Уфа : УГАТУ, 2007 Вестник УГАТУ • Управление, ВТ и И Т. 9, № 4 (22). С. 34–38

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 531.388

Р. Р. ИСЛАМОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ С ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИЕЙ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Исследуется устойчивость решений динамической системы с гироскопической стабилизацией для различных классов параметрических возмущений. Получены новые результаты о резонансных свойствах таких систем для специальных классов параметрических возмущений. Приводятся формулы для определения границы области неустойчивости через параметры системы. *Устойчивость; гироскопическая стабилизация; матрица возмущения*

Большое число задач физики и техники сводится к исследованию систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, что подчеркивает актуальность указанной проблемы. Достаточно указать на теорию нелинейных колебаний, небесную механику, динамическую устойчивость упругих систем и проблемы волновой механики. С такими уравнениями приходится встречаться при исследовании движения гироскопических систем в линейном приближении при вибрациях основания (гиромаятник, гирокомпас и т. д.).

Для некоторых классов линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, где отсутствуют гироскопические связи, известны теоремы об устойчивости решения *М. Г. Крейна* и *К. Г. Валеева*.

Существенный интерес представляет обобщение этих результатов на системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и гироскопическими связями. Недостаточно изученным является вопрос о параметрическом резонансе в системах с гироскопической стабилизацией при периодических возмущениях.

Целью настоящей работы является исследование устойчивости решений определенного класса системы линейных дифференциальных уравнений с гироскопической стабилизацией при действии различных периодических матриц возмущений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть уравнение движения системы в случае параметрических возмущений имеет вид

$$A\ddot{X} + G\dot{X} - BX = \varepsilon M(\theta t)X. \tag{1.1}$$

Здесь $X = \{x_1, ..., x_{2n}\}$ — вектор, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, A, B — вещественные постоянные диагональные матрицы

$$\begin{aligned} &A = \mathrm{diag}\,(a_1, ..., a_{2n}), \\ &B = \mathrm{diag}\,(b_1, ..., b_{2n}), \\ &a_k > 0,\ b_k > 0\ (k = 1, 2, ..., 2n); \end{aligned} \tag{1.2}$$

G — кососимметрическая матрица вида

$$\begin{pmatrix} 0 & H_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -H_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -H_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & H_{2n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -H_{2n-1} & 0 \end{pmatrix}$$
$$(H_{2m-1} > 0,\ m = 1, 2, ..., n); \tag{1.3}$$

$M(\theta t)$ — вещественная периодическая $2n \times 2n$ матрица с периодом $T = 2\pi\theta^{-1}$, представленная рядами Фурье

$$M(\theta t) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \left\| \chi_{rs}^{(\kappa)} \right\|_1^{2n} e^{i\kappa\theta t}, \tag{1.4}$$

где $i = \sqrt{-1}$, $\chi_{rs}^{(0)} = 0$, $r = 1, ..., 2n$; $s = 1, ..., 2n$; матрица $M(\theta t)$ имеет нулевое среднее значение; точка над переменными обозначает дифференцирование по времени.

Предполагается, что все решения уравнения

$$A\ddot{X} + G\dot{X} - BX = 0 \tag{1.5}$$

ограничены при $t \to \infty$ (за счет гироскопического члена $G\dot{X}$).

Целью данной работы является исследование устойчивости решений системы (1.1) при параметрических возмущениях. Аналогичная задача была рассмотрена в работе [1]. Принципиальное различие исследуемой здесь задачи состоит в том, что решения системы (1.5) при отсутствии гироскопического члена $G\dot{X}$ неустойчивы, а в работе [1] был рассмотрен случай, когда решения системы при отсутствии гироскопического члена и $\varepsilon = 0$ были устойчивы.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЦ ВОЗМУЩЕНИЙ

Исследуем устойчивость решений системы (1.1) в случае симметрической матрицы $M(\theta t)$. Квадраты частот собственных колебаний системы (1.1) находятся из формулы

$$\omega^2_{2s-1,2s} = \frac{H^2_{2s-1}}{2a_{2s-1}a_{2s}}\Big[1 - (\mu_{2s-1} + \mu_{2s}) \pm \pm\sqrt{(1-\mu_{2s-1}-\mu_{2s})^2 - 4\mu_{2s-1}\mu_{2s}}\Big], \quad (2.1)$$

$$\begin{gathered}\mu_{2s-1} = b_{2s-1}a_{2s}H^{-2}_{2s-1},\\ \mu_{2s} = b_{2s}a_{2s-1}H^{-2}_{2s-1},\\ (s = 1, 2, ..., n),\end{gathered} \quad (2.2)$$

где $a_1, ..., a_{2n}$, $b_1, ..., b_{2n}$ и H_{2s-1} $(s = 1, 2, ..., n)$ — элементы матриц A, B (1.2) и G (1.3). Здесь ω_{2s-1} и ω_{2s} — частоты нутационных и прецессионных колебаний ($\omega_{2s-1} \gg \omega_{2s}$).

Границы $\theta_\pm$ области неустойчивости для системы (1.1) на плоскости параметров ε, θ имеют вид

$$\theta_\pm = \theta_0 \pm \lambda_\pm \varepsilon, \quad (2.3)$$

$$\theta_0 = \gamma^{-1}\left|\omega_l \pm \omega_m\right|, \quad (2.4)$$

где λ_+, λ_- определяются из формулы

$$\lambda_\pm = \pm\gamma^{-1}\sqrt{g} \quad (\gamma = 1, 2, ...), \quad (2.5)$$

а величина g находится по формуле, приведенной в работах [2, 3]. Отметим, что в статье рассматривается случай резонанса, когда соотношение (2.4) выполняется при данном θ_0 лишь при единственном наборе номеров l, m, γ и выборе знака в (2.4).

На основании результатов работ [1–3], для g в случае симметрической матрицы $M(\theta t)$, получим выражения вида

$$g = \pm(-1)^{l+m}\sigma_{2j-1}\sigma_{2h-1}\rho(\chi), \quad (2.6)$$

где

$$\rho(\chi) = \left(c_1\left|\chi^{(\gamma)}_{2j,2h}\right| \mp c_2\left|\chi^{(\gamma)}_{2j-1,2h-1}\right|\right)^2 + \left(c_3\left|\chi^{(\gamma)}_{2j,2h-1}\right| \pm c_4\left|\chi^{(\gamma)}_{2j-1,2h}\right|\right)^2 \geqslant 0. \quad (2.7)$$

Здесь

$$c_1 = \left(\beta_l\beta_m\frac{\lambda_{2j}\lambda_{2h}}{a_{2j}a_{2h}}\right)^{\frac{1}{2}}, \; c_2 = \left(\frac{\lambda_{2j-1}\lambda_{2h-1}}{\beta_l\beta_m a_{2j-1}a_{2h-1}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$c_3 = \left(\frac{\beta_l\lambda_{2j}\lambda_{2h-1}}{\beta_m a_{2j}a_{2h-1}}\right)^{\frac{1}{2}}, \; c_4 = \left(\frac{\beta_m\lambda_{2j-1}\lambda_{2h}}{\beta_l a_{2j-1}a_{2h}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\sigma_{2s-1} = \left(\omega^2_{2s-1} - \omega^2_{2s}\right)^{-1} > 0, \; \lambda_{2s-1} = H_{2s-1}a^{-1}_{2s-1},$$

$$\lambda_{2s} = H_{2s-1}a^{-1}_{2s},$$

$$\beta_{2s-1} = \frac{\omega_{2s-1}\lambda_{2s-1}}{\omega^2_{2s-1} + \nu_{2s}} > 0, \; \beta_{2s} = \frac{\omega_{2s}\lambda_{2s-1}}{\omega^2_{2s} + \nu_{2s}} > 0,$$

$$\nu_{2s} = \frac{b_{2s}}{a_{2s}},$$

$$\begin{pmatrix} l = 2j-1, 2j; \; m = 2h-1, 2h; \\ j, h, s = 1, 2, ..., n \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

В выражении (2.6) для g верхний знак соответствует частоте

$$\theta_0 = \gamma^{-1}(\omega_l + \omega_m), \quad (2.9)$$

а нижний знак относится к сопряженной частоте

$$\theta^*_0 = \gamma^{-1}\left|\omega_l - \omega_m\right|. \quad (2.10)$$

Так как в формуле (2.5) значение g находится под квадратным корнем, то исследуем знаки g.

В случае частот

$$\theta_0 = \gamma^{-1}(\omega_{2j-1} + \omega_{2h-1}) \quad (2.11)$$

и

$$\theta_0 = \gamma^{-1}(\omega_{2j} + \omega_{2h}), \quad (2.12)$$

полученных из (2.9) при значениях индексов $l = 2j$, $m = 2h$ и $l = 2j-1$, $m = 2h-1$ соответственно, а также для частот

$$\theta^*_0 = \gamma^{-1}\left(\omega_{2j-1} - \omega_{2h}\right), \quad (2.13)$$

полученных из (2.10) при значениях индексов $l = 2j-1$, $m = 2h$, находим, что выражение (2.6) для g принимает неотрицательное значение ($g \geqslant 0$).

А для частот (2.10) вида

$$\theta_0^* = \gamma^{-1}\left|\omega_{2j-1} - \omega_{2h-1}\right|, \quad (l = 2j-1,\ m = 2h-1), \tag{2.14}$$

$$\theta_0^* = \gamma^{-1}\left|\omega_{2j} - \omega_{2h}\right|, \quad (l = 2j,\ m = 2h), \tag{2.15}$$

и частот (2.9)

$$\theta_0 = \gamma^{-1}(\omega_{2j} + \omega_{2h-1}), \quad (l = 2j, m = 2h-1), \tag{2.16}$$

из формулы (2.6) получим, что $g \leqslant 0$.

Итак, из анализа знаков для g в формуле (2.6) приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Если в системе (1.1) с положительно определенными диагональными матрицами A, B и кососимметрической матрицей G матрица возмущения $M(\theta t)$ – симметрическая, то частоты (2.11), (2.12) и (2.13) не могут быть сильно устойчивыми [1], а частоты (2.14), (2.15) и (2.16) не могут быть сильно неустойчивыми.*

Таким образом, получен новый результат для систем вида (1.1) при симметрической матрице возмущений $M(\theta t)$. Теорема 1 обобщает теорему *М. Г. Крейна* [4] и *К. Г. Валеева* [3] на случай систем с гироскопическим членом $G\dot{X}$.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ КОСОСИММЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЦ ВОЗМУЩЕНИЙ

Пусть в системе (1.1) матрица $M(\theta t)$ – кососимметрическая. Используя работы [1] и [2], для g находим формулу

$$g = \mp(-1)^{l+m}\sigma_{2j-1}\sigma_{2h-1}\rho(\chi), \tag{3.1}$$

где значения $\rho(\chi) \geq 0$, $\sigma_{2j-1} > 0$, $\sigma_{2h-1} > 0$ находим из выражений (2.7) и (2.8).

В формуле (3.1) верхний знак соответствует частоте (2.9), а нижний знак – частоте (2.10).

Аналогично анализируя знаки для g (3.1) для различных частот, приходим к теореме:

Теорема 2. *Пусть в системе (1.1) диагональные матрицы A, B определенно положительны, матрица G – кососимметрическая. Тогда, если матрица возмущения $M(\theta t)$ – кососимметрическая, то частоты (2.14), (2.15) и (2.16) не могут быть сильно устойчивыми, а частоты (2.11), (2.12) и (2.13) не могут быть сильно неустойчивыми.*

Этот результат также является новым для гироскопически стабилизированной системы (1.1) с кососимметрической матрицей возмущений.

4. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

В качестве примера приведем исследование поведения динамической системы (1.1) вида

$$\begin{aligned} a_1\ddot{x}_1 + H_1\dot{x}_2 - b_1x_1 &= \varepsilon\,\kappa_{12}\cos(\theta t)x_2, \\ a_2\ddot{x}_2 - H_1\dot{x}_1 - b_2x_2 &= \varepsilon\,\kappa_{21}\cos(\theta t)x_1 \end{aligned} \tag{4.1}$$

при параметрических возмущениях. Проведем численный расчет на ЭВМ решений системы (4.1) для различных случаев матриц возмущений $M(\theta t)$.

Выберем следующие числовые значения параметров системы $a_1 = 4$, $a_2 = 1$, $H = 9$, $b_1 = b_2 = 1$, $\varepsilon = 0{,}03$.

В случае симметрической матрицы возмущений $M(\theta t)$ примем $\kappa_{12} = \kappa_{21} = 1$. Для случая кососимметрической матрицы возмущений $M(\theta t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}$, считаем, что $\kappa_{12} = -1$, $\kappa_{21} = 1$. Для начальных условий приняты значения $x_1(0) = 0{,}05$; $\dot{x}_1(0) = 0$; $x_2(0) = 0{,}05$; $\dot{x}_2(0) = 0$.

При $\varepsilon = 0$ частоты собственных колебаний системы (4.1) вычисляются по формулам (2.1). Находим

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{608 + 8\sqrt{5760}}}{8} \approx 4{,}357;$$

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{608 - 8\sqrt{5760}}}{8} \approx 0{,}115.$$

На рис. 1–8 приведены графики функции $x_1(t)$, являющейся решением системы (4.1), при параметрических колебаниях для частот возбуждения $\theta = \omega_1 - \omega_2$, $\theta = 2\omega_2$, $\theta = 2\omega_1$, $\theta = \omega_1 + \omega_2$ в случае симметрических и кососимметрических матриц $M(\theta t)$.

Из анализа формул (2.6) следует, что в случае симметрической матрицы возмущения $M(\theta t)$ для данного примера частоты

$$\theta = \omega_1 - \omega_2, \quad \theta = 2\omega_2, \quad \theta = 2\omega_1 \tag{4.2}$$

не могут быть сильно устойчивыми (теорема 1), т. е. при этих частотах в системе (4.1) наступает параметрический резонанс. Это иллюстрируется результатами численного моделирования, приведенными на рис. 1–3.

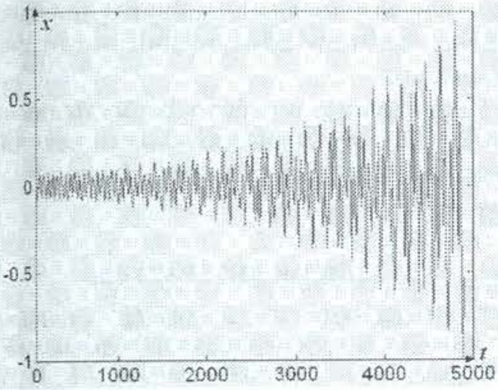

Рис. 1. Симметрическая матрица возмущений $\theta = \omega_1 - \omega_2$

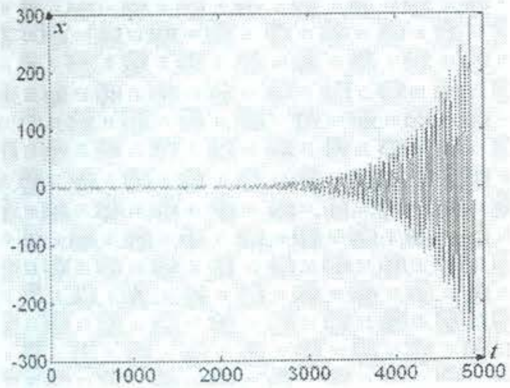

Рис. 2. Симметрическая матрица возмущений $\theta = 2\omega_2$

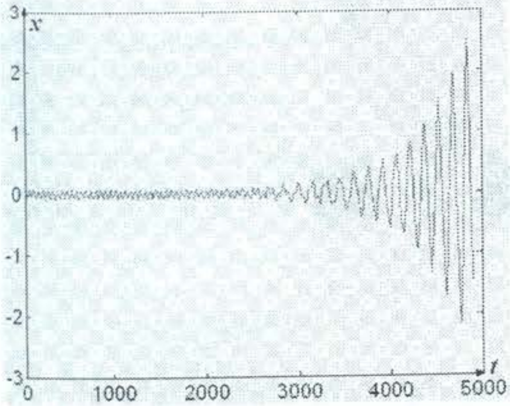

Рис. 3. Симметрическая матрица возмущений $\theta = 2\omega_1$

А частота

$$\theta = \omega_1 + \omega_2 \tag{4.3}$$

не является сильно неустойчивой, т. е. в случае частоты возбуждающих колебаний (4.3) в системе (4.1) параметрический резонанс не наступает, что видно на рис. 4.

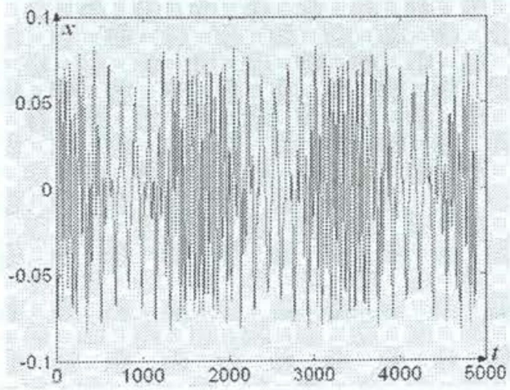

Рис. 4. Симметрическая матрица возмущений $\theta = \omega_1 + \omega_2$

На основании формулы (3.1) и теоремы 2 устанавливаем, что в случае кососимметрической матрицы возмущения $M(\theta t)$ в системе (4.1) частоты (4.2) не могут быть сильно неустойчивыми, т. е. при этих частотах параметрический резонанс в системе не возникает. Это подтверждается результатами численных расчетов, отображенных на рис. 5–7.

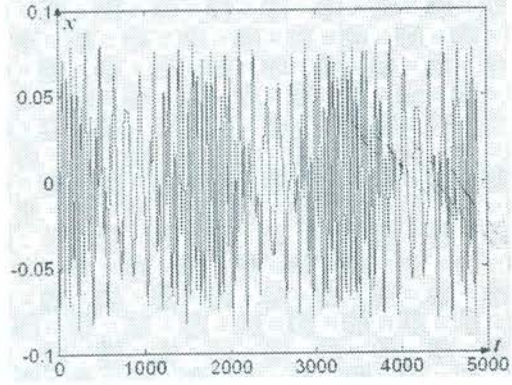

Рис. 5. Кососимметрическая матрица возмущений $\theta = \omega_1 - \omega_2$

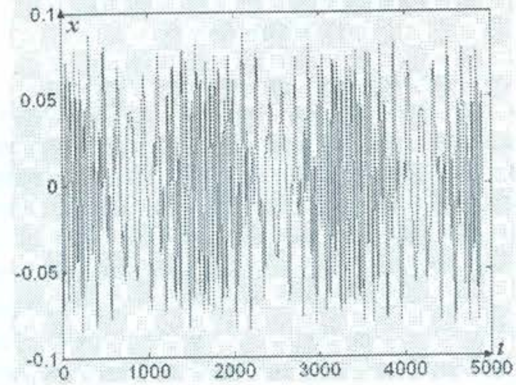

Рис. 6. Кососимметрическая матрица возмущений $\theta = 2\omega_2$

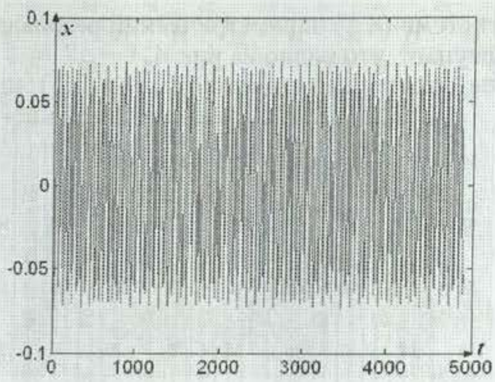

Рис. 7. Кососимметрическая матрица возмущений $\theta = 2\omega_1$

Частота же вида (4.3) не является сильно устойчивой при кососимметрической матрице $M(\theta t)$, т. е. при этой частоте в системе (4.1) наступает параметрический резонанс (рис. 8).

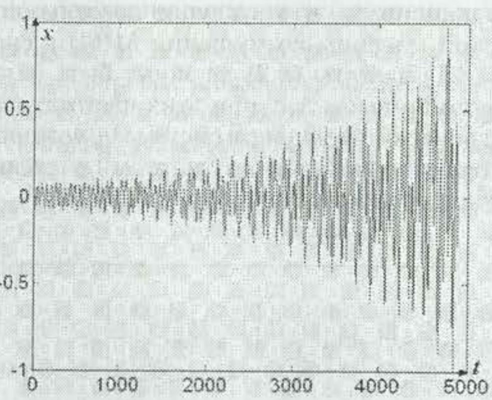

Рис. 8. Кососимметрическая матрица возмущений $\theta = \omega_1 + \omega_2$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теоремы 1 и 2 позволяют найти множество частот, которые не могут быть сильно устойчивыми (сильно неустойчивыми) в зависимости от свойств матриц возмущений системы. Из результатов данной работы следует, что резонансные свойства гиростабилизированной системы имеют свои особенности при параметрических возмущениях.

Полученные результаты представляют практический интерес, так как в прикладных задачах матрицы возмущений имеют специальный вид.

Приведенные в работе формулы позволяют также найти границы области неустойчивости непосредственно через параметры системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Исламов, Р. Р.** Исследование устойчивости решений дифференциальных уравнений при параметрических возмущениях / Р. Р. Исламов, Р. Р. Исламов (мл.) // Вестник УГАТУ. 2005. Т. 6, № 2 (13). С. 40–44.
2. **Исламов, Р. Р.** Исследование параметрического резонанса в гироскопических системах / Р. Р. Исламов, Р. Р. Исламов(мл.) // Вестник УГАТУ. 2005. Т. 6, № 1 (12). С. 41–45.
3. **Валеев, К. Г.** Об опасности комбинационных резонансов / К. Г. Валеев // Прикл. мат. и мех. 1960. Т. XXVII, вып. 6.
4. **Крейн, М. Г.** Основные положения зон устойчивости канонических линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами / М. Г. Крейн // Сб. памяти А. А. Андронова. М. : изд-во АН СССР, 1956. С. 413–498.

ОБ АВТОРЕ

Исламов Ринат Робертович, аспирант. Дипл. инж. по выч. машинам, комплексам, системам и сетям (УГАТУ, 2004). Иссл. в обл. нейронных сетей, нейроматематики, мат. моделирования динам. систем.