Уфа : УГАТУ, 2007 Вестник УГАТУ • Математика Т. 9, №3 (21). С. 145–149

Дифференциальные уравнения

УДК 517.956

В. О. ЛУКАЩУК

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Доказывается условие совместности совокупности m систем полулинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с малым параметром на m неизвестных функций, имеющих одинаковые дифференциальные операторы. Изучается структура общего приближенного решения таких систем. *Система полулинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка; структура общего решения*

Рассматривается система $r\times m$ полулинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с малым параметром ε:

$$\begin{aligned} &L_{a_0}\theta^\alpha \approx \psi^\alpha_{a_0}(x,\theta;\varepsilon),\ \alpha=1,\dots,m,\\ &\qquad\qquad a_0=1,\dots,r_0,\\ &\varepsilon L_{a_1}\theta^\alpha \approx \varepsilon\psi^\alpha_{a_1}(x,\theta),\quad a_1=r_0+1,\dots,r,\end{aligned}\tag{1}$$

где $L_{a_0}=L_{a_0(0)}+\varepsilon L_{a_0(1)}$, $L_{a_1}=L_{a_1(0)}$ – дифференциальные операторы вида

$$L_{a_t(s)}=\xi^i_{a_t(s)}(x)\frac{\partial}{\partial x^i},\ t,s=0,1,$$

$$x=(x^1,\dots,x^n)\in\mathbb{R}^n.$$

Здесь и далее используется правило суммирования по повторяющемуся индексу, а приближенное равенство $f\approx g$ означает $f-g=o(\varepsilon)$. Будем считать, что операторы $L_{a_t(0)}$, $t=0,1$, линейно независимы, и, следовательно, $r\le n$.

По аналогии с теорией интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка без малого параметра (см., например, [1], [2]), первым шагом интегрирования системы (1) является исследование ее полноты и совместности. Исследование полноты сводится к построению скобок Якоби всех пар уравнений системы. Обозначим $\overline{L}_{a_0}=\left(\xi^i_{a_0(0)}(x)+\varepsilon\xi^i_{a_0(1)}(x)\right)D_i$, $\overline{L}_{a_1}= =\xi^i_{a_1(0)}(x)D_i$, где $D_i=\dfrac{\partial}{\partial x^i}+\dfrac{\partial\theta^\beta}{\partial x^i}\dfrac{\partial}{\partial\theta^\beta}+\dots$ – оператор полной производной по переменной x^i. Получаем три различных типа скобок Якоби $\{.,.\}$ для уравнений системы (1):

$$\begin{aligned}&\{\overline{L}_{a_0}(\theta^\beta),\overline{L}_{b_0}(\theta^\beta)\}=\overline{L}_{a_0}\left(L_{b_0}\theta^\beta-\psi^\beta_{b_0}\right)-\\ &-\overline{L}_{b_0}\left(L_{a_0}\theta^\beta-\psi^\beta_{a_0}\right)=[L_{a_0},L_{b_0}]\,\theta^\beta+\\ &+\left(L_{b_0}\psi^\beta_{a_0}-L_{a_0}\psi^\beta_{b_0}\right)+\left(\psi^\mu_{b_0}\frac{\partial\psi^\beta_{a_0}}{\partial\theta^\mu}-\psi^\mu_{a_0}\frac{\partial\psi^\beta_{b_0}}{\partial\theta^\mu}\right),\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}&\varepsilon\{\overline{L}_{a_0(0)}(\theta^\beta),\overline{L}_{b_1}(\theta^\beta)\}=\varepsilon\overline{L}_{a_0(0)}\left(L_{b_1}\theta^\beta-\psi^\beta_{b_1}\right)-\\ &-\varepsilon\overline{L}_{b_1}\left(L_{a_0(0)}\theta^\beta-\psi^\beta_{a_0(0)}\right)=\varepsilon\left[L_{a_0(0)},L_{b_1}\right]\theta^\beta+\\ &\quad+\varepsilon\left(L_{b_1}\psi^\beta_{a_0(0)}-L_{a_0(0)}\psi^\beta_{b_1}\right)+\\ &\quad+\varepsilon\left(\psi^\mu_{b_1}\frac{\partial\psi^\beta_{a_0(0)}}{\partial\theta^\mu}-\psi^\mu_{a_0(0)}\frac{\partial\psi^\beta_{b_1}}{\partial\theta^\mu}\right),\end{aligned}\tag{3}$$

$$\begin{aligned}&\varepsilon\{\overline{L}_{a_1}(\theta^\beta),\overline{L}_{b_1}(\theta^\beta)\}=\varepsilon\overline{L}_{a_1}\left(L_{b_1}\theta^\beta-\psi^\beta_{b_1}\right)-\\ &-\varepsilon\overline{L}_{b_1}\left(L_{a_1}\theta^\beta-\psi^\beta_{a_1}\right)=\varepsilon\left[L_{a_1},L_{b_1}\right]\theta^\beta+\\ &+\varepsilon\left(L_{b_1}\psi^\beta_{a_1}-L_{a_1}\psi^\beta_{b_1}\right)+\varepsilon\left(\psi^\mu_{b_1}\frac{\partial\psi^\beta_{a_1}}{\partial\theta^\mu}-\psi^\mu_{a_1}\frac{\partial\psi^\beta_{b_1}}{\partial\theta^\mu}\right),\end{aligned}\tag{4}$$

где $[L_{a_t},L_{b_s}]=L_{a_t}(L_{b_s})-L_{b_s}(L_{a_t})$ – коммутатор операторов L_{a_t} и L_{b_s}, $t,s=0,1$.

Если θ^β является решением системы (1), то левые части соотношений (2), (3), (4) приближенно равны нулю. Правые части (2), (3), (4) дают дифференциальные уравнения на θ^β с операторами $[L_{a_t},L_{b_s}]$, $t,s=0,1$. Отметим, что дифференциальные уравнения с операторами $\left[L_{a_0(0)},L_{b_1}\right]$ и $[L_{a_1},L_{b_1}]$ являются уравнениями первого порядка по ε, что следует из построения скобок Якоби. Полученные таким образом уравнения могут либо представляться как линейные комбинации уравнений исходной системы, либо быть линейно независимыми с ними или же приводить к алгебраическим соотношениям на x, θ, ε. Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

1. Новые уравнения являются линейной комбинацией исходных.

Тогда в силу системы (1) соотношения (2), (3), (4) обращаются тождественно в нуль, и система (1) полна.

Построим решение системы (1). Найдем сначала решение соответствующей однородной системы

$$\begin{aligned} L_{a_0}\sigma &\approx 0, \quad a_0 = 1,\dots,r_0,\\ \varepsilon L_{a_1}\sigma &\approx 0, \quad a_1 = r_0+1,\dots,r. \end{aligned} \tag{5}$$

Предполагая, что ее решение имеет вид $\sigma(x,\varepsilon) = \sigma_{(0)}(x) + \varepsilon\sigma_{(1)}(x) + o(\varepsilon)$, расщеплением по ε получаем

$$\begin{aligned} \Omega_0 : \ & \xi^\alpha_{a_0(0)}(x)\frac{\partial\sigma_{(0)}}{\partial x^\alpha} = 0,\\ & \xi^\alpha_{a_1(0)}(x)\frac{\partial\sigma_{(0)}}{\partial x^\alpha} = 0,\\ \Omega_1 : \ & \xi^\alpha_{a_0(0)}(x)\frac{\partial\sigma_{(1)}}{\partial x^\alpha} + \xi^\alpha_{a_0(1)}(x)\frac{\partial\sigma_{(0)}}{\partial x^\alpha} = 0. \end{aligned}$$

Система Ω_0 является однородной и имеет ранг r. Следовательно, имеется $s_0 = n - r$ функционально независимых решений этой системы. Тогда система Ω_1 является неоднородной относительно неизвестных функций $\sigma_{(1)}$, а ранг соответствующей ей однородной системы равен r_0. Поэтому (см. [3]) исходная система (5) имеет $s_1 = n - r_0$ независимых решений вида

$$\begin{aligned} \sigma^{i_0}(x,\varepsilon) &= \sigma^{i_0}_{(0)}(x) + \varepsilon\sigma^{i_0}_{(1)}(x), \quad i_0 = 1,\dots,s_0,\\ \sigma^{i_1}(x,\varepsilon) &= \varepsilon\sigma^{i_1}_{(0)}(x), \qquad\qquad\quad i_1 = s_0+1,\dots,s_1. \end{aligned}$$

Используя найденные решения, построим замену переменных для системы (1):

$$\begin{aligned} \overline{x}^i &= x^i, && i = 1,\dots,r_0,\\ \overline{x}^k &= \sigma^k_{(0)}(x), && k = r_0+1,\dots,r,\\ \overline{x}^j &= \sigma^j_{(0)}(x) + \varepsilon\sigma^j_{(1)}(x), && j = r+1,\dots,n. \end{aligned}$$

Тогда в новых переменных операторы L_{a_t}, $t = 0,1$, можно привести к виду

$$\begin{aligned} L_{a_0} &= \Big(\xi^i_{a_0(0)}(\overline{x}) + \varepsilon\xi^i_{a_0(1)}(\overline{x})\Big)\frac{\partial}{\partial\overline{x}^i}, \ i = 1,\dots,r_0,\\ L_{a_1} &= \xi^j_{a_1(0)}(\overline{x})\frac{\partial}{\partial\overline{x}^j}, \ j = r_0+1,\dots,r, \end{aligned}$$

а переменные $\overline{x}^{r+1},\dots,\overline{x}^n$ рассматриваются как параметры. Предполагая, что решение системы (1) имеет вид $\theta^\alpha = \theta^\alpha_{(0)} + \varepsilon\theta^\alpha_{(1)} + o(\varepsilon)$, $\alpha = 1,\dots,m$ и расщепляя ее по ε, получим

$$\begin{aligned} \Omega_0 : \ & L_{a_t(0)}\theta^\alpha_{(0)} = \psi^\alpha_{a_t(0)}(\overline{x},\theta_{(0)}), \quad t = 0,1,\\ \Omega_1 : \ & L_{a_0(0)}\theta^\alpha_{(1)} + L_{a_0(1)}\theta^\alpha_{(0)} =\\ & \qquad = \frac{\partial\psi^\alpha_{a_0(0)}}{\partial\theta^\beta}\theta^\beta_{(1)} + \psi^\alpha_{a_0(1)}(\overline{x},\theta_{(0)}). \end{aligned}$$

Поскольку ранг матрицы системы Ω_0 равен r, ее решение зависит от m произвольных функций $\nu_{\alpha,(0)}$, каждая из которых является функцией $n-r$ аргументов, и согласно [2] имеет вид:

$$\theta^\alpha_{(0)} = \varphi^\alpha_{(0)}\left(\overline{x}^1,\dots,\overline{x}^r,\nu_{1,(0)},\dots,\nu_{m,(0)}\right),$$

где $\nu_{\beta,(0)} = \nu_{\beta,(0)}\left(\overline{x}^{r+1},\dots,\overline{x}^n\right)$, $\beta = 1,\dots,m$. Ранг матрицы системы Ω_1 равен r_0, следовательно, ее решение зависит от m произвольных функций, входящих в решение системы Ω_0, и m произвольных функций $\nu_{\alpha,(1)}$, являющихся функциями $n-r_0$ аргументов:

$$\begin{aligned} \theta^\alpha_{(1)} = \varphi^\alpha_{(1)}\big(&\overline{x}^1,\dots,\overline{x}^{r_0},\nu_{1,(1)},\dots,\nu_{m,(1)},\\ &\nu_{1,(0)},\dots,\nu_{m,(0)}\big), \end{aligned}$$

где $\nu_{\beta,(1)} = \nu_{\beta,(1)}\left(\overline{x}^{r_0+1},\dots,\overline{x}^n\right)$, $\beta = 1,\dots,m$. Возвращаясь к исходным переменным, получим решение системы (1) в виде

$$\begin{aligned} \theta^\alpha \approx \ & \varphi^\alpha_{(0)}\Big(x^1,\dots,x^{r_0},\sigma^{r_0+1}_{(0)}(x),\dots,\sigma^r_{(0)}(x),\\ & \qquad \nu_{1,(0)},\dots,\nu_{m,(0)}\Big) +\\ & +\varepsilon\varphi^\alpha_{(1)}\Big(x^1,\dots,x^{r_0},\nu_{1,(1)},\dots,\nu_{m,(1)},\\ & \qquad \nu_{1,(0)},\dots,\nu_{m,(0)}\Big), \end{aligned}$$

где $\nu_{\beta,(0)} = \nu_{\beta,(0)}\left(\sigma^{r+1}(x),\dots,\sigma^n(x)\right)$, $\nu_{\beta,(1)} = \nu_{\beta,(1)}\Big(\sigma^{r_0+1}_{(0)}(x),\dots,\sigma^r_{(0)}(x),\sigma^{r+1}(x),\dots,\sigma^n(x)\Big)$, $\alpha = 1,\dots,m$, $\beta = 1,\dots,m$.

2. Новые уравнения в силу системы (1) дают алгебраические уравнения на x,θ,ε.

Другими словами, операторы $[L_{a_t}, L_{b_s}]$, $t,s = 0,1$ являются линейными функциями исходных операторов системы (1), то есть

$$\begin{aligned} [L_{a_0}, L_{b_0}] &= \lambda^{c_0}_{a_0b_0}(x,\varepsilon)L_{c_0} + \varepsilon\lambda^{c_1}_{a_0b_0}(x)L_{c_1},\\ \varepsilon[L_{a_s}, L_{b_1}] &= \varepsilon\lambda^{c_0}_{a_sb_1}(x)L_{c_0} + \varepsilon\lambda^{c_1}_{a_sb_1}(x)L_{c_1}, \end{aligned} \tag{6}$$

где $c_0 = 1,\dots,r_0$, $c_1 = r_0+1,\dots,r$, $s = 0,1$. Тогда получаем систему F алгебраических уравнений, связывающих x,θ,ε:

$$F : \quad \begin{aligned} \omega^\alpha_{(0)}(x,\theta) + \varepsilon\omega^\alpha_{(1)}(x,\theta) &\approx 0,\\ \varepsilon\omega^\beta_{(0)}(x,\theta) &\approx 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где $\alpha = 1,\ldots,h_0$, $\beta = h_0+1,\ldots,h$. Подействовав далее операторами L_{a_0} и L_{a_1} на уравнения системы F, в силу (1) можно прийти к новой системе алгебраических уравнений F_1, уравнения которой либо являются следствиями системы F, либо вводят новые дополнительные алгебраические соотношения на x,θ,ε. Действуя на них операторами L_{a_0} и L_{a_1}, получим ряд систем алгебраических уравнений $F, F_1,\ldots,F_N$ таких, что дальнейшее действие L_{a_0}, L_{a_1} не приводит к новым уравнениям. Обозначим объединение систем уравнений $F, F_1,\ldots,F_N$ за новую систему F, которая имеет вид (7).

Следующим шагом необходимо разрешать уравнения (7) относительно "базисных переменных" θ как функции "свободных переменных" θ (по аналогии с терминологией линейной алгебры) и независимых переменных x. Если при этом возникает хотя бы одно соотношение, связывающее только x^i,

$$\omega(x;\varepsilon) \approx 0, \tag{8}$$

то система (1) считается несовместной. Если при разрешении (7) не возникает уравнений типа (8), то исходная система (1) совместна. Это означает, что после подстановки решений системы (7) в (1) уравнения на "базисные переменные" θ удовлетворяются тождественно в силу уравнений на "свободные переменные" θ, а уравнения на "свободные" θ совместны и полны в силу (7). Доказательство этого утверждения разделяется на три случая:

a) $rg\left\|\dfrac{\partial\omega^\alpha_{(0)}}{\partial\theta}\right\| = p \le h_0,\ \ rg\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial\omega^\alpha_{(0)}}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial\omega^\beta_{(0)}}{\partial\theta}\end{matrix}\right\| =$
$= q \le h$, причем $p<q$.

b) $rg\left\|\dfrac{\partial\omega^\alpha_{(0)}}{\partial\theta}\right\| = rg\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial\omega^\alpha_{(0)}}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial\omega^\beta_{(0)}}{\partial\theta}\end{matrix}\right\| = p \le h_0$, то есть все независимые уравнения системы F имеют вид первых h_0 уравнений системы (7).

c) $rg\left\|\dfrac{\partial\omega^\alpha_{(0)}}{\partial\theta}\right\| = 0$, то есть все уравнения системы имеют вид последних $h-h_0$ уравнений системы (7).

Рассмотрим их подробно.

а) Отсутствие соотношений типа (8) равносильно выполнению равенств

$$rg\left\|\frac{\partial\omega^\alpha_{(0)}}{\partial\theta}\right\| = rg\left\|\frac{\partial\omega^\alpha_{(0)}}{\partial x},\frac{\partial\omega^\alpha_{(0)}}{\partial\theta}\right\|,$$

$$rg\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial\omega^\alpha_{(0)}}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial\omega^\beta_{(0)}}{\partial\theta}\end{matrix}\right\| = rg\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial\omega^\alpha_{(0)}}{\partial x}, & \dfrac{\partial\omega^\alpha_{(0)}}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial\omega^\beta_{(0)}}{\partial x}, & \dfrac{\partial\omega^\beta_{(0)}}{\partial\theta}\end{matrix}\right\|.$$

Построим решение системы (7). Согласно теореме о неявной функции, решение первых p уравнений системы (7) имеет вид

$$\theta^k(x,\varepsilon) \approx \varphi^k_{(0)}\left(x,\theta^{p+1},\ldots,\theta^m\right) + \\ +\varepsilon\varphi^k_{(1)}\left(x,\theta^{p+1},\ldots,\theta^m\right),\ k=1,\ldots,p. \tag{9}$$

Подставляя найденные решения в оставшиеся $q-p$ уравнений системы (7), находим:

$$\theta^l(x,\varepsilon) \approx \varphi^l_{(0)}\left(x,\theta^{q+1},\ldots,\theta^m\right) + \varepsilon\theta^l_{(1)}(x),$$

где $\theta^l_{(1)}(x)$, $\theta^\gamma(x,\varepsilon) \approx \theta^\gamma_{(0)}(x) + \varepsilon\theta^\gamma_{(1)}(x)$, $l = p+1,\ldots,q$, $\gamma = q+1,\ldots,m$ – произвольные функции. Тогда, используя решение (9) с указанным порядком точности, решение исходной системы (7) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\theta^k(x,\varepsilon) &\approx \varphi^k_{(0)}\left(x,\theta^{p+1},\ldots,\theta^m\right) + \\ &+\varepsilon\varphi^k_{(1)}\left(x,\theta^{q+1},\ldots,\theta^m\right),\\ \theta^l(x,\varepsilon) &\approx \varphi^l_{(0)}(x,\theta^{q+1},\ldots,\theta^m)+\varepsilon\theta^l_{(1)}(x),\end{aligned} \tag{10}$$

где $k=1,\ldots,p$, $l=p+1,\ldots,q$.

Для дальнейшего доказательства полноты систем на $\theta^{p+1}_{(1)},\ldots,\theta^q_{(1)}$ и $\theta^{q+1},\ldots,\theta^m$ перепишем систему (7) в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned}\theta^k(x,\varepsilon) &\approx \varphi^k_{(0)}\left(x,\theta^{p+1},\ldots,\theta^m\right) + \\ &+\varepsilon\varphi^k_{(1)}\left(x,\theta^{q+1},\ldots,\theta^m\right),\\ \varepsilon\theta^l(x,\varepsilon) &\approx \varepsilon\varphi^l_{(0)}\left(x,\theta^{q+1},\ldots,\theta^m\right).\end{aligned} \tag{11}$$

Действуя операторами L_{a_0} и L_{a_1} на уравнения системы (11), получаем

$$\psi^k_{a_0}(x,\theta,\varepsilon) \approx L_{a_0}\varphi^k_{(0)}\left(x,\theta^l,\theta^\gamma\right) + \\ +\psi^l_{a_0}(x,\theta,\varepsilon)\frac{\partial\varphi^k_{(0)}}{\partial\theta^l} + \psi^\gamma_{a_0}(x,\theta,\varepsilon)\frac{\partial\varphi^k_{(0)}}{\partial\theta^\gamma} + \\ +\varepsilon\left(L_{a_0}\varphi^k_{(1)}\left(x,\theta^\gamma\right) + \psi^\gamma_{a_0}(x,\theta,\varepsilon)\frac{\partial\varphi^k_{(1)}}{\partial\theta^\gamma}\right),$$

$$\psi^k_{a_1}(x,\theta) \approx L_{a_1}\varphi^k_{(0)}(x,\theta^l,\theta^\gamma)+$$
$$+\psi^l_{a_1}(x,\theta)\frac{\partial\varphi^k_{(0)}}{\partial\theta^l}+\psi^\gamma_{a_1}(x,\theta)\frac{\partial\varphi^k_{(0)}}{\partial\theta^\gamma}+$$
$$+\varepsilon\left(L_{a_1}\varphi^k_{(1)}(x,\theta^\gamma)+\psi^\gamma_{a_1}(x,\theta)\frac{\partial\varphi^k_{(1)}}{\partial\theta^\gamma}\right),$$

$$\varepsilon\psi^l_{a_0}(x,\theta,\varepsilon)\approx\varepsilon L_{a_0}\varphi^l_{(0)}(x,\theta^\gamma)+$$
$$+\varepsilon\psi^\gamma_{a_0}(x,\theta,\varepsilon)\frac{\partial\varphi^l_{(0)}}{\partial\theta^\gamma},$$

$$\varepsilon\psi^l_{a_1}(x,\theta)\approx\varepsilon L_{a_1}\varphi^l_{(0)}(x,\theta^\gamma)+$$
$$+\varepsilon\psi^\gamma_{a_1}(x,\theta)\frac{\partial\varphi^l_{(0)}}{\partial\theta^\gamma}. \tag{12}$$

Поскольку система (11) эквивалентна системе F, то в силу правила построения F все уравнения системы (12) являются ее следствиями. Поэтому после подстановки решений (10), первые p уравнений системы (12) обращается в тождество по $\theta^{p+1},\ldots,\theta^m$, а остальные уравнения – по $\theta^{q+1},\ldots,\theta^m$.

Покажем, что решения (10) удовлетворяют исходной системе (1). Подставляя $\theta^1,\ldots,\theta^p$ из (10) в (1), получаем

$$L_{a_0}\varphi^k_{(0)}(x,\theta^l,\theta^\gamma)+L_{a_0}\theta^l\frac{\partial\varphi^k_{(0)}}{\partial\theta^l}+L_{a_0}\theta^\gamma\frac{\partial\varphi^k_{(0)}}{\partial\theta^\gamma}+$$
$$+\varepsilon\left(L_{a_0}\varphi^k_{(1)}(x,\theta^\gamma)+L_{a_0}\theta^\gamma\frac{\partial\varphi^k_{(1)}}{\partial\theta^\gamma}\right)\approx\psi^k_{a_0}(x,\theta;\varepsilon),$$

$$\varepsilon L_{a_1}\varphi^k_{(0)}(x,\theta^l,\theta^\gamma)+\varepsilon L_{a_1}\theta^l\frac{\partial\varphi^k_{(0)}}{\partial\theta^l}+$$
$$+\varepsilon L_{a_1}\theta^\gamma\frac{\partial\varphi^k_{(0)}}{\partial\theta^\gamma}\approx\varepsilon\psi^k_{a_1}(x,\theta).$$

Предполагая, что система на $\theta^{p+1},\ldots,\theta^m$ полна (будет доказано позже), получаем первые p уравнений системы (12), которые удовлетворяются тождественно по $\theta^{p+1},\ldots,\theta^m$.

Аналогично, подставляя $\theta^{p+1},\ldots,\theta^q$ из (10) в (1), находим

$$L_{a_0}\varphi^l_{(0)}(x,\theta^\gamma)+L_{a_0}\theta^\gamma\frac{\partial\varphi^l_{(0)}}{\partial\theta^\gamma}+\varepsilon L_{a_0}\theta^l_{(1)}\approx\psi^l_{a_0}(x,\theta;\varepsilon),$$
$$\varepsilon L_{a_1}\varphi^l_{(0)}(x,\theta^\gamma)+\varepsilon L_{a_1}\theta^\gamma\frac{\partial\varphi^l_{(0)}}{\partial\theta^\gamma}\approx\varepsilon\psi^l_{a_1}(x,\theta).$$

Используя, как и ранее, предположение о полноте системы на $\theta^{q+1},\ldots,\theta^m$, получаем уравнения с операторами L_{a_1}, удовлетворяющиеся тождественно по $\theta^{q+1},\ldots,\theta^m$ как уравнения системы (12). Оставшиеся уравнения (с операторами L_{a_0}) разложим в ряд по ε. Собирая слагаемые при $\varepsilon=0$, имеем тождество по $\theta^{q+1},\ldots,\theta^m$ в силу оставшихся $q-p$ уравнений системы (12). Остальные слагаемые формируют уравнение на $\theta^{p+1}_{(1)},\ldots,\theta^q_{(1)}$:

$$\varepsilon L_{a_0(0)}\theta^l_{(1)}=\varepsilon\left\{-L_{a_0(1)}\varphi^l_{(0)}+\theta^l_{(1)}\frac{\partial\psi^l_{a_0(0)}}{\partial\theta^l}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial\varphi^k_{(0)}}{\partial\theta^l}\theta^l_{(1)}+\varphi^k_{(1)}\right)\frac{\partial\psi^l_{a_0(0)}}{\partial\theta^k}+\psi^l_{a_0(1)}\right\}-$$
$$-\varepsilon\frac{\partial\varphi^l_{(0)}}{\partial\theta^\gamma}\left\{\left(\frac{\partial\varphi^k_{(0)}}{\partial\theta^l}\theta^l_{(1)}+\varphi^k_{(1)}\right)\frac{\partial\psi^\gamma_{a_0(0)}}{\partial\theta^k}+\right.$$
$$\left.+\theta^l_{(1)}\frac{\partial\psi^\gamma_{a_0(0)}}{\partial\theta^l}+\psi^\gamma_{a_0(1)}\right\}.$$

Следовательно, вместо решения исходной системы (1), осталось решить систему, состоящую из уравнений на $\theta^{p+1}_{(1)},\ldots,\theta^q_{(1)}$ и $\theta^{q+1},\ldots,\theta^m$. Для доказательства полноты новой системы нужно воспользоваться тождествами (11) и (12), возможностью дифференцировать первые p уравнений тождества (12) по $\theta^{p+1},\ldots,\theta^m$, а остальные уравнения – по $\theta^{q+1},\ldots,\theta^m$, и линейной зависимостью операторов (6). Решение полученной системы строится аналогично пункту 1 и имеет вид

$$\theta^l_{(1)}=\varphi^l_{(1)}\left(x,\nu_{1,(1)},\ldots,\nu_{m-p,(1)},\right.$$
$$\left.\nu_{1,(0)},\ldots,\nu_{m-q,(0)}\right),$$
$$\theta^\gamma\approx\varphi^\gamma_{(0)}\left(x,\nu_{1,(0)},\ldots,\nu_{m-q,(0)}\right)+$$
$$+\varepsilon\varphi^\gamma_{(1)}\left(x,\nu_{1,(1)},\ldots,\nu_{m-p,(1)},\right.$$
$$\left.\nu_{1,(0)},\ldots,\nu_{m-q,(0)}\right),$$

где

$$\nu_{\beta,(1)}=\nu_{\beta,(1)}\left(\sigma^{r_0+1}_{(0)}(x),\ldots,\sigma^r_{(0)}(x),\right.$$
$$\left.\sigma^{r+1}(x),\ldots,\sigma^n(x)\right),$$
$$\nu_{\mu,(0)}=\nu_{\mu,(0)}\left(\sigma^{r+1}(x),\ldots,\sigma^n(x)\right),$$
$$\beta=1,\ldots,m-p,\ \mu=1,\ldots,m-q,$$
$$\gamma=q+1,\ldots,m,\ l=p+1,\ldots,q.$$

Таким образом, общее решение системы (1) запишется как

$$\theta^k\approx\varphi^k_{(0)}(x,\theta^{p+1},\ldots,\theta^m)+\varepsilon\varphi^k_{(1)}(x,\theta^{q+1},\ldots,\theta^m),$$
$$\theta^l\approx\varphi^l_{(0)}(x,\theta^{q+1},\ldots,\theta^m)+$$
$$+\varepsilon\varphi^l_{(1)}\left(x,\nu_{1,(1)},\ldots,\nu_{m-p,(1)},\right.$$
$$\left.\nu_{1,(0)},\ldots,\nu_{m-q,(0)}\right),$$
$$\theta^\gamma\approx\varphi^\gamma_{(0)}\left(x,\nu_{1,(0)},\ldots,\nu_{m-q,(0)}\right)+$$
$$+\varepsilon\varphi^\gamma_{(1)}\left(x,\nu_{1,(1)},\ldots,\nu_{m-p,(1)},\right.$$
$$\left.\nu_{1,(0)},\ldots,\nu_{m-q,(0)}\right),$$

где $k = 1, \ldots, p$, $l = p+1, \ldots, q$, $\gamma = q + 1, \ldots, m$.

b) Аналогично пункту a), при отсутствии соотношений типа (8) выполняются равенства

$$rg\left\|\frac{\partial\omega^{\alpha}_{(0)}}{\partial\theta}\right\| = rg\left\|\frac{\partial\omega^{\alpha}_{(0)}}{\partial x}, \frac{\partial\omega^{\alpha}_{(0)}}{\partial\theta}\right\| =$$

$$= rg\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial\omega^{\alpha}_{(0)}}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial\omega^{\beta}_{(0)}}{\partial\theta}\end{matrix}\right\| = rg\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial\omega^{\alpha}_{(0)}}{\partial x}, & \dfrac{\partial\omega^{\alpha}_{(0)}}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial\omega^{\beta}_{(0)}}{\partial x}, & \dfrac{\partial\omega^{\beta}_{(0)}}{\partial\theta}\end{matrix}\right\|$$

Решение рассматриваемой системы запишется как первые p соотношений (10). Все остальные рассуждения остаются в силе и общее решение системы уравнений (1) может быть получено в виде

$$\theta^k \approx \varphi^k_{(0)}(x, \theta^{p+1}, \ldots, \theta^m) + \varepsilon\varphi^k_{(1)}(x, \theta^{p+1}, \ldots, \theta^m),$$
$$\theta^{\gamma} \approx \varphi^{\gamma}_{(0)}\left(x, \nu_{1,(0)}, \ldots, \nu_{m-p,(0)}\right) + $$
$$+\varepsilon\varphi^{\gamma}_{(1)}\left(x, \nu_{1,(1)}, \ldots, \nu_{m-p,(1)};\ \nu_{1,(0)}, \ldots, \nu_{m-p,(0)}\right),$$

где $k = 1, \ldots, p$, $\gamma = p+1, \ldots, m$.

c) В этом случае систему (7) можно переписать в виде

$$\varepsilon\overline{\omega}^{\beta}_{(0)}(x, \theta) \approx 0, \qquad \beta = 1, \ldots, h.$$

При $rg\left\|\dfrac{\partial\overline{\omega}^{\beta}_{(0)}}{\partial\theta}\right\| = rg\left\|\dfrac{\partial\overline{\omega}^{\beta}_{(0)}}{\partial x}, \dfrac{\partial\overline{\omega}^{\beta}_{(0)}}{\partial\theta}\right\| = p$ решение полученной системы имеет вид последних $q-p$ соотношений (10). Остальные рассуждения остаются справедливыми. Общее решение системы (1) в этом случае имеет вид

$$\theta^k \approx \varphi^k_{(0)}(x, \theta^{p+1}, \ldots, \theta^m) + $$
$$+\varepsilon\varphi^k_{(1)}\left(x, \nu_{1,(1)}, \ldots, \nu_{m,(1)};\ \nu_{1,(0)}, \ldots, \nu_{m-p,(0)}\right),$$
$$\theta^{\gamma} \approx \varphi^{\gamma}_{(0)}(x, \nu_{1,(0)}, \ldots, \nu_{m-p,(0)}) + $$
$$+\varepsilon\varphi^{\gamma}_{(1)}\left(x, \nu_{1,(1)}, \ldots, \nu_{m,(1)};\ \nu_{1,(0)}, \ldots, \nu_{m-p,(0)}\right)$$

где $k = 1, \ldots, p$, $\gamma = p+1, \ldots, m$.

Таким образом, доказана следующая

Теорема. Для того чтобы система (1) имела решение необходимо и достаточно, чтобы число функционально независимых по θ уравнений систем $F, F_1, \ldots, F_N$ было меньше числа неизвестных, эти уравнения были совместны для всех значений x^i, а уравнения системы F_{N+1} удовлетворялись в силу предшествующих систем.

3. *Новые уравнения являются линейно независимыми относительно исходных.*

В этом случае система (1) дополняется этими уравнениями и для новой системы снова строятся скобки Якоби. Если в результате получаются уравнения, не являющиеся линейной комбинацией имеющихся, то процесс повторяется. Иначе получается либо тождественное равенство нулю скобок Якоби и решение системы записывается аналогично пункту 1, либо скобки Якоби приводят к алгебраическим уравнениям на x, θ, ε и решение определяется в соответствии с пунктом 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гюнтер, Н. М.** Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных / Н. М. Гюнтер // Ленинград–Москва: ОНТИ ГТТИ. 1934. С. 55–116.
2. **Эйзенхарт, Л. П.** Непрерывные группы преобразований / Л. П. Эйзенхарт // М.: ГИ Иностранной литературы. 1927. С. 7–12.
3. **Gazizov, R. K.** Representation of general invariants for approximate transformation groups / R. K. Gazizov // J. Math. Anal. and Appl. 1997. Vol. 213, No. 1. P. 202–228.

ОБ АВТОРЕ

Лукащук Вероника Олеговна, аспирант, ассистент кафедры ВВТиС УГАТУ. Дипл. математик, системный программист (УГАТУ, 2004). Исследования в области группового анализа, дифференциальных уравнений