неотрицательную функцию α, зависящую только от $|z|$, равную нулю при $|z| > 1$ и с единичным полным интегралом. Для каждой локально-интегрируемой функции f можно определить ее регуляризации

$$f_\varepsilon(z) = \int\limits_{\mathbb{C}^p} \frac{1}{\varepsilon^{2p}} \alpha\left(\frac{\zeta - z}{\varepsilon}\right) f(\zeta) dm(\zeta),$$

где $\varepsilon > 0$ и $dm(\zeta)$ — элемент объема в $\mathbb{C}^p$. Известно ([12]), что регуляризации бесконечно дифференцируемы и если f (плюри) субгармонична, то при любом $\varepsilon > 0$ функция f_ε (плюри) субгармонична и $f_\varepsilon(z) \geq f(z)$. Возьмем $\varepsilon = 1$. Регуляризация $(v_m - \ln|\widehat{S}|)_\varepsilon$, как непрерывная функция ограничена на компактах. По свойствам регуляризаций п.с.г. функций для любой функции $t \in \mathcal{K}_m$ и при всех λ имеем $t(\lambda) \leq t_\varepsilon(\lambda) \leq (v_m - \ln|\widehat{S}|)_\varepsilon(\lambda)$. Таким образом, верхняя огибающая $V_m(\lambda) = \sup^*\{t(\lambda) : \ t \in \mathcal{K}_m\}$ является п.с.г. функцией. Если F — целая и для всех $(\lambda) \in \mathbb{C}^p$ $\ln|F(\lambda)| \leq v_m(\lambda) - \ln|\widehat{S}(\lambda)|$, то $\ln|F| \in \mathcal{K}_m$. По определению V_m получим $\ln|F(\lambda)| \leq V_m(\lambda)$ для всех (λ), значит

$$\sup_{\mathbb{C}^p} |F(\lambda)| e^{-V_m(\lambda)} = \sup_{\mathbb{C}^p} |F(\lambda)| \frac{|\widehat{S}(\lambda)|}{e^{v_m(\lambda)}}, \quad \lambda \in \mathbb{C}^p. \tag{7}$$

Лемма 7. *Пусть S — функционал, имеющий представление (1), и — полунепрерывная снизу функция в D, ограниченная сверху на некотором D_m (см. (4)), содержащем носитель меры μ. Положим $v(\lambda) = \sup\{Re < \lambda, z > - u(z) : z \in D\}$,*

$$\mathcal{K} = \{t : t - \textit{п.с.г. в} \mathbb{C}^p,$$
$$t(\lambda) \leq v(\lambda) - \ln|\widehat{S}(\lambda)|, \lambda \in \mathbb{C}^p\},$$
$$V(\lambda) = \sup{}^*\{t(\lambda) : \ t \in \mathcal{K}\},$$

$w(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{C}^p} \alpha(\zeta - z) V(\zeta) dm(\zeta)$. Тогда имеют место соотношения

1. $V(\lambda) \leq w(\lambda) \leq V(\lambda) + M(D)$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$, $M(D) = \sup\{|z| : z \in D\}$;

2. Существует постоянная B, зависящая только от области D, функционала S и функции u, такая, что выполняется оценка $|\mathrm{grad} w(\lambda)| \leq B\sqrt{|\lambda|^2 + 1}$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$.

Доказательство. Утверждение первого пункта — непосредственное следствие свойств регуляризации п.с.г. функций и липшицевости функции v (см. лемму 5). Оценим теперь градиент функции w. Пусть $M = \sup|\mathrm{grad}\alpha(z)|$. Тогда

$$|\mathrm{grad}\, w(\lambda)| \leq M \int\limits_{D(\lambda,1)} |V(z)|\, dm(z), \quad \lambda \in \mathbb{C}^p,$$

и нам необходимо оценить интеграл от функции $|V|$ по шару $D(\lambda, 1)$ в $\mathbb{C}^p$. Для этого применим лемму 6 к функциям $V, \ln|\widehat{S}|$. По условию леммы функционал S имеет представление (1) и $\mathrm{supp}(\mu) \subset D_m$, поэтому

$$|\widehat{S}(\lambda)| \leq |\mu|(D) \exp \sup_{z \in D_m} \mathrm{Re} < \lambda, z > =$$

$$= |\mu|(D)e^{h_m(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}^p. \quad (8)$$

Следовательно,

$$\ln|\widehat{S}(\lambda)| \le \ln|\mu|(D) + M(D)|\lambda| \le$$
$$\le (\ln^+|\mu|(D) + M(D))(|\lambda|+1), \quad \lambda \in \mathbb{C}^p. \quad (9)$$

Если $\inf\{u(z) : z \in D\} = u_0$, то по определению функции V для всех $\lambda \in \mathbb{C}^p$

$$V(\lambda)+\ln|\widehat{S}(\lambda)| \le v(\lambda) \le \sup_{z\in D}\mathrm{Re} < \lambda, z > -u_0 \le$$
$$\le (M(D)+u_0^-)(|\lambda|+1). \quad (10)$$

Пока предположим, что $\widehat{S}(0) \ne 0$. Из (9), (10) видно, что для функций V и $\ln|\widehat{S}|$ условия леммы 6 выполнены и тем самым найдется постоянная A, зависящая от области D, функционала S и функции u, такая, что $V(\lambda) \le A(|\lambda|+1)$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$. Если же $\widehat{S}(0) = 0$, то возьмем точку λ_0, $|\lambda_0| < 1$, такую, что $\widehat{S}(\lambda_0) \ne 0$. Затем проведем оценки функций $V(\lambda+\lambda_0)+\ln|\widehat{S}(\lambda+\lambda_0)|$, $\ln|\widehat{S}(\lambda+\lambda_0)|$ и получим оценку функции $V(\lambda+\lambda_0)$. Оценим функцию V снизу. Пусть $\sup\{u(z) : z \in D_m\} = M'$, тогда $v(\lambda) \ge \sup\{\mathrm{Re} < \lambda, z > -u(z) : z \in D_m\} \ge h_m(\lambda) - M'$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$. Учитывая (8), имеем $V(\lambda) \ge -M' - \ln|\mu|(D)$. Итак, существует постоянная B' такая, что $|V(\lambda)| \le B'(|\lambda|+1)$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$.

Лемма 7 доказана.

На основе лемм 5-7 можем доказать теорему 1. В первом параграфе проблему спектрального синтеза в ядре оператора M_S свели к проблеме полноты полиномов в индуктивном пределе пространств $P(v_k - \ln|\widehat{S}|)$, а равенство (7) показывает, что нам достаточно показать полноту полиномов в индуктивном пределе пространств $P(V_k)$. Положим $w_k(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{C}^p} \alpha(\zeta-\lambda)V_k(\zeta)dm(\zeta)$. Из первого утверждения леммы 7 следует, что пространства $P(w_k)$ и $P(V_k)$ совпадают и нам достаточно доказать полноту полиномов в индуктивном пределе пространств $P(w_k)$.

Покажем, что каждая из функций w_k удовлетворяет условиям теоремы 2. Функции w_k по второму утверждению леммы 7 удовлетворяют условию (R) с некоторой постоянной B и $s = \frac{1}{2}$. Поучим нижнюю оценку для каждой функции w_k. Функционал S по предположению имеет представление (1). Пусть m — наименьшее натуральное число, для которого $\mathrm{supp}\mu \subset D_m$ (см. (4)), возьмем произвольный номер $k > m$ и положим $r_k = \sup\{u_k(z) : z \in D_k\}$. Для сопряженных по Юнгу выполняется оценка $v_k(\lambda) \ge \sup\{\mathrm{Re} < \lambda, z > - r_k : z \in D_k\} = h_k(\lambda) - r_k$. Отсюда и из (11) следует, что

$$\frac{e^{v_k(\lambda)}}{|\widehat{S}(\lambda)|} \ge \frac{1}{|\mu|(D)e^{r_k}}e^{h_k(\lambda)-h_m(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}^p, \quad (11)$$

Поскольку для любого номера s верно включение $D_s + D(0, \frac{1}{s(s+1)}) \subset D_{s+1}$, то $h_{s+1}(\lambda) \ge h_s(\lambda) + \frac{1}{s(s+1)}|\lambda|$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}^p$. Таким образом, из (11) следует оценка $v_k(\lambda) - \ln|\widehat{S}(\lambda)| \ge -\ln|\mu|(D) - r_k + |\lambda|/(m(m+1))$. Так как в правой части стоит п.с.г. функция, то $V_k(\lambda) \ge -\ln|\mu|(D) - r_k + |\lambda|/(m(m+1))$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$, и по лемме 7 (пункт 1) такое же соотношение верно для регуляризаций $w_k(\lambda) \ge -\ln|\mu|(D) - r_k + |\lambda|/(m(m+1))$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$. Осталось получить верхние оценки для функций w_k. Пусть $b_k = \inf\{u_k(z) : z \in D\}$. Тогда $v_k(\lambda) \le \sup\{\mathrm{Re} < \lambda, z > -b_k : z \in D\} \le M(D)|\lambda| - b_k \le (M(D)+|b_k|)(|\lambda|+1)$, поэтому $V_k(\lambda) + \ln|\widehat{S}(\lambda)| \le v_k(\lambda) \le (M(D) + |b_k|)(|\lambda|+1)$. Пока предположим, что $\widehat{S}(0) \ne 0$. Применим лемму 6 к функциям V_k и $\ln|\widehat{S}|$. Учитывая (8) и последнюю оценку получим, что функция $\exp V_k$ имеет конечный тип при первом порядке. По лемме 7 регуляризация w_k допускает оценку $w_k(\lambda) \le \Delta(|\lambda| + 1)$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$. Если $\widehat{S}(0) = 0$, то возьмем точку λ_0, $|\lambda_0| < 1$, $\widehat{S}(\lambda_0) \ne 0$, и применим лемму 6 к функциям $V_k(\lambda+\lambda_0)$ и $\ln|\widehat{S}(\lambda+\lambda_0)|$. Таким образом, каждая функция w_k, $k > m$, удовлетворяет условиям теоремы 2 с $s = \frac{1}{2}$ и с некоторыми B, Δ, δ. По этой теореме функции из пространства $P(w_k)$ аппроксимируются полиномами в норме пространства $P(w_k + (2p+1)\ln(1+|\lambda|^2))$. Тогда по условию (3) функции из пространства $P(w_k)$ аппроксимируются полиномами в норме пространства $P(w_{k+2p+1})$. Значит, полиномы полны в индуктивном пределе $P(D, U)$.

Теорема 1 доказана.

ВЫВОДЫ

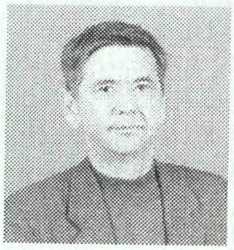
В данной работе решена задача спектрального синтеза в весовых пространствах голоморфных функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ehrenpreis, L.** Fourire analysis in several complex variables / L. Ehrenpreis. New York: Wiley-Intersci. publishers, 1970.
2. **Красичков-Терновский, И. Ф.** Однородное уравнение типа свертки на выпуклых

областях / И. Ф. Красичков-Терновский // ДАН СССР. 1971. Т.197. №. С.29-31.
3. **Malgrange, B.** Existence et approximation des solutions aux des equations derivees partelles et des equations de convolution / B. Malgrange // Ann. Inst. Fourier 1955-56. V.6. P.271-355.
4. **Ehrenpreis, L.** Mean periodic function / L. Ehrenpreis // Amer. J. Math. 1955. V. 77. N2. P.293-326.
5. **Напалков, В. В.** Уравнения свертки в многомерных пространствах / В. В. Напалков. М.: Наука, 1982.
6. **Юлмухаметов, Р. С.** Однородные уравнения свертки / Р. С. Юлмухаметов // ДАН СССР. 1991. Т.316. N2. С.312-315.
7. **Епифанов, О. В.** Двойственность одной пары пространств аналитических функций ограниченного роста / О. В. Епифанов // Докл. АН СССР. 1991. Т.319, №6. С. 1297-1300.
8. **Абузярова, Н. Ф., Юлмухаметов, Р. С.** Сопряженные пространства к весовым пространствам аналитических функций / Н. Ф. Абузярова, Р. С. Юлмухаметов // Сиб. мат. ж. 2001. Т.42. №1. С.3-17.
9. **Гротендик, А. О.** О пространствах (F) и (DF) / А. О. Гротендик // Математика. 1958. Т.2. №3. С.81-127.
10. **Кривошеев, А. С., Напалков, В. В.** Комплексный анализ и операторы свертки /А. С. Кривошеев, В. В. Напалков // УМН. 1992. Т.47. В.6. С.3-58.
11. **Sibony, N.** Approximation polinomiale ponderee dans un domaine d'holomorphie de $\mathbb{C}^n$ / N. Sibony // Ann. Inst. Fourier. Grenoble. 1976. T.26. V.2. P.77-99.
12. **Ронкин, Л. И.** Введение в теорию целых функций многих переменных / Л. И. Ронкин. М.: Наука, 1971.
13. **Красичков-Терновский, И. Ф.** Оценка субгармонической разности субгармонических функций. I / И. Ф. Красичков-Терновский // Математический сборник. 1977. Т.102(144). № 2. С.216-247.
14. **Хермандер, Л.** Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных / Л. Хермандер. М.: Мир, 1968.
15. **Рокафеллар, Р.** Выпуклый анализ / Р. М. Рокафеллар. М.: Мир, 1973.

ОБ АВТОРЕ



Юлмухаметов Ринад Салаватович, проф., зав. каф. программирования и экономической информатики БашГУ. Дипл. математик (БашГУ, 1979). Д-р физ.-мат. наук по теор. функций (защ. в МИАН СССР, М.,1987). Иссл. в обл. комплексного анализа.