

УДК 519.7:621.9

В. П. ЖИТНИКОВ, О. Р. ЗИНАТУЛЛИНА

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОГО ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ТОЧЕЧНЫМ ЭЛЕКТРОДОМ-ИНСТРУМЕНТОМ

Задача моделирования нестационарного формообразования и краевые условия формулируются согласно закону Фарадея. Задача сводится к решению трех краевых задач для определения аналитической функции комплексного переменного на каждом временном шаге: конформного отображения области параметрического переменного на физическую плоскость, задачи Дирихле для определения напряженности электрического поля и задачи Римана Гильберта по вычислению частных производных по времени координат точек межэлектродного пространства (образы точек на параметрической плоскости фиксируются). В отличие от плоской задачи для определения напряженности используются интегральные преобразования аналитической функции. Производятся аппроксимация сплайн-функциями, описываются алгоритмы общего решения нестационарных осесимметричных задач, отличающиеся от известных своей точностью и устойчивостью. Представлены результаты численного решения. *Электрохимическая обработка; осесимметричная задача; нестационарность; численное исследование*

Электрохимическая размерная обработка (ЭХО) — один из перспективных способов получения деталей сложной формы из труднообрабатываемых материалов. При ЭХО практически не производится силового и теплового воздействия на заготовку; электрод-инструмент (ЭИ) практически не изнашивается. Однако поскольку обработка проводится в бесконтактном режиме и, в отличие от электроэрозионной обработки, форма детали не является эквидистантной к поверхности ЭИ, расчет формообразования обрабатываемой поверхности представляет сложную задачу. В особенности осложняет решение необходимость длительных расчетов для исследования установления предельных конфигураций.

Известные методы решения таких задач, к сожалению, не обладают достаточной устойчивостью к накоплению погрешности при расчете длительных процессов.

В связи с этим целью данной работы является разработка численно-аналитических методов и исследование временных характеристик процессов установления стационарной, автотельной и финальной конфигураций.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1. Математическая модель процесса

Рассматриваются задачи по решению уравнения Лапласа для потенциала Φ внутри некоторой области, на границах которой выполняется условие постоянства Φ , причем свободные границы могут либо быть подвижны (скорость движения пропорциональна градиенту Φ), либо быть стационарными, либо сохранять геометрическое подобие межэлектродного пространства (автомодельные решения). Такие задачи принято называть задачами Хеле–Шоу со свободными границами. Решения этих задач могут интерпретироваться как процессы растворения металлов при электрохимической обработке.

Рассмотрим задачу обработки точечным электродом-инструментом. Меридиональное сечение межэлектродного пространства (МЭП) показано на рис. 1. Здесь ADB — граница растворяемого материала, точка C — точечный ЭИ, движущийся со скоростью V_t к обрабатываемой поверхности.

Потенциал Φ и функция тока Ψ осесимметричного поля выражается через функцию комплексного переменного, аналитическую (т.е. удовлетворяющую условиям Коши-Римана) в области Z , форма границ которой совпадает с формой границ меж-

электродного пространства в меридиональном сечении осесимметричного поля, с помощью формул (интегральных преобразований Г. Н. Положего [1]):

$$\Phi(X_0, Y_0) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{\infty}^{Z_0} f(Z) \frac{dZ}{\sqrt{(Z-Z_0)(Z-\bar{Z}_0)}}, \quad (1)$$

$$\Psi(X_0, Y_0) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{\infty}^{Z_0} f(Z) \frac{(Z-X_0)dZ}{\sqrt{(Z-Z_0)(Z-\bar{Z}_0)}}, \quad (2)$$

где $Z_0 = X_0 + iY_0$, $\bar{Z}_0 = X_0 - iY_0$.

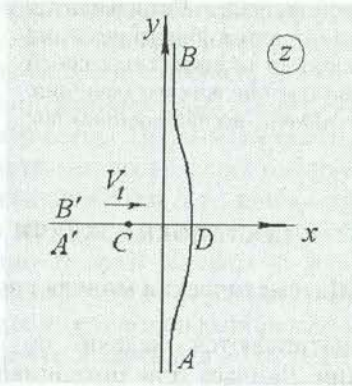


Рис. 1. Схема межэлектродного пространства

Таким образом, решение осесимметричной задачи сводится к решению некоторой плоской задачи для определения аналитической функции $W(Z)$, представляющей комплексный потенциал некоторого вспомогательного плоского поля. Потенциал и функция тока осесимметричного течения получаются путем интегральных преобразований (1), (2), примененных к функции $f(Z) = dW/dZ$ [2].

Краевые условия вспомогательной плоской задачи записываются в виде интегральных уравнений, которые получаются приравнением к константе правых частей (1) для эквипотенциальных границ или (2) для непроницаемых. Равенство нулю мнимой или действительной части $f(Z)$ в общем случае не приводит к равенству нулю или константе соответствующих интегралов.

Из (1) и (2) определяются значения продольной и радиальной составляющей напряженности

$$E_x = \frac{\partial \Phi}{\partial X} = -\frac{1}{\pi} \times \operatorname{Im} \int_{X_1+i0}^{X_0+iY_0} \frac{df}{dZ} \frac{dZ}{\sqrt{(Z-Z_0)(Z-\bar{Z}_0)}}, \quad (3)$$

$$E_y = \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = -\frac{1}{\pi Y} \times \operatorname{Im} \int_{X_1+i0}^{X_0+iY_0} \frac{df}{dZ} \frac{(Z-X_0)dZ}{\sqrt{(Z-Z_0)(Z-\bar{Z}_0)}}, \quad (4)$$

где X_1+i — некоторая точка на оси симметрии x .

Отобразим конформно области, соответствующие МЭП на плоскостях Z и W на полюсу (рис. 2). При этом задачу определения функции $W(Z)$, аналитической на области МЭП, можно решать в параметрическом виде. Границы области МЭП определяются через частную производную $\frac{\partial Z}{\partial t}(\chi, t)$ численным методом путем дискретизации времени.

Таким образом, на каждом временном шаге решаются три краевые задачи.

Найти три аналитические внутри полосы χ функции $W(\chi, t)$, $Z(\chi, t)$ и $\frac{\partial Z}{\partial t}(\chi, t)$, удовлетворяющие определенным краевым условиям.

1.2. Краевые условия

Краевым условием для определения функции $W(\chi, t)$ является условие эквипотенциальности анода и катода, оговоренное выше.

Краевым условием для определения функции $Z(\chi, t)$ является равенство мнимой (или действительной) части $Z(\chi, t)$ на границе полосы $\chi = \sigma$, $\chi = \sigma + i(-\infty < \sigma < \infty)$ известным при каждом фиксированном t функциям $g_{1,2}(\sigma, t)$. Эта краевая задача решается аналитически (с помощью формулы Шварца [3, 4]).

Краевые условия для функции $\partial Z/\partial t(\chi, t)$ на границах МЭП определяются уравнением Фарадея

$$h = V_{ecm} \Delta t = k \eta E_n \Delta t, \quad k = \frac{M \kappa}{n N_A \rho e}$$

Окончательно это условие примет вид

$$-\frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial Y}{\partial \sigma} + \frac{\partial Y}{\partial t} \frac{\partial X}{\partial \sigma} = -k \eta \frac{1}{Y} \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma}. \quad (5)$$

1.3. Безразмерные переменные

В расчетах более удобно использовать безразмерные величины. Введем безразмерные координаты и время следующим образом

$$z = \frac{Z}{l}, \quad x = \frac{X}{l}, \quad y = \frac{Y}{l}, \quad \tau = \frac{\kappa\eta U}{l^2} t. \quad (6)$$

где l — характерный размер (не зависящий от времени), η считается постоянной. Выразим комплексный потенциал в виде $W = Uw$, где U — некоторая постоянная, имеющая размерность потенциала электрического поля. Для точечного ЭИ более удобно использовать значение тока I , протекающего в электрохимической ячейке. При этом $U = I/(\kappa l)$, (κ — электропроводность электролита). В безразмерных переменных равенство (5) примет вид

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\partial y}{\partial \sigma} - \frac{\partial y}{\partial \tau} \frac{\partial x}{\partial \sigma} = \frac{1}{y} \frac{d\psi}{d\sigma}. \quad (7)$$

Равенство (7) служит краевым условием для определения производной $\partial z/\partial \tau(\chi, \tau)$ на части границы, соответствующей поверхности анода.

Более удобно использовать безразмерные величины так, чтобы безразмерная скорость ЭИ равнялась $dx_C/d\tau = 1$. При этом безразмерное время равно τ безразмерному сдвигу ЭИ. Тогда

$$V_{et} = \frac{dX_C}{dt} = \frac{\kappa\eta I}{\kappa l^2}.$$

Отсюда характерный размер и безразмерное время

$$l = \sqrt{\frac{\kappa\eta I}{\kappa V_{et}}}, \quad \tau = \frac{\kappa\eta I}{l^2 \kappa l} t = \frac{V_{et}}{l} t. \quad (8)$$

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Метод решения осесимметричных задач по определению форм, не зависящих от времени, включает два основных этапа: нахождения конформного отображения области параметрической переменной на физическую плоскость и определения составляющих напряженности с помощью интегральных преобразований аналитической функции.

2.1. Конформное отображение

Задача конформного отображения решается следующим образом. В качестве области изменения параметрического переменного $\chi = \sigma + iv$ удобно выбрать полосу ширины $1/2$ с соответствием точек, указанных на рис. 2.

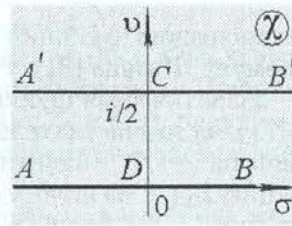


Рис. 2. Образ МЭП на плоскости параметрического переменного χ

Функция, отображающая плоскость χ на физическую, ищется в виде суммы

$$z(\chi) = z_0(\chi) + z_\Delta(\chi). \quad (9)$$

При $\chi \rightarrow \infty$ величина $\text{Re } z_\Delta(\chi) \rightarrow 0$. Функция $z_0(\chi) = ig \text{sh } \pi\chi$ при $g > 0$ конформно отображает полосу плоскости χ на левую полуплоскость с разрезом. При этом граница $\chi = \sigma$ отображается на поверхность ADB , граница $\chi = \sigma + i/2$ — на разрез $A'CB'$. Положение точечного источника $z_0(i/2) = -g$.

Функция $z_\Delta(\chi)$ получается следующим образом. Будем искать решение на границе $\chi = \sigma$ в узловых точках $\sigma_m (m = 0, \dots, n)$. Искомыми будут значения $\text{Re } z_\Delta(\sigma_m) = x_m$. При $\sigma = \sigma_n$ примем $\text{Re } z_\Delta(\sigma_n) = 0$, поскольку $z_\Delta(\sigma)$ быстро (как экспонента) убывает при $\sigma \rightarrow \infty$. Значения $\text{Re } z_\Delta(\sigma)$ в промежуточных между узловыми точках найдем аналогично [5, 6], с помощью кубического сплайна, имеющего две непрерывные производные

$$P(\sigma) = \frac{(\sigma_{m+1} - \sigma)^2 (2(\sigma - \sigma_m) + h_m)}{h_m^3} x_m + \frac{(\sigma - \sigma_m)^2 (2(\sigma_{m+1} - \sigma) + h_m)}{h_m^3} x_{m+1} + \frac{(\sigma_{m+1} - \sigma)^2 (\sigma - \sigma_m)}{h_m^2} p_m + \frac{(\sigma - \sigma_m)^2 (\sigma - \sigma_{m+1})}{h_m^2} p_{m+1}, \quad (10)$$

где $h_m = \sigma_{m+1} - \sigma_m$. Параметры p_m , которые равны значениям первой производной $P(\sigma)$ по σ в узловых точках, определяются при решении системы линейных алгебраических уравнений методом прогонки.

Отметим, что в силу симметрии МЭП относительно оси x , $\text{Re } z_\Delta(\sigma)$ — четная функция. Поэтому в качестве краевого условия используется равенство нулю первой производной $P(\sigma)$ при $\sigma = \sigma_0 = 0$: $P'(\sigma_0) = p_0 = 0$. При $\sigma = \sigma_n$ также положим $P(\sigma_n) = p_n = 0$.

Для восстановления функции $z_{\Delta}(\chi)$ используем формулу Шварца [3] с учетом того, что $z_{\Delta}(\chi)$ — аналитическая функция, имеющая, как и $z_0(\chi)$ чисто действительные значения на прямой $\text{Im } \chi = 1/2$. Аналитически продолжая функцию $z_{\Delta}(\chi)$ на полосу единичной ширины, получим

$$z_{\Delta}(\chi) = -i2 \operatorname{sh} \pi \chi \times \int_0^{\infty} P(\sigma) \frac{\operatorname{ch} \pi \sigma d\sigma}{\operatorname{ch}^2 \pi \sigma - \operatorname{ch}^2 \pi \chi}. \quad (11)$$

Производная $dz_{\Delta}/d\chi(\chi)$ определяется дифференцированием (11):

$$\frac{dz_{\Delta}}{d\chi}(\chi) = -i2 \operatorname{ch} \pi \chi \times \int_0^{\infty} \frac{dP}{d\sigma}(\sigma) \frac{\operatorname{sh} \pi \sigma}{\operatorname{ch}^2 \pi \sigma - \operatorname{ch}^2 \pi \chi} d\sigma. \quad (12)$$

Зададим условие $\operatorname{Re}[z_0(i/2) + z_{\Delta}(i/2)] = x_C$ и найдем из этого условия параметр g

$$z\left(\frac{i}{2}\right) = -g + 2 \int_0^{\infty} P(\sigma) \frac{d\sigma}{\operatorname{ch} \pi \sigma} = x_C. \quad (13)$$

2.2. Определение составляющих напряженности

Осесимметричная задача решается путем сведения ее к вспомогательной плоской задаче. Для ее решения область, соответствующая МЭП на плоскости комплексного потенциала (рис. 3), конформно отображаются на плоскость параметрического переменного χ (рис. 2).

Областью изменения комплексного потенциала для плоской задачи является полуполоса единичной ширины

$$w_0(\chi) = \frac{1}{\pi} \ln \left(\operatorname{th} \frac{\pi}{2} \left(\chi - \frac{i}{2} \right) \right). \quad (14)$$

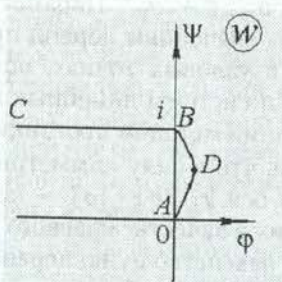


Рис. 3. Образ МЭП на плоскости комплексного потенциала

Производные

$$\frac{dw_0}{d\chi}(\chi) = \frac{i}{\operatorname{ch} \pi \chi},$$

$$\frac{dw_0}{dz_0} = \frac{\frac{dw_0}{d\chi}}{\frac{dz_0}{d\chi}} = \frac{\frac{i}{\operatorname{ch} \pi \chi}}{-ig\pi \operatorname{ch} \pi \chi} = -\frac{1}{g\pi \operatorname{ch}^2 \pi \chi}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial z_0 \partial \chi}(\chi) = \frac{2\pi \operatorname{sh} \pi \chi}{\operatorname{ch}^3 \pi \chi}. \quad (16)$$

Для вспомогательной плоской задачи областью изменения комплексного потенциала является криволинейная полуполоса (рис. 3), так как границы, соответствующие обрабатываемой поверхности в последнем случае не эквипотенциальны.

Закон изменения потенциала на границах вспомогательной плоской задачи определяется краевым условием (1), где $f(z) = \frac{dw}{dz}(\chi)$ [2], т. е. условием эквипотенциальности границы в осесимметричной задаче.

Решение задачи можно искать двумя способами: в виде комплексного потенциала

$$w(\chi) = w_0(\chi) + w_1(\chi) \quad (17)$$

или определять потенциал $\varphi(x, y)$ осесимметричной задачи в виде суммы

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \varphi_0(x, y) + \varphi_1(x, y) = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x+l)^2 + y^2}} - \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \times \\ &\times \int_0^{\sigma_0} \frac{\partial w}{\partial \sigma}(\sigma) \frac{d\sigma}{\sqrt{(z-z_0)(z-\bar{z}_0)}}, \quad (18) \end{aligned}$$

где $\varphi_0(x, y)$ — потенциал точечного источника, расположенного на расстоянии l слева от начала координат.

Составляющие напряженности вычисляются по формулам (3), (4) с использованием замены переменной интегрирования на σ и изменением контура интегрирования (так как подынтегральная функция является аналитической по z) [2]

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \varphi_0(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} \varphi_1(x, y) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \frac{x+l}{[(x+l)^2+y^2]^{3/2}} - \frac{1}{\pi} \times \\ \times \operatorname{Im} \int_0^{\sigma_0} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \sigma}(\sigma) \frac{d\sigma}{\sqrt{(z-z_0)(z-\bar{z}_0)}}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \varphi_0(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} \varphi_1(x, y) = \\ = \frac{1}{4\pi} \frac{y^2}{[(x+l)^2+y^2]^{3/2}} + \frac{1}{\pi y} \times \\ \times \operatorname{Im} \int_0^{\sigma_0} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \sigma}(\sigma) \frac{(z-x_0) d\sigma}{\sqrt{(z-z_0)(z-\bar{z}_0)}}, \quad (20)$$

Будем искать решение в виде функции

$$f_1(\chi) = \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \chi}(\chi). \quad (21)$$

Эта функция должна обладать свойствами, аналогичными функции (16), т. е. при $\chi = \sigma + i0$ ее действительная часть должна быть нечетной функцией σ , при $\chi = \sigma + i/2$ $f_1(\sigma + i/2)$ должна быть чисто действительной. Тогда ее можно аналитически продолжить на полосу единичной ширины. При этом $\operatorname{Re} f_1(\sigma + i) = \operatorname{Re} f_1(\sigma + i0)$.

Искомыми параметрами будут значения действительной части функции $\operatorname{Re} f_1(\sigma_m) = f_m$ в узловых точках σ_m , ($m = 1, \dots, n$). При $\sigma = \sigma_0 = 0$ $\operatorname{Re} f_1(\sigma_0) = 0$, поскольку действительная часть f_1 — нечетная функция σ , как и (16). При $\sigma = \sigma_n$ примем $\operatorname{Re} f_1(\sigma_n) = 0$, поскольку $f_1(\sigma)$ быстро (как экспонента) убывает при $\sigma \rightarrow \infty$. Значения $\operatorname{Re} f_1(\sigma)$ в промежуточных между узловыми точках найдем с помощью кубического сплайна, аналогично (10).

Для восстановления функции $f_1(\chi)$ используем формулу Шварца:

$$f_1(\chi) = -i2 \operatorname{ch} \pi \chi \int_0^{\infty} S(\sigma) \frac{\operatorname{sh} \pi \sigma d\sigma}{\operatorname{ch}^2 \pi \sigma - \operatorname{ch}^2 \pi \chi}. \quad (22)$$

Условие эквипотенциальности обработываемой поверхности при решении методом коллокаций приводит к системе уравнений (равенству нулю тангенциальной составляющей напряженности):

$$F_m = \operatorname{Re} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \overline{\frac{\partial z}{\partial \sigma}}(\sigma_m) \right] = 0, \quad (23)$$

$m = 1, \dots, n - 1$

Подставив в (19), (20) выражение $f_1(\sigma)$ через сплайн и формулу Шварца, а полученные выражения в (23), получим систему линейных (относительно переменных f_m) уравнений.

После решения системы линейных алгебраических уравнений полученные значения f_m подставляются в (19)–(20) для вычисления $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$.

2.3. Решение нестационарной задачи

Нестационарная задача решается методом дискретных шагов по времени $\Delta\tau$. При этом на каждом временном шаге τ_j решаются задачи конформного отображения полосы параметрической плоскости χ на физическую плоскость z и определения составляющих напряженности $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$. При этом задача конформного отображения в полном объеме решается только при $\tau=0$, так как после каждого шага по времени значения переменных $x_m(\tau_j)$ подставляются в используемый сплайн и интегралы Шварца.

После определения $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ остается решить третью краевую задачу: найти частную производную $\frac{\partial z_{\Delta}}{\partial \tau}(\chi, \tau_j) = \frac{\partial x_{\Delta}}{\partial \tau}(\chi, \tau_j) + i \frac{\partial y_{\Delta}}{\partial \tau}(\chi, \tau_j)$ как аналитическую функцию комплексного параметра χ . Эта задача имеет единственное решение, как задача Римана Гильберта [3, 6].

Для вычисления производной $\frac{\partial z_{\Delta}}{\partial \tau}(\chi, \tau_j)$ применяется способ, аналогичный применяемому для определения конформного отображения $z_{\Delta}(\chi, \tau_j)$. Искомыми параметрами на каждом временном шаге $\tau_j = j\Delta\tau$ будут значения $\operatorname{Re} \frac{\partial z_{\Delta}}{\partial \tau}(\sigma_m, \tau_j) = q_m$. Значения $\operatorname{Re} \frac{\partial z_{\Delta}}{\partial \tau}(\sigma, \tau_j)$ в промежуточных между узловыми точках найдем с помощью кубического сплайна $R(\sigma, \tau)$, аналогичного (10).

Для восстановления $\frac{\partial z_{\Delta}}{\partial \tau}(\chi, \tau_j)$ используем формулу Шварца (с учетом того, что $\operatorname{Re} \frac{\partial z_{\Delta}}{\partial \tau}(\sigma, \tau_j)$, как и $\operatorname{Re} z(\sigma, \tau)$ — четная по σ функция

$$\frac{\partial z_{\Delta}}{\partial \tau}(\chi, \tau) = -i2 \operatorname{sh} \pi \chi \times \\ \times \int_0^{\infty} R(\sigma, \tau) \frac{\operatorname{ch} \pi \sigma}{\operatorname{ch}^2 \pi \sigma - \operatorname{ch}^2 \pi \chi} d\sigma. \quad (24)$$

Формула (24) при $\chi = i/2$ используется для определения $\frac{dg}{d\tau}$ по заданным значениям $\frac{dx_C}{d\tau}(\tau)=1$:

$$-\frac{dg}{d\tau}(\tau) + \frac{\partial x_{\Delta}}{\partial \tau} \left(\frac{i}{2}, \tau \right) = -\frac{dg}{d\tau} + 2 \int_0^{\infty} R(\sigma, \tau) \frac{d\sigma}{\operatorname{ch} \pi \sigma} = \frac{dx_C}{d\tau} = 1. \quad (25)$$

Значения q_m определяются методом коллокаций [2] так, чтобы краевое условие (7) удовлетворялось в узловых точках σ_m , $m = 1, \dots, N$.

После решения системы линейных алгебраических уравнений и определения частных производных $\frac{\partial x_{\Delta}}{\partial \tau} = q_m$ производится шаг по времени по методу предиктор-корректор второго порядка точности

$$x_{\Delta}^*(\sigma_m, \tau_{j+1}) = x_{\Delta}(\sigma_m, \tau_j) + q_m [x_{\Delta}(\sigma_m, \tau_j)] \Delta \tau,$$

$$x_{\Delta}(\sigma_m, \tau_{j+1}) = x_{\Delta}(\sigma_m, \tau_j) + \{q_m [x_{\Delta}(\sigma_m, \tau_j)] + q_m [x_{\Delta}^*(\sigma_m, \tau_{j+1})]\} \frac{\Delta \tau}{2}.$$

Далее снова повторяется процесс вычисления $\frac{\partial z_{\Delta}}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, q_m и т. д.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Поверхности, полученные при решении задач, представлены на рис. 4–9.

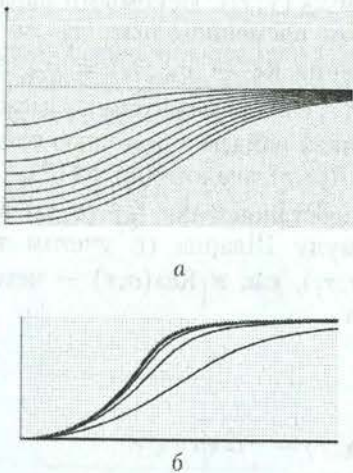


Рис. 4. Обработка неподвижным ЭИ: а — начало процесса; б — шаг по времени пропорционален заглублению, а в качестве масштабной единицы выбрана величина заглубления

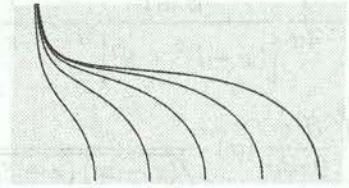


Рис. 5. Поверхности, полученные при обработке подвижным ЭИ



Рис. 6. Обработка подвижным ЭИ

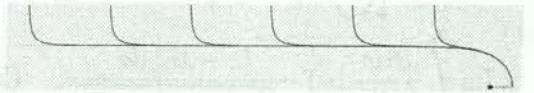


Рис. 7. Обработка подвижным ЭИ. Начало координат совмещено с ЭИ



Рис. 8. Обработка ЭИ, движущимся из бесконечности



Рис. 9. Обработка ЭИ, движущимся от нулевого зазора

Рассмотрим обработку неподвижным электродом-инструментом, расположенным на расстоянии l от изначально плоской обрабатываемой поверхности. Величина l является в данном случае масштабной единицей. На рис. 4, а показано начало процесса растворения (шаг по времени — равномерный).

На рис. 4, б показано развитие процесса во времени (шаг пропорционален глубине выемки). Можно видеть, что форма выемки приближается к автомодельной. Чтобы увидеть это более наглядно, рисунок смасштабирован так, чтобы глубина выемки всегда равнялась единице.

Из этого можно сделать вывод, что при обработке неподвижным ЭИ, как и в плоском случае, поверхность любой формы с течением времени приобретает автомодельную форму. Тем самым, автомодельное решение является аттрактором.

Результаты расчета процесса обработки при движении ЭИ от стационарного зазора приведены на рис. 5–7. Начало процесса заглубления показано на рис. 5. Следует отметить, что данный результат был получен с помощью метода интегрирования, не модифицированного путем видоизменения квадратурной формулы. Дальнейший расчет не

мог быть выполнен в связи с накоплением погрешности и потерей устойчивости. После модификации алгоритма диапазон решения расширился очень существенно (см. рис. 6).

На рис. 6 в зоне вблизи ЭИ можно наблюдать формирование стационарного процесса. Для наглядности на рис. 7 начало координат совмещено с ЭИ. Тем самым при подвижном ЭИ аттрактором является стационарное решение (в окрестности ЭИ). В то же время на участке обрабатываемой поверхности, находящейся вблизи начала паза, формируется некоторая форма, которая будет называться финальной. Это связано с удалением ЭИ от этого участка и прекращением растворения.

Результаты расчета процесса обработки при движении ЭИ из бесконечности и от нулевого зазора приведены на рис. 8, 9. Видно, что по сравнению с рис. 6 входная часть отверстия имеет более плавную (рис. 8) и более острую (рис. 9) форму.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ

ПАРАМЕТРОВ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Исследованию подлежит закон установления автомодельной, стационарной и финальной форм при увеличении безразмерного времени.

4.1. Установление автомодельной формы

На рис. 10 показаны зависимости произведения кривизны и глубины впадины на обрабатываемой поверхности Kl от логарифма времени $\delta = \lg \tau$. На рис. 11 дана зависимость десятичного логарифма относительной разности $-\lg \left| \frac{K(\delta)l(\delta) - Kl^*}{Kl^*} \right|$, где Kl^* — величина, полученная с помощью экстраполяции. Видно, что эта зависимость близка к линейной. Точность приближения к предельному значению ограничена 8-ю знаками, которые получают при экстраполяции данных нестационарной задачи, что объясняется ограниченностью вычислительных ресурсов при ее решении.

Для оценки параметров линейной зависимости применялся метод наименьших квадратов. В результате получены следующие значения: угловой коэффициент логарифмической зависимости $k_\tau = 0,33$; аддитивная постоянная $a = -0,3$; среднеквадратичная погрешность аппроксимации $\sigma_a = 0,007$.

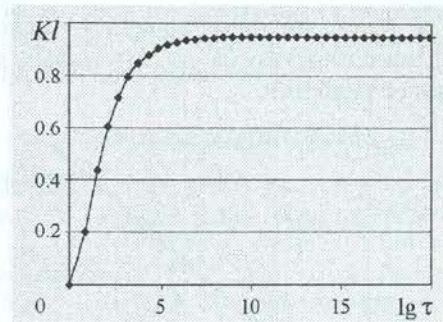


Рис. 10. Установление автомодельной формы: зависимость произведения Kl (предельное значение $Kl=0.948474795 \pm 1 \cdot 10^{-8}$) от времени

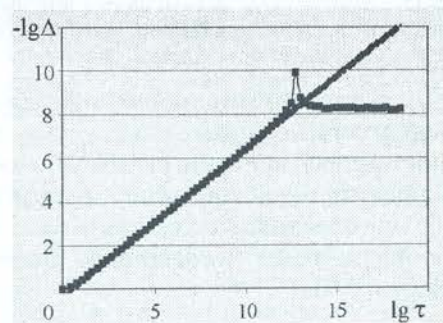


Рис. 11. Установление автомодельной формы: зависимость десятичного логарифма разности от времени

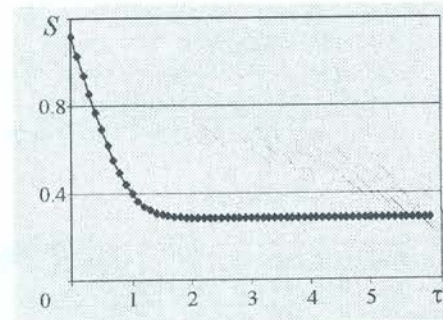


Рис. 12. Установление стационарного зазора $S = 0,282186858398 \pm 1 \cdot 10^{-12}$ при бесконечно удаленном начальном положении. ЭИ: зависимость зазора от времени

4.2. Установление стационарного зазора

На рис. 12 показана зависимость зазора между ЭИ и ближайшей точкой обрабатываемой поверхности от безразмерного времени τ . На рис. 13 дана зависимость десятичного логарифма разности $-\lg \left| \frac{S(\tau) - S^*}{S^*} \right|$, где S — зазор; S^* — величина стационарного зазора. Видно, что эта зависимость близка к линейной, т. е. закон установления близок к экспоненциальному. Точность приближения к предельному значению ограничена 10-ю знаками, которые получают при экстраполяции

данных нестационарной задачи и объясняется ограниченностью вычислительных ресурсов при ее решении.

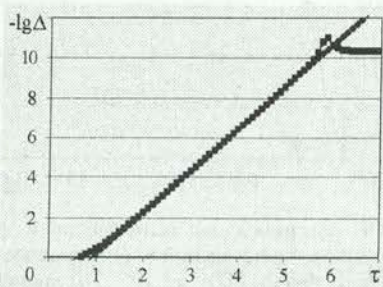
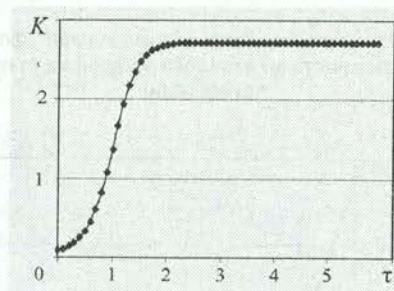
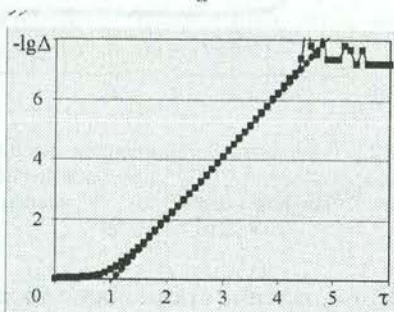


Рис. 13. Зависимость десятичного логарифма разности от времени при бесконечно удаленном начальном положении ЭИ

В результате применения метода наименьших квадратов получены следующие значения: постоянная времени (угловой коэффициент логарифмической зависимости) $k_\tau = 2,09$; аддитивная постоянная $a = -1,92$; среднеквадратичная погрешность аппроксимации $\sigma_a = 0,01$.



a



б

Рис. 14. Установление стационарного значения кривизны $K = 2,716660 \pm 1 \cdot 10^{-6}$ при бесконечно удаленном начальном положении ЭИ: а — зависимость кривизны от времени; б — зависимость десятичного логарифма разности от времени

4.3. Установление стационарного значения кривизны

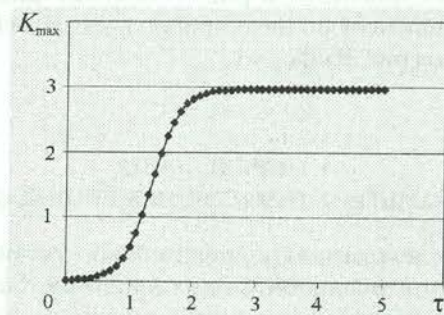
На рис. 14, а показана зависимость кривизны обрабатываемой поверхности в точке, ближайшей к ЭИ, от безразмерного времени τ . На

рис. 14, б дана зависимость десятичного логарифма $-\lg \left| \frac{K(\tau) - K^*}{K^*} \right|$, где K — кривизна; K^* — величина стационарной кривизны. Полученные параметры: $k_\tau = 2,09$; $a = -2,16$; $\sigma_a = 0,005$.

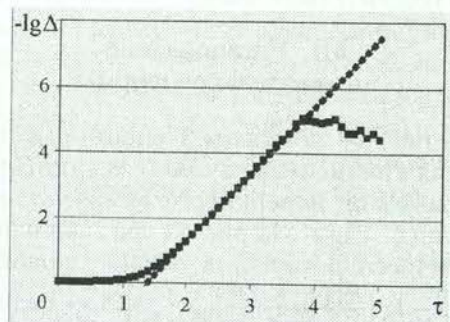
Аналогичные зависимости получены для нулевого начального зазора. Получены следующие значения: $k_\tau = 2,08$; $a = -0,68$; $\sigma_a = 0,01$.

4.4. Установление значения кривизны финальной формы

Таким же способом получены параметры зависимости максимальной кривизны от времени для бесконечно удаленного ЭИ (рис. 15): $k_\tau = 2,08$; $a = -2,88$; $\sigma_a = 0,05$.



a



б

Рис. 15. Установление максимального по модулю значения кривизны $K = -2,96880 \pm 3 \cdot 10^{-5}$ при бесконечно удаленном начальном положении ЭИ: а — зависимость кривизны от времени; б — зависимость десятичного логарифма разности от времени

4.5. Установление значения радиуса в минимальном сечении

Сужение паза наблюдалось при нулевом начальном зазоре. Зависимости радиуса приведены на рис. 16. Получены следующие значения параметров процесса: $k_\tau = 2,03$; $a = -0,98$; $\sigma_a = 0,02$.

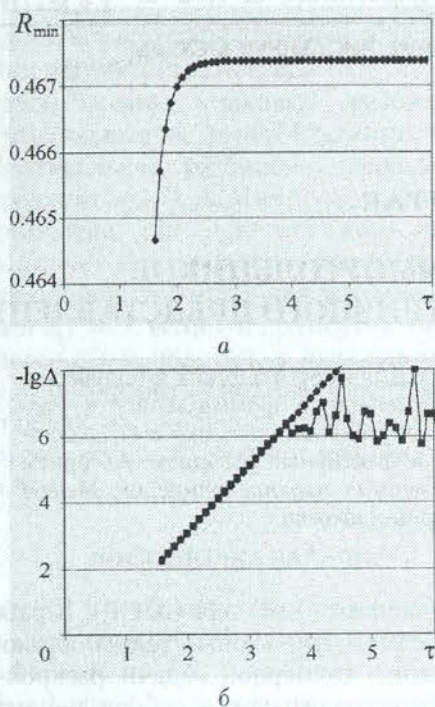


Рис. 16. Установление минимального радиуса паза $b = 0,934749 \pm 1 \cdot 10^{-6}$ при нулевом начальном зазоре: а — зависимость радиуса от времени; б — зависимость десятичного логарифма разности от времени

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе предложен метод численного решения задач нестационарной электрохимической обработки при помощи осесимметричного электрода инструмента, основанный на интегральных преобразованиях аналитической функции. Решение численных примеров подтвердило высокую эффективность предложенного метода.

В результате исследований временных характеристик процессов установления параметров форм к стационарным и финальным значениям во всем диапазоне значений начального зазора между ЭИ и исходной обрабатываемой поверхностью показало, что постоянная времени k_T одинакова во всех случаях ($\approx 2,1$) в пределах достигнутой точности. Точность расчета финальной формы несколько хуже, чем стационарной, особенно при нулевом начальном зазоре, поэтому разброс значений k_T больше. Тем не менее можно утверждать, что отличия k_T для переходного процесса к стационарной и финальной форме не обнаружено.

Замечание. Инвариантность этой величины для различных условий установления стационарного процесса вопросов не вызывает

ет. Но то, что эта величина определяет скорость установления финальной формы, заранее предсказать было трудно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Положий, Г. Н. Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного / Г. Н. Положий. Киев : Киев. ун-т, 1965. 442 с.
2. Житников, В. П. Решение плоских и осесимметричных задач с помощью методов теории функции комплексного переменного : учеб. пособие / В. П. Житников. Уфа : УГАТУ, 1994. 106 с.
3. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. М. : Наука, 1973. 736 с.
4. Терентьев, А. Г. К линейной теории кавитационного обтекания препятствий / А. Г. Терентьев // Вопросы прикладной математики и механики. Чебоксары : ЧГУ, 1971. Вып. 1. С. 3–35.
5. Zhitnikov, V. P. Simulation of non-stationary processes of electrochemical machining / V. P. Zhitnikov, G. I. Fedorova, O. R. Zinatullina // J. of Materials Processing Tech. 2004. Vol. 149/1-3. Special issue : Proc. of 14th Int. Symp. on Electromachining (ISEM XIV). Elsevier, 2004. P. 398–403.
6. Zhitnikov, V. P. Numerical investigation of non-stationary electrochemical shaping based on an analytical solution of the Hele-Shaw problem / V. P. Zhitnikov, G. I. Fedorova, N. M. Sherykhalina, A. R. Urakov // J. Eng. Math. 2006. Vol. 55, Nos. 1–4. Special Issue: A taste of engineering mathematics from present-day Russia. P. 255–276.

ОБ АВТОРАХ



Житников Владимир Павлович, проф., зав. каф. компьют. математики. Дипл. инж.-физ. (МФТИ, 1973). Д-р физ.-мат. наук по механ. жидкости, газа и плазмы (Казанск. гос. ун-т, 1993). Иссл. в обл. волновых течений жидкости, электрохим. формообразования, числ.-аналит. методов.



Зинатуллина Ольга Рифовна, доц. той же каф. Дипл. инж. по САПР (УГАТУ, 2001), канд. физ.-мат. наук по спец. механ. жидкости, газа и плазмы (БГУ, 2006). Иссл. в обл. расчета электрохимического формообразования.